Grigorii Yakovlevich Lozanovskii

Published Works

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Применение функционального анализа в теории приближений

КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАЛИНИН 197[illegible]

УДК 513.88

Г.Я.ЛОЗАНОВСКИЙ
(Ленинград)

О ПОРЯДКОВОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ К-ПРОСТРАНСТВ

Используется терминология из [1], [2]. Пусть X - векторная решётка (ВР). Напомним, что последовательность $\{x_n\}\subset X$ порядково сходится (об -сходится) к элементу $x\in X$, если существует $\{u_n\}\subset X$, такая, что $|x-x_n|\leq u_n\downarrow 0$. С помощью об -сходимости в X вводится секвенциальная порядковая топология (коротко об -топология), в которой замкнуты (по определению) те и только те множества, которые содержат пределы своих об -сходящихся последовательностей. Напомним, что об -сходимость не является топологической сходимостью и для подмножества $D\subset X$ его об -замыкание, обозначаемое $cl\,D$, вообще говоря, не получается присоединением к D всех об -пределов последовательностей из D.

Определение. ВР X называется об -сепарабельной, если в X найдётся такое счётное множество D, для которого $cl\,D=X$.

Напомним, что положительный элемент $e\in X$ называется единицей, если $e\wedge|x|>0$ для любого $x\neq 0$.

Через $X^{\sim}$ (соотв. $X^{\sim}_n$) обозначается множество всех регулярных (соотв. порядково непрерывных) функционалов на X.

Через $S[0,1]$ обозначается, как обычно, К-пространство всех (классов эквивалентности) измеримых почти всюду конечных функций на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега.

К-пространство всех последовательностей обозначаем через s.

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть X — К-пространство с единицей и тотальным множеством порядково непрерывных функционалов. Тогда равносильны следующие три утверждения:*

1) X изоморфно идеалу в $S[0,1]\times S$;

2) в $X^{\sim}$ существует счётная система функционалов, тотальная на X;

3) X $o\sigma$-сепарабельно.

При этом мы умеем выводить 1) или 2) из 3) только в предположении, что $2^{\aleph_1}>2^{\aleph_0}$. Существенно ли это предположение нам неизвестно.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Достаточно рассмотреть случай, когда X есть идеал в $S[0,1]$. Представим X в виде соединения счётного числа попарно дизъюнктных полос X_n ($n = 1, 2,\ldots$) на каждой из которых имеется существенно положительный порядково непрерывный функционал. (Т.к. $X_n^{\sim}$ тотально, то подобные полосы существуют). Каждая из этих полос погружается в КВ-пространство с аддитивной нормой, или, иначе говоря, в пространство изоморфное $L^1[0,1]$. На пространстве же $L^1[0,1]$, а тем самым и на X, существует счётная тотальная система регулярных (даже порядково непрерывных) функционалов.

2)$\Rightarrow$1). Можно считать, что X есть К-пространство ограниченных элементов с естественной нормой.

Пусть $\{f_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ - счётная, тотальная система регулярных функционалов на X, причём $\|f_n\|=1$. По теореме Иосиды-Хьюитта, каждый функционал f_n представим в виде $f_n=\varphi_n+\psi_n$, где $\varphi_n\in X_n^{\sim}$, а ψ_n-сингулярный (т.е. равный нулю на некотором фундаменте) функционал. Положим $\psi=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}|\psi_n|$. Тогда ψ син-

гулярен и значит $Y=\{x\in X:\psi(|x|)=0\}$ есть фундамент в X. Следовательно, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ тотально на Y. Но, тогда множество $\{\varphi_n^+: n=1,2,\ldots\}\cup\{\varphi_n^-: n=1,2,\ldots\}$ тотально на X. Итак, на X имеется счётная тотальная система порядково непрерывных функционалов. Рассмотрим $Z=X_n^{\sim}$. Тогда Z есть КВ-пространство с аддитивной нормой, причём $Z^*=X$. Из наличия в Z счётного тотального на Z^* множества немедленно следует, что Z сепарабельно в топологии $\sigma(Z,Z^*)$, а значит Z сепарабельно и в нормированной топологии. Поскольку Z, будучи КВ-пространством с аддитивной нормой, реализуется (по теореме Какутани) в виде пространства $L^1(\mu)$ по некоторой мере и поскольку Z сепарабельно, то отсюда следует (см. [3] § 41, теор.3), что $Z=L^1(\mu)$ изоморфно идеалу в $S[0,1]\times S$. Но тогда и $X=Z^*$ изоморфно идеалу в $S[0,1]\times S$.

1)$\Rightarrow$3) Ясно, что не умаляя общности, можно ограничиться случаем, когда X есть фундамент в $S[0,1]$ и при этом функция 1, тождественно равная 1, входит в X. Пусть D - линейная оболочка над *полем* рациональных чисел множества характеристических функций интервалов из $[0,1]$, имеющих рациональные концы. D счётно и легко видеть, что $o\sigma$-замыкание совпадает с X.

3)$\Rightarrow$1) ($2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$). Прежде всего *покажем*, что из 3) вытекает счётность типа пространства X (только в этом месте мы и используем предположение $2^{\aleph_1}>2^{\aleph_0}$). Допустим противное. Тогда в X найдётся порядково ограниченное множество $A=\{x_i : i\in I\}$, такое, что $card\,I=\aleph_1$ и $x_{i_1}\wedge x_{i_2}=0$ при $i_1\neq i_2$.

Отсюда очевидно следует, что $card\,X\geq 2^{\aleph_1}>2^{\aleph_0}$. С другой стороны, по условию $X=cl\,D$ для некоторого счётного

$D\subset X$ и, следовательно, $\operatorname{card} X \leq 2^{\aleph_0}\cdot\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ поскольку $cl\,D$ получается за ω_1 шагов последовательными присоединениями пределов $o\sigma$-сходящихся последовательностей. Полученное противоречие и доказывает счётность типа пространства X.

Итак, X счётного типа. Следовательно (см., например,[4]), X реализуется в виде фундамента в пространстве $S(T,\Sigma,\mu)$, где мера μ конечна. Из $o\sigma$-сепарабельности X, очевидно, вытекает $o\sigma$-сепарабельность пространства $S(T,\Sigma,\mu)$. Но тогда, как легко видеть, пространство $S(T,\Sigma,\mu)$ сепарабельно и в топологии сходимости по мере. Отсюда следует (опять по уже упоминавшейся теореме из [3]), что $S(T,\Sigma,\mu)$ изоморфно $S_{[0,1]\times S}$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Предположение о наличии в X единицы существенно для справедливости импликации 2)$\Rightarrow$1), а следовательно, и 2)$\Rightarrow$3). Действительно, пусть $X=\ell^1(\Gamma)$, где $\Gamma = [0,1]$. Тогда X не может быть вложено как идеал в $S_{[0,1]\times S}$, но в X^* существует счётная тотальная система, например, система функционалов, порождённых обычными многочленами с рациональными коэффициентами.

В заключение отметим, что настоящая заметка была подготовлена к печати А.И.Векслером на основе архива Г.Я.Лозановского. Было бы интересно получить ответ на следующий вопрос : не будут ли утверждения 1)-3) теоремы равносильны следующему утверждению 3′): в X существует такое счётное подмножество $D=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для всякого $x\in X$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, порядково сходящаяся к x.

Ясно, что $3')\Rightarrow 3)$. Справедливость обратной импликации 3)$\Rightarrow$3′) нам неизвестна. Отметим, что для случая банахова K-пространства в черновиках Г.Я.Лозановского было без доказательства упомянуто , что 2) и 3′) равносильны, однако, установить справедливость этого утверждения не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1) Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., 1961.

2) Канторович Л.В, Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.

3) Халмош П. Теория меры. М., 1963.

4) Вулих Б.З., Лозановский Г.Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.- Мат.сб. , 1971,т.84, №3, с.331-352.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 3 (1979)

О ПРОСТРАНСТВЕ АНТИНОРМАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Г. Я. Лозановский

Пусть X — банахова решетка (БР). Тогда ее (банахово) сопряженное пространство X^* распадается в сумму $X^* = X_n^* \oplus X_{\text{ant}}^*$, где X_n^* — полоса (компонента) порядково непрерывных (вполне линейных [1]) функционалов и $X_{\text{ant}}^* = (X_n^*)^d$ — дизъюнктное дополнение полосы X_n^* в X^*, элементы которого называются антинормальными функционалами. Если X — банахово функциональное пространство, то полоса X_n^* состоит в точности из тех функционалов, которые допускают интегральное представление [2]. Строение полосы X_{ant}^* антинормальных функционалов значительно сложнее. Одним из важнейших результатов об этой полосе является обобщенная теорема Иосиды—Хьюитта [3, теорема 50.4]. Если X — БР и X_n^* тотально на X, то всякий антинормальный функционал f анормален, т. е. равен нулю на некотором фундаменте $\Phi \subset X$. Эта теорема является глубоким обобщением известной теоремы Иосиды—Хьюитта о строении сопряженного пространства к $L^\infty(\mu)$.

В настоящей заметке приводится ряд новых результатов о строении X_{ant}^*. Все они, грубо говоря, утверждают, что если только полоса X_{ant}^* не нулевая, то тогда она очень большая. В связи с этим напомним [1], что $X_{\text{ant}}^* = \{0\}$ тогда и только тогда, когда в X норма порядково непрерывна, т. е. выполнено условие (A) : $(x_\alpha \downarrow 0) \Rightarrow (\|x_\alpha\| \to 0)$.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 содержатся основная теорема 1 о строении антинормальной полосы X^*_{ant} и ряд следствий. В § 2 строится пример антинормального функционала на пространстве Марцинкевича $M(t^\alpha)$, обладающего некоторыми любопытными свойствами.

§ 1. Основная теорема о строении X^*_{ant}.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — банахово $K_\sigma N$-пространство, в котором не выполнено условие (A). Тогда справедливы утверждения* I *и* II.

I. *В X^*_{ant} существует замкнутая векторная подрешетка L, обладающая следующими свойствами:*

а) L порядково изоморфна [1]) *пространству $(l^\infty)^*$;*

б) L замкнута в X^* в топологии $\sigma(X^*, X)$;

в) функционалы из L, «равномерно анормальны» в том смысле, что существует фундамент Φ в X такой, что сужение $f|_\Phi = 0$ для любого $f \in L$.

II. *В $(X^*_{\text{ant}})^*_n$, т. е. в пространстве порядково непрерывных функционалов на X^*_{ant} существует замкнутая векторная подрешетка M, обладающая следующими свойствами:*

г) M порядково изоморфна пространству $(l^\infty)^{**}$;

д) M замкнута в $(X^*_{\text{ant}})^*_n$ в топологии $\sigma((X^*_{\text{ant}})^*_n, X^*_{\text{ant}})$.

Непосредственным следствием предыдущей теоремы является

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X такое же как в теореме* 1. *Тогда имеют место утверждения* III—V.

III. *Пространство X^*_{ant} не рефлексивно.*

IV. *В X^*_{ant} существует множество мощности 2^c, состоящее из ненулевых попарно дизъюнктных элементов (здесь c — мощность континуума).*

V. *В $(X^*_{\text{ant}})^*_n$ существует порядково ограниченное множество мощности 2^c, состоящее из ненулевых попарно дизъюнктных элементов.*

З а м е ч а н и я. 1) Теоремы 1 и 2 не обобщаются на произвольные БР. Например, если X есть пространство всех сходящихся последовательностей с равномерной нормой, то X^*_{ant} одномерно.

2) В связи с III отметим, что легко построить пример банахова KN-пространства X, такого что X^*_{ant} содержит бесконечномерную рефлексивную полосу. Например, если в качестве X взять l^2-произведение счетного числа пространств $L^\infty[0, 1]$, то X^*_{ant} содержит полосу, (o)-изоморфную и изометричную l^2.

3) Утверждение III может быть, очевидно, усилено так: *полоса X^*_{ant} не является (WCG)-пространством (или иначе — не слабо компактно порождена).*

4) Утверждение IV является усилением результата, полученного автором ранее [4], в котором другим методом было доказано существование дизъюнктного множества мощности c в отличие от полученной здесь мощности 2^c. Мощности, указанные в IV и V, не могут быть увеличены, ибо достаточно взять в качестве X пространство l^∞.

5) Теорема 1 дает отрицательный ответ на вопрос Т. Андо, поставленный в 1975 г. на конференции по упорядоченным пространствам в Обервольфахе: может ли быть полоса X^*_{ant} (o)-изоморфна AM-пространству. Действительно, если X^*_{ant} (o)-изоморфно AM-пространству, то в силу теоремы 1 $(l^\infty)^*$ было бы изоморфно AM-пространству, что, очевидно, не так.

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм.

ЛЕММА 1. *Пространства $(l^\infty)^*$ и $(l^\infty)^*_{\text{ant}}$ порядково изоморфны и изометричны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отождествим пространство l^∞ с $C(\beta N)$ — пространством непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда. Тогда счетный набор различных точек из $\beta N \setminus N$ порождает в $(l^\infty)^*_{\text{ant}}$ полосу, (o)-изоморфную и изометричную l^1; обозначим через E дополнительную к ней полосу в $(l^\infty)^*_{\text{ant}}$. Имеем

$$(l^\infty)^*_{\text{ant}} = E \oplus l^1 = E \oplus (l^1 \oplus l^1) = (E \oplus l^1) \oplus l^1 = = (l^\infty)^*_{\text{ant}} \oplus l^1 = (l^\infty)^*.$$

Если X — векторная решетка, то через $X^\sim$ обозначаем пространство регулярных функционалов на X. Для $x \in X$, через $[0, x]$ обозначаем порядковый интервал в X, т. е. $[0, x] = \{x' \in X: 0 \leqslant x' \leqslant x\}$.

---

[1]) Векторные решетки X и Y называются порядково изоморфными (или короче (o)-изоморфными), если существует линейное положительное в обе стороны отображение X на Y. (o)-изоморфизм между банаховыми решетками является и банаховым изоморфизмом.

Из последующих трех лемм леммы 2 и 4 по существу известны (лемма 2 вытекает из [5, теорема 19.2], а лемма 4 является стандартным фактом теории банаховых пространств), а лемма 3 получена автором ранее и ее доказательство приведено, например, в [6].

ЛЕММА 2. *Пусть* X *— архимедова векторная решетка,* Y *— векторная подрешетка в* X, $f \in X^{\sim}_{+}$, $g \in Y^{\sim}_{+}$ *и* $g(y) \leqslant f(y)$ *для любого* $y \in Y_{+}$. *Тогда существует* $h \in X^{\sim}_{+}$ *такой, что* $h \leqslant f$ *и сужение* $h|_Y = g$.

ЛЕММА 3. *Пусть* T *— положительный линейный оператор, действующий из векторной решетки* X *в векторную решетку* Y *и переводящий порядковые интервалы из* X *на порядковые интервалы в* Y; *т. е. для любого* $x \in X_{+}$

$$T([0, x]) = [0, Tx].$$

Тогда сопряженный оператор [1] T^* *является решеточным гомоморфизмом из* $Y^{\sim}$ *в* $X^{\sim}$. *Тем самым,* $T^*(Y^{\sim})$ *есть векторная подрешетка в* $X^{\sim}$.

ЛЕММА 4. *Пусть* T *— линейный непрерывный оператор, отображающий банахово пространство* X *на банахово пространство* Y. *Тогда*

а) сопряженный оператор T^* *взаимно однозначен;*

б) если F $\sigma(Y^*, Y)$*-замкнутое подпространство в* Y^*, *то* $T^*(F)$ $\sigma(X^*, X)$*-замкнуто в* X^*.

Доказательство теоремы 1. Так как в X не выполнено условие (A), то в силу [7] в X содержится векторная подрешетка Y, порядково изоморфная l^∞ и потому дополняемая в X. Для простоты записи мы отождествим Y с l^∞. Легко видеть (это, например, было отмечено в [6, стр. 88]), что существует положительный проектор P из X на $Y = l^\infty$, удовлетворяющий условиям леммы 3 и обращающийся в нуль на Y^d (дизъюнктном дополнении Y в X). Положим $L = P^*(Y^*_{\text{ant}})$. В силу леммы 3 L — векторная подрешетка в X^*. Так как, очевидно, $(l^\infty)^*_{\text{ant}}$ $\sigma((l^\infty)^*, l^\infty)$-замкнуто в $(l^\infty)^*$, то в силу леммы 4 L $\sigma(X^*, X)$-замкнуто в X^* и оператор P^* взаимно однозначен. По лемме 1 $(l^\infty)^*_{\text{ant}}$ (o)-изоморфно $(l^\infty)^*$ и, значит, L (o)-изоморфно $(l^\infty)^*$. Пункты а), б) доказаны. Докажем в).

1) T^* определяется естественным образом: для $g \in Y^{\sim}$ и $x \in X$ $(T^*g)(x) = g(Tx)$.

Обозначим через H идеал в X, порожденный ортами $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ пространства $Y = l^\infty \subset X$ и положим $\Phi = H \oplus H^d$. Фиксируем $f \in L$ и покажем, что сужение $f|_\Phi = 0$. Так как $g = f|_Y \in Y^*_{\text{ant}}$, то $g(e_n) = 0$ и, следовательно, $f|_H = 0$. С другой стороны, если $x \in H^d$, то $f(x) = (P^*g)(x) = g(Px) = g(0) = 0$, откуда и следует, что $f|_\Phi = 0$.

Переходим к доказательству утверждения II. Обозначим через T оператор, действующий из X^* в Y^* и сопоставляющий функционалу f из X^* его сужение $g = f|_Y$. В силу леммы 2 T удовлетворяет условиям леммы 3. Положим далее $E = \{f \in X^* : f|_\Phi = 0\}$. Ясно, что E — полоса в X^*_{ant}. Убедимся, что

$$T(E) = Y^*_{\text{ant}}. \tag{1}$$

Так как при всех n имеем $e_n \in \Phi$, то $T(E) \subset Y^*_{\text{ant}}$. Пусть $g \in Y^*_{\text{ant}}$ и примем $f = P^*g$. Тогда $Tf = g$ и по уже доказанному в I $f|_\Phi = 0$, т. е. $f \in E$. Тем самым равенство (1) доказано.

Ясно, что вместе с T условию леммы 3 удовлетворяет и оператор $R = T|_E$. Следовательно, в силу (1) и лемм 3, 4 $M_0 = R^*((Y^*_{\text{ant}})^*)$ есть $\sigma(E^*, E)$-замкнутая векторная подрешетка в E^*, (o)-изоморфная $(Y^*_{\text{ant}})^*$, а потому и $(l^\infty)^{**}$, ибо по лемме 1 Y^*_{ant} (o)-изоморфно $(l^\infty)^*$. Проверим, что

$$M_0 \subset E^*_n. \tag{2}$$

Действительно, если $f_\alpha \in E$ и $f_\alpha \downarrow 0$, то, очевидно, $Tf_\alpha \downarrow 0$ в Y^* и, следовательно, $\| Tf_\alpha \| \to 0$ (ведь в $Y^* (= (l^\infty)^*)$ выполнено (A)), что и обеспечивает (2). Обозначим, наконец, через Q оператор проектирования X^*_{ant} на полосу E. Тогда $M = Q^*(M_0)$ есть, очевидно, требуемая подрешетка в $(X^*_{\text{ant}})^*_n$. Теорема 1 полностью доказана.

По ходу доказательства теоремы 1 мы использовали слабую замкнутость полосы $(l^\infty)^*_{\text{ant}}$ в $(l^\infty)^*$. Не следует думать, что полоса X^*_{ant} всегда слабо* замкнута в X^*. Например, если $X = L^\infty[0, 1]$, то X^*_{ant} содержит все δ-функционалы и потому слабо* плотна в X^*. Легко доказать, что если X — банахова решетка с тотальным X^*_n, то полоса X^*_{ant} $\sigma(X^*, X)$-замкнута тогда и только тогда, когда функционалы из X^*_{ant} равномерно анормальны, т. е. существует фундамент Φ в X такой, что $f \mid \Phi = 0$ для любого $f \in X^*_{\mathrm{ant}}$. Когда $X = l^\infty$, в качестве Φ можно взять c_0. В связи с изложенным интересно отметить, что при минимальном дополнительном предположении удается совсем просто получить слабую секвенциальную замкнутость X^*_{ant} в X^*.

Предложение 1. *Пусть X — банахово KN-пространство. Тогда для всякого счетного подмножества D в X^*_{ant} его замыкание $\overline{D}$ в топологии $\sigma(X^*, X)$ содержится в X^*_{ant}; в частности, X^*_{ant} слабо* секвенциально замкнуто в X^*.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что X^*_n тотально на X. Пусть $D = \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*_{\mathrm{ant}}$. По обобщенной теореме Иосиды — Хьюитта, сформулированной во введении, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует фундамент Φ_n в X, такой что $f_n \mid \Phi_n = 0$; положим $\Phi = \bigcap_{n=1}^\infty \Phi_n$. Тогда, используя теорему о диагональной последовательности, легко показать, что Φ есть тоже фундамент в X. Пусть $E = \{f \in X^* : f \mid \Phi = 0\}$. Очевидно, что $D \subset E \subset X^*_{\mathrm{ant}}$ и E $\sigma(X^*, X)$-замкнуто в X^*. Отсюда $\overline{D} \subset E \subset X^*_{\mathrm{ant}}$.

§ 2. Один пример анормального функционала. Всюду в этом параграфе $X = M(t^\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ — пространство Марцинкевича на отрезке $[0, 1]$, состоящее из (классов эквивалентности) измеримых функций x, для которых конечна норма

$$\|x\| = \sup_{0<h\leqslant 1} \frac{1}{h^\alpha}\int_0^h x^*(t)\,dt,$$

где x^* — перестановка функции $|x|$ в убывающем порядке.

В [8] показано, что любой антинормальный функционал f на X локализован, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует измеримое $E \subset [0, 1]$ такое, что $\mu(E) < \varepsilon$ и $f(x\chi_E) = f(x)$, $\forall x \in X$. Мы покажем, однако, что существует $\varphi \in X^*_{\mathrm{ant}}$, который не локализуется ни в какой точке $t \in [0, 1]$.

Для произвольного $\varphi \in X^*$ и $t \in [0, 1]$ полагаем [1])

$$\varphi_t(x) = \lim_{\substack{\alpha,\beta\to 0\\ \alpha,\beta>0}} \varphi(x\chi_{(t-\alpha;\, t+\beta)}), \quad x \in X.$$

Ясно, что $\varphi_t \in X^*$, $|\varphi_t| \leqslant |\varphi|$ и $|\varphi_{t_1}| \wedge |\varphi_{t_2}| = 0$ при $t_1 \neq t_2$.

Мы построим ненулевой $\varphi \in X^*_{\mathrm{ant}}$, для которого $\varphi_t = 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Построение разобьем на ряд этапов.

1) Построим множества $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ на $[0, 1]$ так же, как строится канторово множество. Именно, $E_1 = [0, 1] \setminus (1/3, 2/3)$ и E_{n+1} получается из E_n выбрасыванием средней трети каждого из промежутков, составляющих E_n. Тогда $\mu E_n = (2/3)^n$, где μ — мера Лебега на $[0, 1]$.

2) Поскольку расстояние между соседними кусками множества E_n не меньше чем $1/3^n$ и этих кусков 2^n штук, то отсюда вытекает следующее: пусть $t \in [0, 1]$, $0 < \varepsilon < 1/(2\cdot 3^n)$, $n \leqslant m$, тогда $\mu((t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap E_m) \leqslant 2^{-n}\mu E_m$.

3) Пусть $u(t) = t^{\alpha-1}$. Ясно, что $u \in X_+$ и для $\forall n$ имеем

$$\{t \in [0, 1]: u(t) \geqslant (2/3)^{n(\alpha-1)}\} = [0, (2/3)^n].$$

Поэтому в X_+ существует функция v, равноизмеримая с u, и такая, что для $\forall n$

$$\{t \in [0, 1] : v(t) \geqslant (2/3)^{n(\alpha-1)}\} = E_n.$$

Отсюда

$$\int_{E_n} v(t)\,dt = \int_0^{(2/3)^n} v^*(t)\,dt = \int_0^{(2/3)^n} u(t)\,dt = 1/\alpha\,(2/3)^{n\alpha}. \quad (3)$$

4) Построим оператор $T: X \to l^\infty$ по формуле

$$Tx = \left\{\frac{1}{(\mu E_n)^\alpha}\int_{E_n} x(t)\,dt\right\}_{n=1}^\infty \quad (x \in X).$$

В силу (3) $Tv = \{1/\alpha, 1/\alpha, \ldots, 1/\alpha, \ldots\}$.

5) Фиксируем какой-нибудь обобщенный предел Банаха $\mathrm{Lim} \in (l^\infty)^*_+$ и положим

$$\varphi(x) = \mathrm{Lim}\, T(x) \quad (x \in X).$$

[1]) Для $t = 0$ или 1 требуется естественная модификация этого определения.

Ясно, что $\varphi \in X^*_{\text{ant}}$ и $\varphi \neq 0$, ибо $\varphi(v) = 1/\alpha$.

6) Фиксируем любое $t \in [0, 1]$ и покажем, что $\varphi_t = 0$. Для $\forall n$ обозначим для краткости

$$\Delta_n = (t - 1/(2\cdot 3^n),\ t + 1/(2\cdot 3^n)).$$

Пусть x — произвольный элемент из X_+ и $\|x\| \leqslant 1$. В силу 2) имеем $\forall m \geqslant n$

$$\frac{1}{(\mu E_m)^\alpha}\int_{E_m} x\chi_{\Delta_m}\,dt \leqslant \frac{1}{(\mu E_m)^\alpha}\int_0^{\mu(E_m\cap\Delta_n)} x^*(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\mu E_m)^\alpha}[\mu(E_m\cap\Delta_n)]^\alpha \leqslant \frac{1}{2^{n\alpha}}.$$

Следовательно, $\varphi_t(x) \leqslant \varphi(x\chi_{\Delta_n}) \leqslant 1/2^{n\alpha}\quad \forall n$. Отсюда $\varphi_t(x) = 0$.

Поступило
21.XI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., «Наука», 1961.

[2] Вулих Б. З., Лозановский Г. Я., О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах, Матем. сб., 84, № 3 (1971), 331—352.

[3] Luxemburg W. A. J., Notes on Banach function spaces, XV, Nederl. Acad. Wetensch. Proc., A68, 1965, 415—429.

[4] Лозановский Г. Я., О банаховых структурах с единицей, Изв. вузов, Математика, № 1 (1970), 65—69.

[5] Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C., Notes on Banach function spaces, VI, Nederl. Acad. Wetensch. Proc., A66, 1963, 655—668.

[6] Абрамович Ю. А., О слабых замыканиях линейных подструктур в полуупорядоченных пространствах, Теор. функций, функц. анализ и их прилож., 19 (1972), 81—89.

[7] Лозановский Г. Я., Меклер А. А., Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах, Изв. вузов, Математика, № 11 (1967), 47—53.

[8] Лозановский Г. Я., О локализованных функционалах в векторных структурах, Теор. функций, функц. анализ и их прилож., 19 (1974), 66—80.

Краевые задачи
Спектральной
теории

Издательство
Ленинградского
университета
1979.

сколь угодно малым за счет выбора ε, а затем λ_0 $(|\lambda| \geq \lambda_0)$. Осталось применить следствие к лемме 4, чем и завершается доказательство.

Лемма 8. Оператор $S_\lambda = (\mathcal{A}^p - \lambda)^{-1}$ – ядерный и

$$\operatorname{Sp} S_\lambda = t^{-1+n/(m-2r)p} \int_\Omega w(x)\,dx + o\left(t^{-1+n/(m-2r)p}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $G_t(x,y)$ – ядро оператора S_λ. Рассмотрим оператор Q с ядром $\psi(x) G_t(x,y) \psi(y)$. Имеет место следующее равенство: $Q - \psi(\mathcal{A}^p - \lambda)^{-1}\psi = \psi(\mathcal{A}^p - \lambda)^{-1} K$, где K – компактный в H_B оператор. По замечанию 2 к теореме 1 получаем, что $\operatorname{Sp} Q - \operatorname{Sp} \psi S_\lambda \psi = o\left(t^{-1+n/(m-2r)p}\right)$. Формула (13) получается применением теоремы 1 и замечания 1 к ней.

Доказательство теоремы 2 завершается *использованием следующей* тауберовой теоремы (см. [5]).

Теорема 9. Пусть $0 < a < 1$ и при $t \to \infty$

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j - it} = (c_1 + i c_2) t^{-1+a} + o\left(t^{-1+a}\right), \quad c_1, c_2 \in R,$$

где λ_j – вещественные числа, тогда

$$N_\pm(t) = (\pi a)^{-1} \left[c_2 \sin {}^1\!/_2 \pi a \pm c_1 \cos {}^1\!/_2 \pi a\right] t^a + o(t^a).$$

(Подробнее см. [5]).

Указатель литературы

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. I. – Труды Моск. мат. о-ва, 1972, № 27, с. 3-52.
2. Browder F.E. The asymptotic distribution of eigenfunctions and eigenvalues for semi-elliptic differential operators. – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1957, vol.43, N 3, p.270-273.

3. Левитан Б.М. Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения. – Успехи мат. наук, 1971, т. 26, № 6, с. 151-212.
4. Кожевников А.Н. Об асимптотике собственных значений эллиптических систем. – Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, № 4, с. 82-83.
5. *Agmon S.* On Kernels eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems. – Comm. Pure and Appl. Math., *1965*, vol.18, N 4, p.627-663.
6. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М., 1971. 372 с.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. 740 с.
8. Maruo K., Tanabe H. On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms. – Osaka J. Math., 1971, vol.8, N 3, p.323-345.
9. Сили Р.Т. Степени эллиптического оператора. – Математика. Периодический сборник *переводов* иностранных статей, 1968, т. 12, № 1, с. 96-112.

Статья поступила в редакцию 17 февраля 1978 г.

УДК 513.88

Г.Я.Лозановский

О КОМПЛЕКСНОМ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Основная цель работы – дать подробные доказательства результатов, анонсированных в одноименной заметке автора [1], о сведении *в случае банаховых* решеток комплексного метода интерполяции Кальдерона к вещественной конструкции Кальдерона.

§ 1. Обозначения

Если E – нормированное пространство, то $B(E)=\{x\in E:\|x\|\le 1\}$ – его единичный шар. $\Pi=\{z:0<\mathrm{Re}\,z<1\}$, $\overline{\Pi}=\{z:0\le\mathrm{Re}\,z\le 1\}$ – полосы в комплексной плоскости. (T,Σ,μ) – пространство с вполне σ-конечной мерой, $S=S(T,\Sigma,\mu)$ – пространство всех комплексных измеримых функций на (T,Σ,μ) (эквивалентные функции и множества отождествляются).

Идеалом в S называется всякое линейное подмножество X такое, что если $x\in X$, $y\in S$, $|y|\le|x|$, то $y\in X$. Банаховым идеальным пространством (БИП) на (T,Σ,μ) называется банахово пространство X, являющееся идеалом в S и такое, что если $x,y\in X$, $|y|\le|x|$, то $\|y\|\le\|x\|$.

Запись $x_n\uparrow(x_n\uparrow x)$, где $0\le x_n$, $x\in S$ $(n=1,2,\dots)$, имеет общепринятый в теории векторных решеток смысл. Последовательность $0\le x_n\in S$ $(n=1,2,\dots)$ называется возрастающей вбок (обозначение: $x_n\uparrow\!\!\!\_$), если $x_n\uparrow$ и $(x_{n+1}-x_n)\wedge x_n=0$ для каждого n. Запись $x_n\uparrow\!\!\!\_\, x$, где $x\in S$ означает, что $x_n\uparrow\!\!\!\_$ и $x_n\uparrow x$.

Норма в БИП X называется полунепрерывной, если из $0\le x_n\uparrow x\in X$ следует, что $\sup\|x_n\|=\|x\|$. Норма в БИП называется монотонно полной, если из $0\le x_n\uparrow$, $x_n\in X$ $(n=1,2,\dots)$, $\sup\|x_n\|<+\infty$ следует, что $\sup x_n\in X$.

Если X – БИП, то дуальным пространством к X называется множество X' всех $x'\in S$ таких, что

$$\|x'\|_{X'}=\sup\left\{\int_T|x\cdot x'|\,d\mu:\ x\in B(X)\right\}<+\infty .$$

Пространство X' с введенной в нем нормой является БИП, причем норма в X' полунепрерывна и монотонно полна.

Хорошо известно, что *если норма в БИП X полунепрерывна, то X есть замкнутое подпространство* (в смысле теории нормированных пространств) *во втором дуальном пространстве X''. Если к тому же норма в X и монотонно полна, то X совпадает с X'' по составу элементов и по норме.*

Всюду далее X_0, X_1 суть произвольные БИП на (T,Σ,μ); s – фиксированное число такое, что $0<s<1$. Дополнительные

ограничения на X_0 и X_1 будут каждый раз особо оговариваться.

§ 2. Комплексный метод интерполяции

В работе [2] А.Кальдероном предложены следующие два комплексных метода интерполяции банаховых пространств (см. также [3], гл. III, § 4).

Пусть E_0, E_1 – комплексные банаховы пространства, непрерывно вложенные в некоторое комплексное хаусдорфово топологическое векторное пространство.

Напомним, что $E_0\cap E_1$ и $E_0+E_1=\{x_0+x_1:\ x_0\in E_0,\ x_1\in E_1\}$ являются банаховыми пространствами, если на них ввести, соответственно, нормы

$$\|x\|=\max\left(\|x\|_{E_0},\ \|x\|_{E_1}\right),$$

$$\|x\|=\inf\left\{\|x_0\|_{E_0}+\|x_1\|_{E_1}:x_0\in E_0,\ x_1\in E,\ x_0+x_1=x\right\}.$$

Через $\mathcal{F}=\mathcal{F}(E_0,E_1)$ обозначается множество всех функций $f(z)$ $(z\in\overline{\Pi})$ со значениями в E_0+E_1, аналитических в Π, непрерывных и ограниченных в $\overline{\Pi}$ относительно нормы в E_0+E_1 и таких, что для $j=0,1$ функция $f(j+i\eta)$ $(-\infty<\eta<+\infty)$ принимает значения из E_j и ограничена относительно нормы в E_j. Для $f\in\mathcal{F}$ полагают

$$\|f\|_{\mathcal{F}}=\max_{j=0,1}\left\{\sup_{-\infty<\eta<+\infty}\|f(j+i\eta)\|_{E_j}\right\}.$$

Определение 2.1. Через $E_s=[E_0,E_1]_s$ обозначается множество всех $x\in E_0+E_1$ таких, что $x=f(s)$ для некоторой $f\in\mathcal{F}$. Для $x\in E_s$ полагают

$$\|x\|_{E_s}=\inf\left\{\|f\|_{\mathcal{F}}:f\in\mathcal{F},\quad f(s)=x\right\}.$$

Через $\overline{\mathcal{F}}=\overline{\mathcal{F}}(E_0,E_1)$ обозначается множество всех функций $f(z)$ $(z\in\overline{\Pi})$ со значениями в E_0+E_1, аналитических в Π,

6.

непрерывных в $\overline{\Pi}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f(z)\|_{E_0+E_1} \leq c_f(1+|z|), \qquad z\in\overline{\Pi},$$

и такая, что для $j=0,1$ разность $f(j+i\eta_2)-f(j+i\eta_1)\in E_j$ при $-\infty<\eta_1<\eta_2<+\infty$, причем

$$\|f\|_{\overline{\mathcal{F}}} = \max_{j=0,1}\left\{\sup_{-\infty<\eta_1<\eta_2<+\infty}\left\|\frac{f(j+i\eta_2)-f(j+i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\right\|_{E_j}\right\}<+\infty$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Через $E^s=[E_0,E_1]^s$ обозначается множество всех $x\in E_0+E_1$ таких, что $x=f'(s)$ для некоторой $f\in\overline{\mathcal{F}}$. Для $x\in E^s$ полагают

$$\|x\|_{E^s}=\inf\left\{\|f\|_{\overline{\mathcal{F}}} : f\in\overline{\mathcal{F}}, \quad f'(s)=x\right\}.$$

Пространства E_s, E^s являются банаховыми пространствами, причем $E_0\cap E_1\subset E_s\subset E^s\subset E_0+E_1$ и нормы всех операторов вложения не превосходят единицы. Кроме того, пространства E_s и E^s являются интерполяционными между E_0 и E_1 пространствами с нормальным типом s; эти и другие свойства можно найти в [2, 8].

§ 3. Вещественные конструкции

Напомним, что X_0, X_1 суть произвольные БИП на (T,Σ,μ).

О п р е д е л е н и е 3.1. Через $X(s)=X_0^{1-s}X_1^s$ обозначается множество всех $x\in S$ таких, что

$$|x|\leq\lambda|x_0|^{1-s}|x_1|^s$$

для некоторого числа $\lambda\geq 0$ и некоторых $x_j\in B(X_j)$ $(j=0,1)$. Для $x\in X(s)$ через $\|x\|_{X(s)}$ обозначается инфимум всех возможных чисел λ в предыдущем неравенстве.

Эта конструкция введена в [2] и изучалась также в [4–6]. *В [2] показано, что $X(s)$ является БИП на (T,Σ,μ), причем*

$X_s\subset X(s)\subset X^s$ *и нормы всех операторов вложения не превосходят* единицы; однако, вообще говоря, эти три пространства различны, даже если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны.

Пространство $X(s)$ *в отличие от пространств* X_s *и* X^s, вообще говоря, не является интерполяционным между X_0 и X_1; соответствующий пример приведен в работе автора [7]. Однако *конструкция построения* $X(s)$, по существу вещественная, проще и нагляднее комплексных методов; исходя из конкретных X_0 и X_1, весьма легко построить пространство $X(s)$. Поэтому, на наш взгляд, представляет интерес вопрос о сведении комплексных методов Кальдерона к конструкции $X(s)$ в случае БИП.

Приведем ряд известных результатов о пространстве $X(s)$.

Теорема 3.1 ([4]). *Имеет место равенство по составу элементов и по норме*

$$\left(X_0^{1-s}X_1^s\right)'=\left(X_0'\right)^{1-s}\left(X_1'\right)^s.$$

Предложение 3.1 ([8]). Пусть Y_j – замкнутое подпространство и идеал в X_j $(j=0,1)$. Тогда $Y(s)$ есть замкнутое подпространство и идеал в $X(s)$.

Предложение 3.2 ([9]). Пусть Y – замкнутое подпространство и идеал в $X(s)$. Тогда существуют Y_j – замкнутое подпространство и идеал в X_j $(j=0,1)$ такие, что $Y=Y(s)$ по составу элементов и по норме.

О п р е д е л е н и е 3.2. Через $X_{(s)}=(X_0,X_1)_s$ обозначается замыкание по норме множества $X_0\cap X_1$ в пространстве $X(s)$. Норма в $X_{(s)}$ индуцируется из $X(s)$.

О п р е д е л е н и е 3.3. Через $X^{(s)}=(X_0,X_1)^s$ обозначается нормированное пространство, *единичный шар которого* есть замыкание шара $B(X(s))$ в X_0+X_1.

Пространства $X_{(s)}$, $X^{(s)}$ с введенными в них нормами являются БИП на (T,Σ,μ), причем $X_0\cap X_1\subset X_{(s)}\subset X(s)\subset X^{(s)}\subset X_0+X_1$ и нормы всех операторов вложения не превосходят единицы. Кроме того, в [10, 11] показано, что $X_{(s)}$ есть [illegible] ство в $X^{(s)}$, и что $X_{(s)}$, $X^{(s)}$ являются [illegible] между X_0 и X_1 пространствами с нормальным [illegible]

В работе [10] осуществлено сведение [illegible] метода Кальдерона к вещественной конструкции [illegible] следующая теорема.

Теорема 3.2. Имеет место равенство по [illegible] и по норме

$$X_s = X_{(s)}.$$

Таким образом, пространство X_s есть [illegible] подпространство в $X(s)$, получающееся замыканием [illegible] множества $X_0 \cap X_1$ в $X(s)$.

Нашей целью является подобное же сведение [illegible] комплексного метода Кальдерона.

В работе [2] показано, что если шар $B(X(s))$ [illegible] X_0+X_1, то $X^s = X(s)$ и, следовательно, $X^s = X^{(s)}$ [illegible] элементов и по норме. Из результатов работы [4] [illegible] если нормы в пространствах X_0 и X_1 полунепрерывны [illegible] тонно полны, то шар $B(X(s))$ замкнут в X_0+X_1 [illegible] чае в силу вышесказанного $X^s = X(s)$ и $X^s = X^{(s)}$ [illegible] по норме.

Следующий результат является основным в [illegible]

Теорема 3.3. Если нормы в пространствах X_0, X_1 [illegible] непрерывны, то справедливо равенство по составу [illegible] по норме

$$X^s = X^{(s)}.$$

Таким образом, если нормы в X_0 и X_1 [illegible] X^s есть пространство, единичный шар которого [illegible] мыканием единичного шара $B(X(s))$ в X_0+X_1.

Нам неизвестно, существенно ли требование [illegible] сти норм для справедливости теоремы; однако [illegible] приложениях оно, как правило, выполняется. [illegible] показано в п. 6, подобная теорема о совпадении [illegible] и $X^{(s)}$ имеет место, если одно из пространств X_0 [illegible]

[illegible] – произвольное БИП на (T, Σ, μ), в [illegible] не полунепрерывна.

[illegible] что пространство X_s есть замкнутое под[illegible] в X^s, и что замыкание шара $B(X_s)$ в X_0+X_1 [illegible] $B(X^s)$. Отсюда и из теоремы 3.3 следует, [illegible] X_0 и X_1 полунепрерывны, то шар $B(X^s)$ есть [illegible] $B(X_s)$ в X_0+X_1.

[illegible] ли в общем случае (когда E_0, E_1 – [illegible] произвольных банаховых пространств) про[illegible] замкнутое подпространство в E^s и шар $B(E^s)$ [illegible] шара $B(E_s)$ в E_0+E_1.

[illegible] работы в основном посвящена доказатель[illegible]

[illegible] Вспомогательные утверждения

[illegible] измеримое множество в T, то через χ_e обо[illegible] характеристическая функция множества e.

[illegible] X и Y – БИП на (T, Σ, μ), причем $X \subset Y$. [illegible] шара $B(X)$ в Y. Тогда, если $0 \le y \in \alpha C$, [illegible] найдется последовательность v_n такая, [illegible] $\|y - v_n\|_Y \to 0$.

[illegible] Так как $\alpha^{-1} y \in C$, то суще[illegible] последовательность $\{x_n\} \subset B(X)$, что $0 \le x_n \uparrow \alpha^{-1} y$ [illegible] $u_n = x_n \wedge y$, $e_n = \{t \in T : u_n(t) = y(t)\}$, [illegible] Тогда, очевидно, имеем $0 \le v_n \uparrow$ и [illegible] $(\alpha^{-1}-1)^{-1}(\alpha^{-1}y - y)\cdot\chi_{T\setminus e_n} \le (\alpha^{-1}-1)^{-1}(\alpha^{-1}y - x_n)$, [illegible]

[illegible] $0 \le x \in X_0+X_1$, $\|x\|_{X_0+X_1} < \varepsilon$. Тогда существ[illegible] $\|y_j\|_{X_j} < 2\varepsilon$ $(j=0,1)$ такие, что $y_0 \wedge y_1 = 0$ и [illegible]

[illegible] По определению нормы в [illegible] $0 \le x_j \in X_j$, $\|x_j\|_{X_j} < \varepsilon$ такие, что $x_0 + x_1 = x$.

Положим $T_0=\{t\in T: x_0(t)\geq x_1(t)\}$, $T_1=\{t\in T: x_0(t)<x_1(t)\}$, $y_0=x\chi_{T_0}$, $y_1=x\chi_{T_1}$. Ясно, что $y_0\wedge y_1=0$ и $y_0+y_1=x$. Остается заметить, что $y_0\leq 2x_0$ и $y_1\leq 2x_1$.

Следующая лемма является основной для доказательства теоремы 3.3. Заметим, что для справедливости этой леммы не нужно требования полунепрерывности норм в пространствах X_0 и X_1.

Лемма 4.8. Пусть $0\leq x\in X_0+X_1$ и существуют последовательности $\{v_k^0\}$ в X_0, $\{v_k^1\}$ в X_1, такие, что

а) $0\leq v_k^j \uparrow$ $(j=0,1)$; $(v_{k+1}^0-v_k^0)\wedge(v_{n+1}^1-v_n^1)=0$ $(k\neq n)$;

б) $\sup_k \|v_k^j\|_{X_j}<1$ $(j=0,1)$;

в) $\|x-(v_k^0)^{1-s}(v_k^1)^s\|_{X_0+X_1}\to 0$.

Тогда $x\in X^s$ и $\|x\|_{X^s}\leq 1$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что носитель x есть все множество T. Пусть $y_1^j=v_1^j$, $y_k^j=v_k^j-v_{k-1}^j$ $(k=2,3,\dots)$. Тогда, очевидно, для каждого $k=1,2,\dots$ имеем $(v_k^0)^{1-s}(v_k^1)^s=\sum_{p=1}^k (y_p^0)^{1-s}(y_p^1)^s$. Так как ряд $\sum_{k=1}^\infty (y_k^0)^{1-s}(y_k^1)^s$ сходится по норме в X_0+X_1, то найдется числовая последовательность $1<r_k\uparrow+\infty$ такая, что ряд $\sum_{k=1}^\infty r_k(y_k^0)^{1-s}(y_k^1)^s$ все еще сходится по норме в X_0+X_1. Положим $w=\sum_{k=1}^\infty r_k(y_k^0)^{1-s}(y_k^1)^s$. В силу леммы 4.2 найдутся $w_0\in X_0$, $w_1\in X_1$ такие, что $w=w_0+w_1$ и $w_0\wedge w_1=0$.

Зафиксируем число $\varepsilon>0$ такое, что

$$\sup_k \|v_k^j+\varepsilon w_j\|_{X_j}<1 \qquad (j=0,1), \tag{4.1}$$

и положим

$$\lambda_k=(\varepsilon r_k)^{1/(1+s)}\wedge(\varepsilon r_k)^{1/(2-s)} \qquad (k=1,2,\dots).$$

Заметим, что $0<\lambda_k\uparrow+\infty$.

Теперь вместо последовательностей $\{y_k^0\}$, $\{y_k^1\}$ построим новые последовательности $\{x_k^0\}\subset X_0$, $\{x_k^1\}\subset X_1$ таким образом, чтобы для всякого $k=1,2,\dots$ выполнялись следующие условия:

1) $(x_k^0)^{1-s}(x_k^1)^s=(y_k^0)^{1-s}(y_k^1)^s$;

2) $x_k^0\vee x_k^1\geq\lambda_k(x_k^0\wedge x_k^1)$.

С этой целью для всякого натурального числа k положим $T_k=\{t\in T: y_k^0(t)\wedge y_k^1(t)>0\}$, $T_k^0=\{t\in T_k: w_0(t)>0\}$, $T_k^1=\{t\in T: w_1(t)>0\}$. Так как носитель x, а следовательно, и носитель w, есть все T, то $\bigcup T_k=T$ и $T_k^0\cap T_k^1=\emptyset$, $T_k^0\cup T_k^1=T_k$ $(k=1,2,\dots)$. Пусть далее

$$T_k^{00}=\{t\in T_k^0: y_k^0(t)\vee y_k^1(t)\geq\lambda_k\, y_k^0(t)\wedge y_k^1(t)\};$$

$$T_k^{10}=\{t\in T_k^1: y_k^0(t)\vee y_k^1(t)\geq\lambda_k\, y_k^0(t)\wedge y_k^1(t)\};$$

$$T_k^{01}=T_k^0\setminus T_k^{00}; \qquad T_k^{11}=T_k^1\setminus T_k^{10}.$$

Положим $x_k^0(t)=x_k^1(t)=0$ при $t\in T\setminus T_k$; $x_k^0(t)=y_k^0(t)$ и $x_k^1(t)=y_k^1(t)$ при $t\in T_k^{00}\cup T_k^{10}$. Осталось определить x_k^0 и x_k^1 на T_k^{01} и T_k^{11}.

Пусть $t\in T_k^{01}$. Положим $x_k^0(t)=y_k^0(t)+\varepsilon w_0(t)$, а $x_k^1(t)$ найдем из условия 1). Тогда, очевидно, $x_k^1(t)\leq y_k^1(t)$.

Имеем далее
$$\frac{x_k^0(t)\vee x_k^1(t)}{x_k^0(t)\wedge x_k^1(t)} \geqslant \frac{x_k^0(t)}{x_k^1(t)} \geqslant \frac{y_k^0(t)+\varepsilon\omega_0(t)}{y_k^1(t)} \geqslant \frac{\varepsilon\omega_0(t)}{y_k^1(t)} =$$
$$= \varepsilon r_k \left(\frac{y_k^0(t)}{y_k^1(t)}\right)^{1-s} \geqslant \varepsilon r_k \left(\frac{y_k^0(t)\wedge y_k^1(t)}{y_k^0(t)\vee y_k^1(t)}\right)^{1-s} \geqslant \varepsilon r_k\, \frac{1}{\lambda_k^{1-s}} \geqslant \lambda_k .$$

Пусть теперь $t\in T_k^{11}$. Положим $x_k^1(t)=y_k^1(t)+\varepsilon\omega_1(t)$, а $x_k^0(t)$ найдем из условия 1). Аналогично доказывается, что для $t\in T_k^{1}$ выполняется условие 2). Пусть $u_k^j=\sum_{p=1}^{k} x_p^j$. Тогда в силу (4.1) для $j=0,1$ и $k=1,2,\dots$ имеем
$$u_k^j\in B(X_j).$$
Заметим также, что $x=\sup_k (x_k^0)^{1-s}(x_k^1)^s$. Положим для $j=0,1$
$$u^j=\sup_k x_k^j .$$

Пусть далее
$$f(z)=\int_{1/2}^{z} (u^0)^{1-z}(u^1)^z\,dz, \qquad z\in\overline{\Pi};$$
$$g_k(z)=\int_{1/2}^{z} (x_k^0)^{1-z}(x_k^1)^z\,dz, \qquad z\in\overline{\Pi},\ k=1,2,\dots$$
Непосредственно можно показать, что $g_k(z)\in X_0+X_1$ для $z\in\overline{\Pi}$, g_k непрерывна в $\overline{\Pi}$ и аналитична в Π (как X_0+X_1 - значная функция).

Зафиксируем натуральное число N такое, что $\lambda_k>1$ при $k\geqslant N$ и пусть натуральные числа m, k, n таковы, что $N\leqslant m<k<n$. Тогда для $z\in\overline{\Pi}$ имеем
$$g_k(z)(t)=\begin{cases} \dfrac{\left(x_k^0(t)\right)^{1-z}\left(x_k^1(t)\right)^z-\left(x_k^0(t)\right)^{1/2}\left(x_k^1(t)\right)^{1/2}}{\ln\dfrac{x_k^1(t)}{x_k^0(t)}}, & t\in T_k, \\ 0, & t\in T\setminus T_k . \end{cases}$$

Отсюда получаем
$$|g_k(z)|\leqslant \frac{2(x_k^0+x_k^1)}{\ln\lambda_m},$$
так как $\left|(x_k^0(t))^{1-z}(x_k^1(t))^z\right|\leqslant x_k^0(t)+x_k^1(t)$ и
$$\left|\ln\frac{x_k^1(t)}{x_k^0(t)}\right| = \ln\frac{x_k^1(t)\vee x_k^0(t)}{x_k^1(t)\wedge x_k^0(t)} \geqslant \ln\lambda_k \geqslant \ln\lambda_m .$$
В силу этого для любых m, n таких, что $N\leqslant m<n$, имеем
$$\left|\sum_{k=m}^{n-1} g_k(z)\right| \leqslant \frac{2(u_n^0+u_n^1)}{\ln\lambda_m},$$
откуда
$$\left\|\sum_{k=m}^{n-1} g_k(z)\right\|_{X_0+X_1} \leqslant \frac{4}{\ln\lambda_m} \to 0.$$
Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ сходится (по норме в X_0+X_1) равномерно по $z\in\overline{\Pi}$.

Так как при фиксированном $z\in\overline{\Pi}$ для всякого $k=1,2,\dots$ имеем $f(z)\cdot\chi_{T_k}=g_k(z)=\left(\sum_{p=1}^{\infty} g_p(z)\right)\cdot\chi_{T_k}$, то
$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z). \tag{4.2}$$

Таким образом, функция f принимает значения в X_0+X_1, непрерывна в $\overline{\Pi}$ и аналитична в Π. Далее, для всякого натурального n имеем
$$\left|\sum_{p=1}^{n} g_p(z)\right| = \left|\int_{1/2}^{z} (u_n^0)^{1-z}(u_n^1)^z\,dz\right| \leqslant (u_n^0+u_n^1)(|z|+1/2)$$
и, следовательно, $\left\|\sum_{p=1}^{n} g_p(z)\right\|_{X_0+X_1}\leqslant 2(|z|+1)$, откуда
$$\|f(z)\|_{X_0+X_1} \leqslant 2(|z|+1).$$

Пусть $N\le m<n,\ -\infty<\eta_1<\eta_2<+\infty$. Как и ранее, можно показать, что

$$\left\|\sum_{k=m}^{n-1}\frac{g_k(i\eta_2)-g_k(i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\right\|_{X_0}\le\frac{2}{(\eta_2-\eta_1)\ln\lambda_m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.$$

Отсюда следует в силу (4.2), что

$$\frac{f(i\eta_2)-f(i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\in X_0$$

и

$$\left\|\frac{f(i\eta_2)-f(i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\right\|_{X_0}=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k(i\eta_2)-g_k(i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\right\|_{X_0}.$$

Но для $t\in T_k$ имеем

$$\left|g_k(i\eta_2)-g_k(i\eta_1)\right|\le\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left|(x_k^0(t))^{1-i\eta}(x_k^1(t))^{i\eta}\right|d\eta=\int_{\eta_1}^{\eta_2}x_k^0(t)\,d\eta=x_k^0(t)\cdot(\eta_2-\eta_1).$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{f(i\eta_2)-f(i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\right\|_{X_0}\le\lim\|u_n^0\|_{X_0}\le 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{f(1+i\eta_2)-f(1+i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\in X_1$$

и

$$\left\|\frac{f(1+i\eta_2)-f(1+i\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}\right\|_{X_1}\le 1.$$

Таким образом, доказано, что функция $f\in\overline{\mathcal{F}}(X_0,X_1)$ и $\|f\|_{\overline{\mathcal{F}}}\le 1$. Следовательно, $f'(s)\in X^s$ и $\|f'(s)\|_{X^s}\le 1$. Но в силу равномерной сходимости ряда (4.2) имеем $f'(s)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k'(s)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^0)^{1-s}(x_k^1)^s=x$. Лемма 4.3 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3.8

Пусть нормы в пространствах X_0 и X_1 полунепрерывны. Как уже говорилось выше, в этом случае X_j является замкнутым подпространством в X_j'', т.е. $\|x\|_{X_j}=\|x\|_{X_j''}$ для всякого $x\in X_j$ $(j=0,1)$. Поэтому $B(X_0^{1-s}X_1^s)\subset B((X_0'')^{1-s}(X_1'')^s)$.

Пусть $0\le x\in X^{(s)}$ и $\|x\|_{X^{(s)}}<1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $x\in X^s$ и $\|x\|_{X^s}\le 1$.

Очевидно, можно считать, что носитель x есть все множество T. В силу теоремы 3.1 имеем $B(X_0^{1-s}X_1^s)\subset B((X_0'')^{1-s}(X_1'')^s)=B((X_0^{1-s}X_1^s)'')$, а так как норма в пространстве $(X_0^{1-s}X_1^s)''$ полунепрерывна и монотонно полна, то последний шар замкнут в $X_0''+X_1''$ и, следовательно, имеем

$$B(X^{(s)})\subset B((X_0'')^{1-s}(X_1'')^s).$$

Поэтому найдутся $0\le x_j\in X_j''$, $\|x_j\|_{X_j''}<1$ $(j=0,1)$ такие, что

$$x=x_0^{1-s}x_1^s.$$

Применим лемму 4.1, взяв за X пространство $X(s)$, а за Y — пространство X_0+X_1. В силу этой леммы найдется последовательность $\{v_n\}\subset B(X(s))$ такая, что $0\le v_n\uparrow x$ и

$$\|x-v_n\|_{X_0+X_1}\to 0. \tag{5.1}$$

Пусть $z_1=v_1$, $z_k=v_k-v_{k-1}$ $(k=2,3,\dots)$. Для всякого натурального k положим $T_k=\{t\in T: z_k(t)>0\}$ и

$$x_k^j=x_j\cdot\chi_{T_k}\qquad(j=0,1).$$

Тогда, очевидно, T_k $(k=1,2,\dots)$ есть последовательность попарно непересекающихся множеств, причем $\bigcup T_k=T$.

Зафиксируем произвольное натуральное число k. Существуют $h_k^j\in X_j$ $(j=0,1)$ такие, что носители их содержатся в T_k и

$z_k = (h_k^0)^{1-s}(h_k^1)^s$. Возьмем пока произвольное число $A_k > 0$ и положим

$$y_k^0 = \left(x_k^0 \wedge (A_k^s h_k^0)\right) \vee (A_k^{-s} h_k^0), \qquad (5.2)$$

$$y_k^1 = \left(x_k^1 \vee (A_k^{s-1} h_k^1)\right) \wedge (A_k^{1-s} h_k^1). \qquad (5.3)$$

епосредственно легко проверяется, что

$$(y_k^0)^{1-s}(y_k^1)^s = z_k.$$

оложим далее

$$v_k^j = \sum_{p=1}^k y_p^j \qquad (j=0,1) \qquad (5.4)$$

заметим, что

$$v_k^0 \le \sum_{p=1}^k x_p^0 + \sum_{p=1}^k A_p^{-s} h_p^0, \qquad (5.5)$$

$$v_k^1 \le \sum_{p=1}^k x_p^1 + \sum_{p=1}^k A_p^{s-1} h_p^1. \qquad (5.6)$$

тсюда следует, что

$$\|v_k^0\|_{X_0} = \|v_k^0\|_{X_0''} \le \|x_0\|_{X_0''} + \sum_{p=1}^k A_p^{-s}\|h_p^0\|_{X_0''}, \qquad (5.7)$$

$$\|v_k^1\|_{X_1} = \|v_k^1\|_{X_1''} \le \|x_1\|_{X_1''} + \sum_{p=1}^k A_p^{s-1}\|h_p^1\|_{X_1''}. \qquad (5.8)$$

Подберем числа A_k $(k=1,2,\dots)$ так, чтобы $A_k \uparrow +\infty$ и

$$\sup_k \|v_k^j\|_{X_j} < 1 \qquad (j=0,1). \qquad (5.9)$$

то возможно в силу неравенств (5.7), (5.8) и того, что $\|x_j\|_{X_j''} < 1$ $(j=0,1)$.

Покажем, что выполнены все условия леммы 4.3. Действительно, условия а) и б) очевидно выполняются; условие в) следует из (5.1) и того, что для $k=1,2,\dots$

$$(v_k^0)^{1-s}(v_k^1)^s = \sum_{p=1}^k (y_p^0)^{1-s}(y_p^1)^s = \sum_{p=1}^k z_k = v_k.$$

Остается воспользоваться леммой 4.3.

Теорема 3.3 доказана.

§ 6. Один частный случай

Пусть $X_0 = L^\infty(T,\Sigma,\mu)$ с обычной нормой, а X_1 – произвольное БИП на (T,Σ,μ) без каких бы то ни было дополнительтельных ограничений (подчеркнем, что норма в пространстве X_1, вообще говоря, не полунепрерывна).

Теорема 6.1. Справедливо равенство

$$X^s = X^{(s)}$$

по составу элементов и по норме.

Доказательство. Пусть $0 \le x \in X^{(s)}$ и $\|x\|_{X^{(s)}} < 1$. Достаточно показать, что $x \in X^s$ и $\|x\|_{X^s} < 1$.

Фиксируем число γ такое, что

$$\|x\|_{X^{(s)}} < \gamma < 1.$$

Применим лемму 4.1, взяв за X пространство $X(s)$, а за Y – пространство $X_0 + X_1$. В силу этой леммы найдется последовательность $v_n \in B(X(s))$ такая, что $0 \le v_n \uparrow \gamma^{-1}x$ и

$$\|\gamma^{-1}x - v_n\|_{X_0+X_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для всякого натурального числа k положим

$$v_k^0 = \gamma\chi_T, \qquad v_k^1 = \gamma(v_k)^{1/s}$$

и проверим, что выполнены все условия леммы 4.3. Фактически нужно проверить только выполнение условия в). Имеем $(v_k^0)^{1-s}(v_k^1)^s = \gamma v_k$ для всякого натурального k и, следовательно, $\|x - (v_k^0)^{1-s}(v_k^1)^s\|_{X_0+X_1} = \gamma\|\gamma^{-1}x - v_k\|_{X_0+X_1} \to 0$. Остается воспользоваться леммой 4.3.

§ 7. Один контрпример

Если X_0 и X_1 – БИП на (T,Σ,μ), то, как уже говорилось выше (см. § 3), $X_s \subset X(s) \subset X^s$, причем X_s есть замкнутое подпространство как в $X(s)$, так и в X^s. Однако, как показывает следующий пример, сужение нормы $\|\cdot\|_{X^s}$ на пространство $X(s)$, вообще говоря, отлично от $\|\cdot\|_{X^s}$.

Пусть ω – пространство всех числовых последовательностей. Пусть $X_0 = l^\infty$ – пространство всех $x=\{r_k\} \in \omega$ таких, что

$$\|x\|_{X_0} = \sup_k |r_k| < +\infty .$$

Пусть X_1 – пространство всех $x=\{r_k\}\in\omega$ таких, что

$$\|x\|_{X_1} = \sup_k \frac{|r_k|}{k} + A\,\overline{\lim}\,\frac{|r_k|}{k} < +\infty,$$

где $A>0$ – некоторое фиксированное число.

Тогда нетрудно проверить, что $X(s)$ есть пространство всех $x=\{r_k\}\in\omega$ таких, что

$$\|x\|_{X(s)} = \left\{ \sup_k \frac{|r_k|^{1/s}}{k} + A\,\overline{\lim}\,\frac{|r_k|^{1/s}}{k} \right\}^s < +\infty .$$

В силу теоремы 6.I $X^s = X^{(s)}$ и состоит из всех $x=\{r_k\}\in\omega$ таких, что

$$\|x\|_{X^{(s)}} = \sup_k \frac{|r_k|}{k^s} < +\infty .$$

Следовательно, сужение нормы пространства X^s на $X(s)$ не совпадает с нормой пространства $X(s)$.

Замечание. Пусть $Y_0 = (X_0 \oplus X_0 \oplus \ldots \oplus X_0 \oplus \ldots)_{l^\infty}$, т.е. если $y \in Y_0$, то $y=\{r_{n,k}\}$ и

$$\|y\|_{Y_0} = \sup_n \{\sup_k |r_{n,k}|\} < +\infty .$$

Пусть $Y_1 = (X_1^{(1)} \oplus X_1^{(2)} \oplus \ldots \oplus X_1^{(n)} \oplus \ldots)_{l^\infty}$, где $X_1^{(n)}$ есть X_1 при $A=n$ $(n=1,2,\ldots)$, т.е. если $y\in Y_1$, то $y=\{r_{n,k}\}$ и

$$\|y\|_{Y_1} = \sup_n \left\{ \sup_k \frac{|r_{n,k}|}{k} + n \,\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{|r_{n,k}|}{k} \right\} < +\infty .$$

Тогда аналогичным образом можно доказать, что $Y(s)$ не является замкнутым множеством в Y^s и, следовательно, сужение нормы пространства Y^s на $Y(s)$ не эквивалентно норме пространства $Y(s)$.

Указатель литературы

1. Лозановский Г.Я. О комплексном методе интерполяции в банаховых решетках измеримых функций. – Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 1, с. 55-57.
2. Calderon A.P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. – Studia Math., 1964, vol. 24, N 2, p.113-190.
3. Функциональный анализ (СМБ) / Под ред. С.Г.Крейна. М., 1972. 544 с.
4. Лозановский Г.Я. О некоторых банаховых структурах. – Сиб. мат. журн., 1969, т. 10, № 3, с. 584-599.
5. Лозановский Г.Я. О некоторых банаховых структурах III. – Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 6, с.1304-1311.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Шкалы банаховых структур измеримых функций. – Труды Моск. мат. о-ва, 1967, т. 17, с. 293-322.
7. Лозановский Г.Я. Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона. – Функциональный анализ и его приложения, 1972, т. 6, № 4, с. 89-90.
8. Лозановский Г.Я. Банаховы структуры и их преобразования. Автореф. докт. дис., Л., 1972. 22 с.
9. Шестаков В.А. Банаховы решетки и интерполяция линейных операторов. Автореф. канд. дис., Л., 1974. 20 с.
10. Шестаков В.А. О комплексной интерполяции в банаховых пространствах измеримых функций.– Вестн.Ленингр.ун-та, 1974, № 19, с. 64-68.
11. Шестаков В.А. Об интерполяции линейных операторов в пространствах измеримых функций. – Функциональный анализ и его приложения, 1974, т. 8, № 3, с. 91-92.

Поступила в редакцию 17 февраля 1978 г.

ISSN 0135—7182

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАЧЕСТВЕННЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЯРОСЛАВЛЬ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
1978

УДК 513.88

Г. Я. Лозановский

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАНАХОВЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ[x)]

Настоящая статья примыкает к серии работ автора [I-4], в которых изучалась конструкция построения по паре банаховых идеальных пространств X_0, X_1 и вогнутой функции φ двух переменных (удовлетворяющей еще некоторым дополнительным условиям) нового банахова идеального пространства $\varphi(X_0, X_1)$ с нормой $q = q_{\varphi(X_0, X_1)}$.

В [4] было доказано, что дуальное пространство $(\varphi(X_0, X_1))'$ строится по дуальным пространствам X_0', X_1' по тому же принципу, что и исходное пространство $\varphi(X_0, X_1)$. Именно, было показано, что для всякой функции φ существует двойственная вогнутая функция $\hat{\varphi}$ такая, что $(\varphi(X_0, X_1))'$ совпадает (как линейное пространство) с $\hat{\varphi}(X_0', X_1')$. Однако оставался невыясненным вопрос о явном описании дуальной нормы q' к норме q. В настоящей работе этот вопрос получает полное решение. А именно, указывается формула для явного построения еще одной нормы $p' = p_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')}$ на $\hat{\varphi}(X_0', X_1')$, которая и оказывается дуальной к норме q. Кроме того, оказывается, что норма $q' = q_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')}$

---

x) Эта работа после кончины Г.Я. Лозановского подготовлена к печати Ю.А. Абрамовичем, А.В. Бухваловым, и А.А. Меклером.

...ется дуальной к норме $p = p_{\varphi(X_0, X_1)}$.

Поскольку пространствами вида $\varphi(X_0, X_1)$ охватываются, в ...тности, пространства Орлича, то из указанной двойственности ...м "p" и "q" вытекает известная двойственность нормы Люксем...рга и нормы Орлича [5].

Работа состоит из пяти разделов. В первом из них приведе... терминология и обозначения. Во втором собраны некоторые лем... о вогнутых функциях одной и двух вещественных переменных. В ...ретьем формулируется основная теорема и приводится ряд приме...ов, иллюстрирующих конструкцию пространств $\varphi(X_0, X_1)$ для ...некоторых конкретных φ, X_0, X_1. Наконец, в чет...ертом разделе приведен ряд вспомогательных утверждений, а в ...оследнем – пятом разделе дано доказательство основной теоре...

Основные результаты этой работы без доказательства были ...опубликованы в [6].

I. Терминология и обозначения. Пусть (T, Σ, μ) простран...ство с полной мерой. Через $S(\mu) = S(T, \Sigma, \mu)$ обозначается про...странство всех вещественных почти везде конечных измеримых на (T, Σ, μ) функций. (Чтобы избежать некоторых осложнений, свя...занных с произвольностью меры, удобно считать, что функция x ...измерима, если для любого борелевского подмножества e пря...мой и для любого $T_0 \in \Sigma$ с конечной мерой $x^{-1}(e) \cap T_0 \in \Sigma$. ...При этом, как обычно, μ-эквивалентные функции отождествляют...ся). Всюду далее предполагается, что $S(\mu)$ есть K-простран...ство. В частности, это так, если μ есть σ-конечная мера. Ха...рактеристическая функция множества $A \in \Sigma$ обозначается 1_A. ...Носителем элемента $x \in S(\mu)$ называется множество $supp(x) = \{t \in T : |x(t)| > 0\}$.

Идеальным пространством на (T, Σ, μ) называется такое ...векторное подпространство X в $S(\mu)$, что из $x \in X$, $y \in S(\mu)$, $|y| \leq |x|$ следует $y \in X$. Носителем иде...ального пространства X называется наименьшее (с точностью ...до множества нулевой меры) множество $supp(X) \in \Sigma$, для ко...торого $supp(x) \subset supp(X)$ при любом $x \in X$.

Если на идеальном пространстве X задана банахова нор...ма $\|\cdot\|$, удовлетворяющая условию монотонности (из $|x_1| \leq |x_2|$ следует $\|x_1\| \leq \|x_2\|$), то пара $(X, \|\cdot\|)$ называет...

ся банаховым идеальным пространством. Если к тому же X — фундамент в $S(\mu)$, т.е. $\operatorname{supp} X = T$, то $(X, \|\cdot\|)$ называется банаховым фундаментальным пространством (сокращенно БФП) на (T, Σ, μ).

Норма в БФП X называется универсально монотонно полной, если из того, что $\{x_\alpha\} \subset X_+$, $x_\alpha \uparrow$ и $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$ следует, что существует $\sup x_\alpha \in X$. Норма называется универсально непрерывной, если из того, что $\{x_\alpha\} \subset X_+$, $x_\alpha \uparrow x \in X$ следует, что $\sup_\alpha \|x_\alpha\| = \|x\|$.

Пусть X идеальное пространство в $S(\mu)$. Положим

$$X' = \{ x' \in S(\mu) : \operatorname{supp} x' \subset \operatorname{supp} X, \int_T x x' d\mu < \infty \ (x \in X) \}$$

Пространство X' называется дуальным к X пространством. Если $(X, \|\cdot\|)$ — БФП, то на дуальном пространстве X' естественным образом задаётся дуальная норма $\|\cdot\|'$:

$$\|x'\|' = \sup \left\{ \int_T |x x'| \, d\mu : x \in X, \|x\| \le 1 \right\} \quad (x' \in X').$$

Эта норма универсально полна и универсально полунепрерывна.

Через R и R^2 обозначаются, как обычно, вещественные прямая и плоскость соответственно. Все рассматриваемые в работе функции принимают значения в R.

2. О вогнутых функциях. Пусть $\mathfrak{U}$ — множество всех ненулевых неотрицательных непрерывных вогнутых функций на $[0, \infty)$. Очевидно, что для функции $u \in \mathfrak{U}$ имеет место одна из следующих трех возможностей:

а) u строго возрастает на $[0, +\infty)$;

б) u строго возрастает на $[0, c]$ и постоянная на $[c, +\infty)$ для некоторого $c > 0$;

в) u постоянная на $[0, +\infty)$.

Легко видеть, что функции $t^{-1}(u(t) - u(0))$ и $t^{-1}u(t)$ не возрастают на $(0, +\infty)$. Для $u \in \mathfrak{U}$ положим

$$\hat{u}(t) = \inf_{\tau > 0} \frac{t + \tau}{u(\tau)}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Лемма 2.1. Пусть $u \in \mathfrak{U}$. Тогда $\hat{u} \in \mathfrak{U}$ и $\hat{\hat{u}} = u$.

Доказательство. Покажем первое утверждение. При каждом $\tau > 0$ функция $t \to [u(\tau)]^{-1}(t + \tau)$ линейна по t, а значит и вогнута. Поэтому точная нижняя граница этих функций по всем $\tau > 0$ есть вогнутая функция на $[0, +\infty)$. Следовательно, $\hat{u}$ непрерывна на $(0, +\infty)$, причем из вогнутости $\hat{u}$ следует, что $\hat{u}(0) \le \hat{u}(+0)$. Поскольку функция $\tau [u(\tau)]^{-1}$ не убывает, то $\hat{u}(0) = \lim_{\tau \to +0} \tau [u(\tau)]^{-1}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\tau [u(\tau)]^{-1} \le \hat{u}(0) + \varepsilon$ для всякого $\tau \in (0, \delta)$. Отсюда

$$\hat{u}(t) \le (t + \delta)[u(\delta)]^{-1} \le t [u(\delta)]^{-1} + \hat{u}(0) + \varepsilon$$

и, значит, $\overline{\lim}_{t \to +0} \hat{u}(t) \le \hat{u}(0) + \varepsilon$. Тем самым функция $\hat{u}$ непрерывна в нуле и первое утверждение леммы доказано.

Покажем второе утверждение сначала для линейной функции $u(t) = At + B$, где $A, B \ge 0$, $A^2 + B^2 \ne 0$ (для удобства полагаем, что $0^{-1} = +\infty$). Очевидно, что функция

$$[(t + \tau)(A\tau + B)^{-1}]'_\tau = (B - At)(A\tau + B)^{-2}$$

не меняет знак, когда τ пробегает $(0, +\infty)$. Поэтому для любого фиксированного $t > 0$ выполняется одно из равенств

$$\hat{u}(t) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{t + \tau}{A\tau + B}, \quad \hat{u}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{t + \tau}{A\tau + B}.$$

Таким образом, $\hat{u}(t) = \min(A^{-1}, t B^{-1})$.

Если $A = 0$, то $\hat{u}(t) = t B^{-1}$, откуда

$$\hat{\hat{u}}(t) = \inf_{\tau > 0} \frac{t + \tau}{\tau} B = B = u(t).$$

Пусть теперь $A \ne 0$. Если $B = 0$, то $\hat{u}(t) = A^{-1}$, откуда

$$\hat{\hat{u}}(t) = \inf_{\tau > 0} \frac{t + \tau}{1} A = At = u(t).$$

Если же и $B \ne 0$, то

$$\hat u(t) = \begin{cases} tB^{-1}, & \text{если } \ 0 < t \le BA^{-1}, \\ A^{-1}, & \text{если } \ t > BA^{-1}, \end{cases}$$

откуда

$$\hat{\hat u}(t) = \inf_{\tau > 0} \frac{t+\tau}{\hat u(\tau)} = \min \Big\{ \inf_{0<\tau\le BA^{-1}} \frac{t+\tau}{\tau} B, \ \inf_{\tau > BA^{-1}} \frac{(t+\tau)}{1} A \Big\} =$$

$$= \min \{ At + B, At + B \} = u(t).$$

Рассмотрим, наконец, произвольную функцию $u \in \mathfrak{A}$. Очевидно,

$$\hat{\hat u}(t) = \inf_{\tau>0} \frac{t+\tau}{\hat u(\tau)} = \inf_{\tau > 0} \Big[\frac{t+\tau}{\inf\limits_{\gamma>0} \frac{\tau+\gamma}{u(\gamma)}} \Big] =$$

$$= \inf_{\tau>0} \sup_{\gamma>0} \frac{t+\tau}{\tau+\gamma} u(\gamma) \ge \inf_{\tau>0} \frac{t+\tau}{t+\tau} u(t) = u(t).$$

Таким образом, $\hat{\hat u}(t) \ge u(t)$ ($t \in [0, +\infty)$). Обозначим через $G = \{(A,B)\}$ множество всех таких пар (A,B) неотрицательных чисел A и B, что $u(t) \le At + B$ при всех $t \in (0, +\infty)$ и положим $u_{A,B}(t) = At + B$ ($(A,B) \in G$), $0 \le t < \infty$. Ясно, что $u = \inf \{ u_{A,B} : (A,B) \in G \}$. Так как $\hat{\hat u} \le \hat{\hat u}_{A,B} = u_{A,B}$. Следовательно,

$$\hat{\hat u} \le \inf \{ u_{A,B} : (A,B) \in G \} = u.$$

Лемма доказана.

Пусть $u \in \mathfrak{A}$; положим $[\alpha, \beta\rangle = u([0,+\infty))$ (промежуток $[\alpha,\beta\rangle$ может состоять лишь из одной точки). Для $s \in [\alpha,\beta\rangle$ определим функцию $v(s) = \inf \{ t : u(t) \ge s \}$, называемую левой обратной к u. Очевидно, что левая обратная функция непрерывна, конечна и не убывает на $[\alpha,\beta\rangle$. Кроме того, при $s \in [\alpha,\beta\rangle$ справедливо равенство $u(v(s)) = s$, при $t \ge 0$ – неравенство $v(u(t)) \le t$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех ненулевых неотрицательных функций $\varphi(\xi,\eta)$, определенных на первом квадранте

R^2_+ и таких, что каждая φ вогнута, непрерывна по совокупности аргументов и положительно однородна, т.е. $\varphi(\lambda\xi,\lambda\eta) = \lambda\varphi(\xi,\eta)$ для любого $\lambda \ge 0$.

Легко видеть, что всякая функция $\varphi \in \mathfrak{A}$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(\xi,\eta) > 0$ при $\xi,\eta > 0$;
2) $\varphi(\xi,\cdot)$ не убывает на $[0,+\infty)$ для любого ξ;
3) $\varphi(\cdot,\eta)$ не убывает на $[0,+\infty)$ для любого η;
4) $\varphi(\xi_1+\xi_2, \eta_1+\eta_2) \ge \varphi(\xi_1,\eta_1) + \varphi(\xi_2,\eta_2)$ для любых $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \ge 0$.

Ясно, что для $\varphi \in \mathfrak{A}$ функции $\varphi(1,\cdot)$ и $\varphi(\cdot,1)$ являются элементами $\mathfrak{A}$. Определим отображения $j_1 : \varphi \to \varphi(1,\cdot)$, $j_2 : \varphi \to \varphi(\cdot,1)$.

Л е м м а 2.2. Каждое из отображений j_1 и j_2 является биекцией $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$. При этом

$$(j_1^{-1}u)(\xi,\eta) = \xi\, u\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big), \quad (j_2^{-1}u)(\xi,\eta) = \eta\, u\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)$$

при $\xi > 0$, $\eta > 0$, $u \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{A}$. Положим $\psi_1(\xi,\eta) = \xi u(\xi^{-1}\eta)$, $\psi_2(\xi,\eta) = \eta u(\xi\eta^{-1})$ ($\xi,\eta > 0$). Нужно доказать, что ψ_i продолжаются по непрерывности на R^2_+ и что ψ_i ($i = 1,2$) – вогнутые функции. Ограничимся рассмотрением лишь функции ψ_1. Для $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2 > 0$ и $\alpha \in (0,1)$ имеем

$$\psi_1((1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2, (1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2) =$$

$$= [(1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2]\, u\Big(\frac{(1-\alpha)\xi_1}{(1-\alpha)\xi_1+\alpha\xi_2} \cdot \frac{\eta_1}{\xi_1} + \frac{\alpha\xi_2}{(1-\alpha)\xi_1+\alpha\xi_2} \cdot \frac{\eta_2}{\xi_2}\Big) \ge$$

$$\ge (1-\alpha)\xi_1 u\Big(\frac{\eta_1}{\xi_1}\Big) + \alpha\xi_2 u\Big(\frac{\eta_2}{\xi_2}\Big) = (1-\alpha)\psi_1(\xi_1,\eta_1) + \alpha\psi_1(\xi_2,\eta_2).$$

Осталось доказать, что ψ_1 имеет конечные пределы в каждой точке границы R^2_+, причем в точке $(0,0)$ этот предел равен нулю. Так как $u(t) \le At + B$ при некоторых $A, B \ge 0$ для всех $t \ge 0$, то $\xi u(\xi^{-1}\eta) \le A\eta + B\xi$ при

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\begin{cases}0, & \text{если } \xi=0,\\ \xi N^{-1}(\eta\xi^{-1}), & \text{если } \xi\neq 0.\end{cases}$$

Для доказательства покажем сначала, что φ непрерывна на R^2_+. Пусть $(\xi_0,\eta_0)\in R^2_+$. Если $\eta_0>0$, то непрерывность φ в (ξ_0,η_0) очевидна. Пусть $\eta_0=0$; необходимо показать, что $\varphi(\xi,\eta)\to 0$ при $\eta\to 0$. Оценим $\varphi(\xi,\eta)$, воспользовавшись неравенством Юнга (см., например, [5]). Для $\eta>0$ имеем

$$\varphi(\xi,\eta)=\eta M^{-1}(\xi\eta^{-1})=\eta[\lambda\lambda^{-1}M^{-1}(\xi\eta^{-1})]\leq$$

$$\leq\eta[N(\lambda)+M(\lambda^{-1}M^{-1}(\xi\eta^{-1}))].$$

Если $\lambda\geq 1$, то $M(\lambda^{-1}t)\leq\lambda^{-1}M(t)$ и, следовательно,

$$\varphi(\xi,\eta)\leq\eta[N(\lambda)+\lambda^{-1}M(M^{-1}(\xi\eta^{-1}))]=\eta N(\lambda)+\lambda^{-1}\xi.$$

Выбирая достаточно большое λ, а затем устремляя η к нулю, можно сделать $\varphi(\xi,\eta)$ сколь угодно малой.

Для доказательства вогнутости φ теперь достаточно убедиться в том, что

$$\varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)\geq 2^{-1}[\varphi(\xi_1,\eta_1)+\varphi(\xi_2,\eta_2)].$$

при всех $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)\in R^2_+$ таких, что $\eta_1,\eta_2>0$. Используя вогнутость функции $M^{-1}(\xi)$, получим

$$\varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}M^{-1}\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{\eta_1+\eta_2}\right)=$$

$$=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}M^{-1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\frac{\xi_1}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)\geq$$

$$\geq\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\left[\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}M^{-1}(\xi_1\eta_1^{-1})+\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}M^{-1}(\xi_2\eta_2^{-1})\right]=$$

$$=2^{-1}[\varphi(\xi_1,\eta_1)+\varphi(\xi_2,\eta_2)].$$

...о, что φ — ненулевая и положительно однородная функция. ...ому $\varphi\in\mathfrak{U}$.

Положим теперь для $(\xi,\eta)\in R^2_+$

$$\psi(\xi,\eta)=\begin{cases}0, & \text{если } \xi=0,\\ \xi N^{-1}(\eta\xi^{-1}), & \text{если } \xi\neq 0\end{cases}$$

...докажем, что $\psi=\hat{\varphi}$.

Сначала покажем, что

$$\varphi(\alpha,\beta)\psi(\xi,\eta)\leq\alpha\xi+\beta\eta\qquad(\alpha,\beta,\xi,\eta\geq 0).$$

...о очевидно при $\alpha\beta\xi\eta=0$. Если же $\alpha\beta\xi\eta\neq 0$, то в си... неравенства Юнга

$$\varphi(\alpha,\beta)\psi(\xi,\eta)=\beta M^{-1}(\alpha\beta^{-1})\xi N^{-1}(\eta\xi^{-1})\leq$$

$$\leq\beta\xi[M(M^{-1}(\alpha\beta^{-1}))+N(N^{-1}(\xi^{-1}\eta))]=\alpha\xi+\beta\eta.$$

Из доказанного неравенства следует, что

$$\psi(\xi,\eta)\leq\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)}=\hat{\varphi}(\xi,\eta)\qquad((\xi,\eta)\in R^2_+).$$

...кажем, что на самом деле здесь имеет место равенство. Если $\eta=0$, то это тривиально. Пусть $\xi\eta>0$; положим $y=N^{-1}(\eta\xi^{-1})$. Существует [5] число $x>0$, для которого $M(x)=yx-N(x)$. Положим еще $\beta=1$, $\alpha=M(x)$. Так как $\eta=\xi N(y)$, то

$$\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha\xi+\eta}{\varphi(\alpha,1)}=\frac{\xi[yx-N(y)]+\xi N(y)}{M^{-1}(\alpha)}=\frac{yx\xi}{x}=y\xi=\psi(\xi,\eta).$$

...самым, равенство $\hat{\varphi}=\psi$ доказано.

3. Формулировка и обсуждение основного результата. Пусть ..., X_1 идеальные пространства в $S(\mu)$ и пусть $\varphi\in\mathfrak{U}$. ...ез $\varphi(X_0,X_1)$ обозначим множество всех таких $x\in S(\mu)$,

$$|x| \le \varphi(x_0, x_1) \qquad (1)$$

для некоторых $x_i \in (X_i)_+$ ($i=0,1$). Из свойств функции φ легко следует, что $\varphi(X_0,X_1)$ также есть идеальное пространство.

Пусть теперь $(X_0, \|\cdot\|_0)$ и $(X_1, \|\cdot\|_1)$ — два БФП на (T,Σ,μ). Тогда на $\varphi(X_0,X_1)$ можно определить следующие две нормы, положим для $x \in \varphi(X_0,X_1)$

$$p_{\varphi(X_0,X_1)}(x) = p(x) =$$

$$= \inf\{\|x_0\|_0+\|x_1\|_1 : |x|\le\varphi(x_0,x_1),\ x_i\in(X_i)_+\ (i=0,1)\}$$

и

$$q_{\varphi(X_0,X_1)}(x) =$$

$$= \inf\{\lambda : |x| \in \lambda\{\varphi(x_0,x_1);\ x_i\in(X_i)_+,\ \|x_i\|_i\le 1\ (i=0,1)\}\}.$$

Ниже будет показано (см. лемму 3.4), что нормы $p(x) = p_\varphi(X_0,X_1)$ и $q(x)=q_\varphi(X_0,X_1)$ являются эквивалентными банаховыми нормами на $\varphi(X_0,X_1)$. Норму p будем называть первой, а норму q — второй нормами на $\varphi(X_0,X_1)$.

Аналогично, по паре дуальных БФП $(X_0', \|\cdot\|')$, $(X_1', \|\cdot\|')$ и по функции $\hat\varphi$ на пространстве $\varphi(X_0',X_1')$ построим первую и вторую нормы $\hat p = p_{\hat\varphi(X_0',X_1')}$ и $\hat q = q_{\hat\varphi(X_0',X_1')}$.

Теорема 3.1 (основная теорема). Справедливы следующие равенства:

а) $(\varphi(X_0,X_1))' = \hat\varphi(X_0',X_1')$ (линейные пространства $(\varphi(X_0,X_1))'$ и $\hat\varphi(X_0',X_1')$ совпадают);

б) $p' = \hat q$, т.е. норма $\hat q$ дуальна норме p;

в) $q' = \hat p$, т.е. норма $\hat p$ дуальна норме q.

Доказательство этой теоремы будет приведено лишь в п.5 после вспомогательных результатов п.4. Сейчас же представляется полезным сопоставить теорему 3.1 с основными результатами работ автора [2,4], где также изучалась конструкция $\varphi(X_0,X_1)$. А именно, в [2] было показано, что пара функций $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathfrak{U}$ согласована, т.е. для любых двух БФП $(X_i, \|\cdot\|_i)$ ($i=0,1$)

равенства

$$\varphi_1(X_0,X_1)' = \varphi_2(X_0',X_1'), \quad (q_{\varphi_1(X_0,X_1)})' = q_{\varphi_2(X_0',X_1')} \qquad (2)$$

имеют место тогда и только тогда, когда

$$\varphi_1(\xi,\eta) = A\xi^{1-s}\eta^{s}, \quad \varphi_2(\xi,\eta) = A^{-1}\xi^{1-s}\eta^{s}$$

для некоторых $A\in(0,\infty)$ и $s\in(0,1)$. Далее, в [4] была рассмотрена изоморфная постановка вопроса и описаны все слабо согласованные пары (φ_1,φ_2), т.е. пары функций, для которых равенства (2) выполняются лишь по запасу элементов соответствующих пространств.

В оставшейся части пункта приведем ряд примеров, иллюстрирующих теорему 3.1 и докажем упомянутую выше лемму 3.4.

Пример 3.2. а) Пусть X_0 и X_1 — БФП на (T,Σ,μ) и пусть $\varphi(\xi,\eta)=\xi+\eta$ ($\xi,\eta\ge 0$). Тогда $\varphi(X_0,X_1) = X_0+X_1$ и для $x\in X_0+X_1$

$$p(x) = \inf\{\|x_0\|_0+\|x_1\|_1 : |x|\le x_0+x_1,\ x_i\in(X_i)_+\ (i=0,1)\},$$

$$q(x) = \inf\{\lambda\ge 0 : |x|\le\lambda(x_0+x_1),\ x_i\in(X_i)_+,\ \|x_i\|_i\le 1\ (i=0,1)\}.$$

б) Пусть X_0 и X_1 — такие же как в а), $\varphi(\xi,\eta)=\xi\wedge\eta$ ($\xi,\eta\ge 0$). Тогда $\varphi(X_0,X_1)=X_0\cap X_1$ и для $x\in X_0\cap X_1$

$$p(x) = \inf\{\|x_0\|_0+\|x_1\|_1 : |x|\le x_0\wedge x_1,\ x_i\in(X_i)_+ (i=0,1)\} =$$

$$= \|x\|_0 + \|x\|_1,$$

$$q(x) = \inf\{\lambda\ge 0 : |x|\le\lambda(x_0\wedge x_1),\ x_i\in(X_i)_+,\ \|x_i\|_i\le 1\ (i=0,1)\} =$$

$$= \max\{\|x\|_0, \|x\|_1\}.$$

П р и м е р 3.3. Для N-функции $M(u)$ положим

$$\varphi(\xi,\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta = 0, \\ \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}), & \text{если } \eta > 0, \end{cases}$$

где $(\xi,\eta) \in R^2_+$. Пусть (T,Σ,μ) – пространство с конечной мерой, $X_0 = L^1(T,\Sigma,\mu)$, $X_1 = L^\infty(T,\Sigma,\mu)$ с обычными нормами. Ясно, что $\varphi(X_0,X_1)$ – это пространство Орлича, порожденное N-функцией M. Для $x \in \varphi(X_0,X_1)$ имеем

$$p(x) = \inf\{\|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 : |x| \le \varphi(x_0,x_1),\ x_i \in (X_i)_+\ (i=0,1)\} =$$

$$= \inf\{\|x_0\|_0 + \eta : |x| \le \varphi(x_0, \eta 1_T),\ x_0 \in (X_0)_+,\ \eta \in (0,\infty)\} =$$

$$= \inf\{\|x_0\|_{L_1} + \eta : |x| \le \eta M^{-1}\left(\frac{x_0}{\eta \cdot 1_T}\right),\ x_0 \in (X_0)_+,\ \eta \in (0,\infty)\} =$$

$$= \inf\{\|x_0\|_{L_1} + \eta : \eta M\left(\frac{|x|}{\eta}\right) \le x_0,\ x_0 \in (X_0)_+,\ \eta \in (0,\infty)\} =$$

$$= \inf\{\|\eta M\left(\frac{|x|}{\eta}\right)\|_{L_1} + \eta : \eta > 0\} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + \|M(k|x|)\|_{L_1}).$$

Итак, $p(x)$ – норма Орлича в пространстве Орлича, вычисленная по формуле Амемии (см., например, [5]).

Вычислим вторую норму

$$q(x) = \inf\{\lambda \ge 0 : |x| \le \lambda\varphi(x_0,x_1),\ x_i \in (X_i)_+,\ \|x_i\|_i \le 1\ (i=0,1)\} =$$

$$= \inf\{\lambda \ge 0 : |x| \le \lambda\varphi(x_0, 1_T),\ x_0 \in (X_0)_+,\ \|x_0\|_0 \le 1\} =$$

$$= \inf\{\lambda \ge 0 : |x| \le \lambda M^{-1}(x_0),\ x_0 \in (X_0)_+,\ \|x_0\|_0 \le 1\} =$$

$$= \inf\{\lambda \ge 0 : M\left(\frac{|x|}{\lambda}\right) \le x_0,\ x_0 \in (X_0)_+,\ \|x_0\|_0 \le 1\} =$$

$$= \inf\{\lambda \ge 0 : \|M\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)\|_{L_1} \le 1\}.$$

Итак, $q(x)$ – норма Люксембурга в пространстве Орлича (см. снова [5]).

Учитывая теперь, что $\hat{\varphi}(X_0^1, X_1^1) = L_N$ (см. пример 2.6)

приходим к упомянутой во введении двойственности норм Люксембурга и Орлича: первая (соответственно вторая) норма на L_N дуальна ко второй (соответственно первой) норме на L_M.

Л е м м а 3.4. Функционалы q и p являются банаховыми монотонными нормами на $\varphi(X_0,X_1)$, причем $q \le p \le 2q$.

Доказательство. Проверка неравенств $q \le p \le 2q$ и свойств монотонности полунорм q и p тривиальные и потому опускается. Покажем, что p есть норма, в которой пространство $\varphi(X_0,X_1)$ является банаховым.

Пусть $p(x) = 0$ для $x \in \varphi(X_0,X_1)$. Тогда найдутся $x_0^{(n)} \in (X_0)_+$, $x_1^{(n)} \in (X_1)_+$ такие, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $|x| \le \varphi(x_0^{(n)}, x_1^{(n)})$ и обе последовательности $x_0^{(n)}$ и $x_1^{(n)}$ (τ)-сходятся к нулю (см. [7]). Это влечет, что $x = 0$, т.е., что p – норма. Проверим полноту с помощью критерия Абрамовича [8] . Пусть элементы $x^{(n)} \in \varphi(X_0,X_1)$ попарно дизъюнктны, неотрицательны и удовлетворяют условию

$$x^n \ge 0 \quad (n = 1,2,\ldots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} p(x^{(n)}) < \infty.$$

Положим $x = \sup_n x^{(n)}$. Выберем последовательности $x_i^{(n)} \in (X_i)_+$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_i^{(n)}\|_i < \infty \quad (i=0,1), \quad x^{(n)} \le \varphi(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}) \quad (n=1,2,\ldots).$$

При этом без ограничения общности можн считать, что

$$\operatorname{supp} x^{(n)} \supset \operatorname{supp} x_0^{(n)} \cup \operatorname{supp} x_1^{(n)} \quad (n=1,2,\ldots),$$

откуда следует, что $\{x_0^{(n)}\}$ и $\{x_1^{(n)}\}$ также попарно дизъюнктны. Из полноты пространств $(X_0, \|\cdot\|_0)$ и $(X_1, \|\cdot\|_1)$ вытекает, что $x_0 = \sup_n x_0^{(n)} \in X_0$, $x_1 = \sup_n x_1^{(n)} \in X_1$; ясно, что $x \le \varphi(x_0,x_1)$. Следовательно, $x \in \varphi(X_0,X_1)$. Лемма доказана.

Заметим, что пользуясь понятием функции от элементов К-пространства (см. [9-I]), нетрудно переформулировать все сказанное в этом пункте на случай, когда X_0 и X_1 – произвольные банаховы К-пространства, являющиеся фундаментами в одном и том же расширенном K-пространстве.

4. Некоторые вспомогательные результаты. Цель этого пункта – доказательство предложения 4.4, являющегося важным шагом в доказательстве основной теоремы.

I.I. Если K – произвольный компакт, то через $rca\,K$ обозначается пространство всех конечных регулярных борелевских мер на K. Напомним, что в силу теоремы Ф. Рисса (см., например, [II]) $C(K)^* = rca\,K$, причем мере $\mu \in rca\,K$ соответствующий (линейный и непрерывный) функционал f_μ на $C(K)$ сопоставляется по формуле

$$f_\mu(x) = \int_K x\,d\mu \qquad (x \in C(K)).$$

Условимся, что для функционала $f \in C(K)^*$ соответствующая ему мера обозначается через μ_f.

В этом пункте зафиксированы $\varphi \in \mathfrak{N}$, $f_0, f_1 \in C(K)^*_+$. Заметим, что найдутся $\mu \in rca(K)_+$ и $h_0, h_1 \in L^1(\mu)$ такие, что

$$f_i(x) = \int_K x h_i\,d\mu \qquad (x \in C(K);\ i = 0,1).$$

Действительно, достаточно принять $\mu = \mu_{f_0} + \mu_{f_1}$ и в качестве h_i взять производную Радона-Никодима $d\mu_{f_i}/d\mu$ ($i = 0, 1$). Так как $L^1(\mu)$ есть БФП, то мы вправе рассмотреть элемент $\varphi(h_0, h_1) \in L^1(\mu)$. Зададим теперь на $C(K)$ функционал $\varphi(f_0, f_1)$ по формуле

$$\varphi(f_0, f_1)(x) = \int_K x\,\varphi(h_0, h_1)\,d\mu \qquad (x \in C(K)). \tag{I}$$

Из положительной однородности φ следует [9,10], что так определенный функционал не зависит от выбора меры μ и плотностей h_0, h_1, а зависит лишь от функционалов f_0, f_1 и, тем самым, функционал $\varphi(f_0, f_1) \in C(K)^*$ определен корректно. Этот метод построения функционалов с помощью функций $\varphi \in \mathfrak{N}$ мы будем использовать и впредь. В частности, для функционала $\varphi(f_0, f_1)$ справедливо соотношение

$$\varphi(f_0, f_1) = \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha f_0 + \beta f_1}{\hat\varphi(\alpha, \beta)}, \tag{2}$$

которое без труда выводится из предложения 2.3. Отметим, что для любых $x_0, x_1 \in C(K)_+$

$$\varphi(f_0, f_1)(\hat\varphi(x_0, x_1)) = \int_K \hat\varphi(x_0, x_1)\,\varphi(h_0, h_1)\,d\mu \le$$

$$\le \int_K (x_0 h_0 + x_1 h_1)\,d\mu = f_0(x_0) + f_1(x_1). \tag{3}$$

Лемма 4.1. Пусть для функционала $g \in \varphi(f_0, f_1)$ выполнено неравенство

$$g(\hat\varphi(x_0, x_1)) \le f_0(x_0) + f_1(x_1) \qquad (x_0, x_1 \in C(K)_+). \tag{4}$$

Тогда $g \le \varphi(f_0, f_1)$.

Доказательство. Пусть $\mu \in rca(K)_+$ и $h_0, h_1, h \in L^1(\mu)$ таковы, что выполнено (I) и

$$g(x) = \int_K x h\,d\mu.$$

Зафиксируем временно $x_0, x_1 \in C(K)_+$. В силу (4)

$$g(\hat\varphi(x_0 x, x_1 x)) \le f_0(x_0 x) + f_1(x_1 x),$$

или же, с учетом положительной однородности функции $\hat\varphi$,

$$\int_K x\,\hat\varphi(x_0, x_1)\,h\,d\mu \le \int_K x_0 x h_0\,d\mu + \int_K x_1 x h_1\,d\mu.$$

Так как последнее неравенство выполняется для любого $x \in C(K)_+$, то из него следует, что (здесь и ниже неравенства в $S(\mu)$)

$$\hat\varphi(x_0, x_1)\,h \le x_0 h_0 + x_1 h_1.$$

Следовательно, для любых положительных чисел α и β выполняется неравенство

$$\hat\varphi(\alpha, \beta)\,h \le \alpha h_0 + \beta h_1.$$

Ограничиваясь только рациональными α и β и беря по ним точную нижнюю границу (счетность множества по которому берется эта точная нижняя граница обеспечивает измеримость получаемой функции), приходим к соотношениям

$$h \le \inf \frac{\alpha h_0 + \beta h_1}{\hat{\varphi}(\alpha,\beta)} = \hat{\varphi}(h_0,h_1) = \varphi(h_0,h_1)$$

Отсюда и следует, что $g \le \varphi(f_0,f_1)$. Лемма доказана.

Л е м м а 4.2. Пусть функция $z \in C(K)$ и число $a \in (0,\infty)$ такие, что из соотношений $x_0, x_1 \in C(K)_+$ и $\varphi(x_0,x_1) \ge z$ вытекает неравенство $f_0(x_0) + f_1(x_1) \ge a$. Тогда $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z) \ge a$.

Доказательство. Возьмем произвольное натуральное число n, числа $\alpha_k > 0$ и $\beta_k > 0$ и элементы $z_k \ge 0$ ($k = 1,2,\dots,n$), для которых $z = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. Положим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k f_0(z_k) + \beta_k f_1(z_k)}{\varphi(\alpha_k,\beta_k)} .$$

Учитывая (2) (с заменой φ на $\hat{\varphi}$), имеем

$$\inf_{\alpha_k,\beta_k>0} \sigma = \hat{\varphi}(f_0,f_1)(z) . \qquad (5)$$

Положим

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k z_k}{\varphi(\alpha_k,\beta_k)}, \quad x_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k z_k}{\varphi(\alpha_k,\beta_k)} .$$

Тогда

$$\varphi(x_0,x_1) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\alpha_k z_k}{\varphi(\alpha_k,\beta_k)}, \frac{\beta_k z_k}{\varphi(\alpha_k,\beta_k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} z_k = z ,$$

и, следовательно, по условию леммы, $\sigma = f_0(x_0) + f_1(x_1) \ge a$. Отсюда в силу (5) получаем неравенство $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z) \ge a$. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 4.3. Для любого $z \in C(K)_+$ справедливо равенство

$$\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z) =$$

$$= \inf\{ f_0(x_0) + f_1(x_1) :\ x_0, x_1 \in C(K)_+,\ \varphi(x_0,x_1) \ge z \} . \quad (6)$$

Доказательство. Обозначим правую часть формулы (6) через $h(z)$ и докажем, что h – линейный функционал на $C(K)_+$. Ясно, что $h(\alpha z) = \alpha h(z)$ для любых $\alpha \in [0,\infty)$ и $z \in C(K)$. Покажем, что для любых $z_1, z_2 \in C(K)_+$

$$h(z_1 + z_2) = h(z_1) + h(z_2) \qquad (7)$$

Пусть $z_1, z_2 \in C(K)_+$ и $x_0', x_1', x_0'', x_1'' \in C(K)_+$ такие, что $\varphi(x_0',x_1') \ge z_1$, $\varphi(x_0'',x_1'') \ge z_2$. Тогда

$$\varphi(x_0' + x_0'', x_1' + x_1'') \ge \varphi(x_0',x_1') + \varphi(x_0'',x_1'') \ge z_1 + z_2$$

и, следовательно,

$$h(z_1 + z_2) \le f_0(x_0' + x_0'') + f_1(x_1' + x_1'') ,$$

откуда $h(z_1 + z_2) \le h(z_1) + h(z_2)$.

Пусть теперь $x_0, x_1 \in C(K)_+$ такие, что $\varphi(x_0,x_1) \ge z_1 + z_2$. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\varphi(x_0 + \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \ge (z_1 + z_2) \vee \delta ,$$

где δ – некоторая положительная константа на K (например, в качестве δ можно взять $\varphi(\varepsilon,\varepsilon)$).

Положим

$$x_0 = \frac{(x_0 + \varepsilon) z_1}{(z_1 + z_2) \vee \delta}, \quad x_1 = \frac{(x_1 + \varepsilon) z_1}{(z_1 + z_2) \vee \delta}$$

и

$$x_0'' = \frac{(x_0 + \varepsilon) z_2}{(z_1 + z_2) \vee \delta}, \quad x_1' = \frac{(x_1 + \varepsilon) z_2}{(z_1 + z_2) \vee \delta} .$$

Ясно, что $\varphi(x_0',x_1') \ge z_1$, $\varphi(x_0'',x_1'') \ge z_2$. Отсюда

$$h(z_1) + h(z_2) \le f_0(x_0') + f_1(x_1') + f_0(x_0'') + f_1(x_1'') =$$

$$= f_0(x_0' + x_0'') + f_1(x_1' + x_1'') \le f_0(x_0 + \varepsilon) + f_1(x_1 + \varepsilon) .$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то отсюда следует неравенство $h(z_1) + h(z_2) \le f_0(x_0) + f_1(x_1)$.

Таким образом, $h(z_1) + h(z_2) \le h(z_1 + z_2)$ и (7) доказано.

Продолжим h до положительного линейного функционала на $C(K)$. Из леммы 4.2 следует, что $\hat{\varphi}(f_0, f_1) \ge h$. Зафиксируем любой элемент $z \in C(K)_+$ и пусть $x_0, x_1 \in C(K)_+$ таковы, что $\varphi(x_0, x_1) \ge z$. Тогда

$$\varphi(f_0, f_1)(z) \le \hat{\varphi}(f_0, f_1)(\varphi(x_0, x_1)) \le f_0(x_0) + f_1(x_1).$$

Следовательно, $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) \le h(z)$. Таким образом, $\hat{\varphi}(f_0, f_1) = h$ и предложение 4.3 доказано.

Заметим, что в случае, когда $\varphi(\xi, \eta) = \xi + \eta$ и, значит, $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \xi \wedge \eta$, равенство (6) превращается в хорошо известную формулу [7]:

$$(f_0 \wedge f_1)(z) = \inf\{ f_0(x_0) + f_1(x_1) : \ x_0, x_1 \ge 0, \ x_0 + x_1 \ge z \}.$$

4.2. Пусть X – идеальное пространство на (T, Σ, μ). Введем в рассмотрение К-пространство $\overline{X}$ всех *вполне линейных* на X функционалов [7]. Напомним, что $\overline{X}$ изоморфно дуальному к X пространству X', причем изоморфизм осуществляется отображением $x' \to f_{x'}$, действующим по формуле

$$f_{x'}(x) = \int_T x x' \, d\mu \qquad (x \in X).$$

Элемент дуального пространства, соответствующий при этом отображении функционалу $f \in \overline{X}$ будем обозначать через x'_f. Для $\varphi \in \mathfrak{U}$ и для любых $f_0, f_1 \in \overline{X}_+$ определим функционал $\varphi(f_0, f_1) \in \overline{X}$ равенством

$$\varphi(f_0, f_1)(x) = \int_T x \, \varphi(x'_{f_0}, x'_{f_1}) \, d\mu \qquad (x \in X).$$

Предположим теперь, что Z_0 и Z_1 – функционалы из $\overline{X}$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{U}$, $0 \le F_0 \in Z_0$, $0 \le F_1 \in Z_1$ и $0 \le F \le \hat{\varphi}(F_0, F_1)$.

П р е д л о ж е н и е 4.4. Для любых $x_0, x_1 \in X_+$ справедливо равенство

$$F(\varphi(x_0, x_1)) = \inf\{ f_0(x_0) + f_1(x_1) : f_i \in (Z_i)_+, \ \hat{\varphi}(f_0, f_1) \ge F \}. \quad (8)$$

Доказательство разобъем на несколько этапов.

Этап I. Докажем, что левая часть (8) не превосходит правой части. Если $\hat{\varphi}(f_0, f_1) \ge F$, то для любых $x_0, x_1 \in X_+$ имеем

$$F(\varphi(x_0, x_1)) \le \hat{\varphi}(f_0, f_1)(\varphi(x_0, x_1)) = \int_T \varphi(x_0, x_1) \hat{\varphi}(x'_{f_0}, x'_{f_1}) \, d\mu \le$$

$$\le \int_T (x_0 x'_{f_0} + x_1 x'_{f_1}) \, d\mu \le f_0(x_0) + f_1(x_1),$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

Этап 2. Можно считать, что $F_0 + F_1$ – существенно положительный функционал на X (т.е. $(F_0 + F_1)(x) > 0$ для $x > 0$, $x \in X$), ибо в противном случае можно было бы заменить X компонентой существенной положительности функционала $F_0 + F_1$ [7] и спроектировать на эту компоненту элементы x_0 и x_1.

Этап 3. Пусть

$$L = \{ x \in S(\mu) : \int_T |x| \, x'_{F_0 + F_1} \, d\mu < \infty \}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $X = L$. Действительно, в противном случае заменим X на L, а Z_i – на $Z_i \cap \overline{L}$ ($i = 0, 1$). Так как $X \subset L$, то $\overline{X} \supset \overline{L}$ и, следовательно, при такой замене мы лишь уменьшили бы множество, по которому в (8) берется точная нижняя граница, отчего правая часть формулы (8) могла бы разве увеличиться.

Этап 4. Зададим на X норму

$$\| x \| = (F_0 + F_1)(|x|) \qquad (x \in X).$$

Тогда $(X, \|\cdot\|)$ – КВ-пространство с аддитивной нормой; следовательно сопряженное к нему пространство $X^* = \overline{X}$ имеет силь-

$$p' \le \hat{q}\,, \tag{I}$$

$$q' \le \hat{p}\,. \tag{2}$$

Действительно, пусть $x' \in Y_+$, $\hat{q}(x') = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x_i' \in (X_i')_+$ ($i = 0,1$), что $x' \le (1+\varepsilon)\hat{\varphi}(x_0', x_1')$ и при этом $\|x_i'\| \le 1$ ($i = 0,1$). Далее,

$$p'(x') = \sup\Big\{ \int_T x x' \, d\mu : x \in X_+,\ p(x) \le 1 \Big\} \le$$

$$\le \sup\Big\{ (1+\varepsilon) \int_T \varphi(x_0, x_1)\hat{\varphi}(x_0', x_1')\, d\mu : x_i \in (X_i)_+ \ (i=0,1),\ \|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 \le 1 \Big\} \le$$

$$\le \sup\Big\{ (1+\varepsilon) \int_T (x_0 x_1' + x_1 x_1')\, d\mu : x_i \in (X_i)_+ \ (i=0,1),\ \|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 \le 1 \Big\} \le$$

$$\le (1+\varepsilon) \sup\Big\{ \|x_0\|_0 \|x_0'\|_0' + \|x_1\|_1 \|x_1'\|_1' : x_i \in (X_i)_+ \ (i=0,1),\ \|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 \le 1 \Big\} \le 1+\varepsilon.$$

Следовательно, $p'(x') \le 1$, откуда и вытекает (I).

Пусть $x' \in Y_+$ и $\hat{p}(x') \le 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_i' \in (X_i')_+$ ($i = 0,1$) такие, что $x' \le \hat{\varphi}(x_0', x_1')$ и $\|x_0'\|_0' + \|x_1'\|_1' \le 1 + \varepsilon$. Тогда

$$q'(x') = \sup\Big\{ \int_T x x' \, d\mu : x \in X_+,\ q(x) \le 1 \Big\} \le$$

$$\le \sup\Big\{ \int_T \varphi(x_0, x_1)\hat{\varphi}(x_0', x_1')\, d\mu : x_i \in (X_i)_+,\ \|x_i\|_i \le 1,\ (i=0,1) \Big\} \le$$

$$\le \sup\Big\{ \int_T [x_0 x_0' + x_1 x_1']\, d\mu : x_i \in (X_i)_+,\ \|x_i\|_i \le 1,\ (i=0,1) \Big\} \le$$

$$\le \sup\Big\{ \|x_0\|_0 \|x_0'\|_0' + \|x_1\|_1 \|x_1'\|_1' : x_i \in (X_i)_+,\ \|x_i\|_i \le 1,\ (i=0,1) \Big\} \le 1+\varepsilon.$$

Следовательно, $q'(x') \le 1$, откуда и вытекает (2).

Этап 3. Обозначим $Z = X_0 \cap X_1$ и положим $E = X_0 + X_1$

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 \quad ((x_0, x_1) \in E).$$

Тогда, очевидно, $E^* = X_0^* + X_1^*$ и при этом

$$\|(l_0, l_1)\|_{E^*} = \max\{ \|l_0\|_{X_0^*},\ \|l_1\|_{X_1^*} \} \quad ((l_0, l_1) \in E^*).$$

Положим далее $E' = X_0' + X_1'$. Естественным образом считаем, что $E' \subset E^*$. Так как $Z \subset X_0$, $Z \subset X_1$, то $Z \times Z \subset E$. Через τ обозначим слабую топологию $\sigma(E', Z \times Z)$. Ясно, что эта топология хаусдорфова.

Этап 4. Докажем, что норма $\hat{p}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна. Пусть для направления $\{y_\alpha\} \subset Y$ выполненны соотношения $0 \le y_\alpha \uparrow$ и $\sup_\alpha \hat{p}(y_\alpha) = a < \infty$. Нужно показать, что в Y существует $y = \sup_\alpha y_\alpha$ и при этом $\hat{p}(y) = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для любого α положим

$$H_\alpha = \{ (x_0', x_1') \in E_+' : y_\alpha \le \hat{\varphi}(x_0', x_1'),\ \|x_0'\|_0' + \|x_1'\|_1' \le a + \varepsilon \}.$$

Ясно, что H_α – убывающее направление непустых подмножеств из E_+', каждое из которых выпукло и ограничено по норме E^*. Очевидно также, что H_α замкнуто по мере в пространстве $S(\mu \times \mu) = S((T, \Sigma, \mu) \times (T, \Sigma, \mu))$. В силу теоремы I.3 из [I2] пересечение всех H_α непусто. Пусть (x_0', x_1') – точка из этого пересечения. Тогда $y_\alpha \le \hat{\varphi}(x_0', x_1')$ при любом α. Поэтому существует $\sup_\alpha y_\alpha = y \le \hat{\varphi}(x_0', x_1')$. При этом $\hat{p}(y) \le \|x_0'\|_0' + \|x_1'\|_1' \le a + \varepsilon$.

Этап 5. Докажем, что норма $\hat{q}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна. Пусть направление $\{y_\alpha\} \subset Y$ таково, что $0 \le y_\alpha \uparrow$ и $\sup_\alpha \hat{q}(y_\alpha) = a < \infty$. Покажем, что существует такой $y \in Y$, что $y_\alpha \uparrow y$ и $\hat{q}(y) = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для любого α положим

$$H_\alpha = \{ (x_0', x_1') \in E_+' : y_\alpha \le (a+\varepsilon)\hat{\varphi}(x_0', x_1'),\ \|x_i'\|_i' \le 1,\ (i=0,1) \}.$$

Далее остается дословно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве этапа 4.

Этап 6. Пусть $y \in Y_+$, $\hat{q}(y) = 1$. Докажем, что

$$p'(y) \ge 1\,. \tag{3}$$

Для этого зафиксируем произвольное $a \in (0,1)$ и положим

$$H_1 = \{ (x_0', x_1') \in E_+' : \hat{\varphi}(x_0', x_1') \ge y \}$$

и

$$H_2 = \{ (x_0', x_1') \in E_+' : \|x_0'\|_0' \vee \|x_1'\|_1' \leq a \}.$$

Ясно, что H_1 и H_2 – выпуклые множества, $H_1 \cap H_2 = \phi$, $H_i \neq \phi$ ($i = 1, 2$) и оба множества замкнуты по мере в $S(\mu \times \mu)$.

В силу предложения 4.5 найдется такой $(x_0, x_1) \in Z \times Z$, что $\|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 = 1$ и

$$\sup \left\{ \int_T (x_0 x_0' + x_1 x_1')\, d\mu : (x_0', x_1') \in H_2 \right\} \leq$$

$$\inf \left\{ \int_T (x_0 x_0' + x_1 x_1')\, d\mu : (x_0', x_1') \in H_1 \right\}.$$

Заметим, что левая часть этого неравенства равна a. Кроме того, можно считать, что $x_0 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ (в противном случае нужно перейти к $|x_0|$ и $|x_1|$). Итак, из неравенства $\hat{\varphi}(x_0', x_1') \geq y$ ($x_i' \in (X_i')_+$, $i = 0, 1$) вытекает неравенство

$$\int_T (x_0 x_0' + x_1 x_1')\, d\mu \geq a.$$

Отсюда и из предложения 4.4 следует, что

$$\int_T y\, \varphi(x_0, x_1)\, d\mu \geq a. \qquad (4)$$

Так как $\rho(\varphi(x_0, x_1)) \leq 1$, то (4) влечет неравенство $\rho' y \geq a$. Из произвольности $a \in (0, 1)$ заключаем, что (3) верно.

Этап 7. Из утверждений, доказанных на этапах 6 и I вытекает, что на Y имеет место равенство $\rho' = \hat{q}$. Отсюда и следует равенство линейных пространств $(\varphi(X_0, X_1))'$ и $\hat{\varphi}(X_0', X_1')$, так как нормы ρ' и $\hat{q}$ универсально полны и полунепрерывны.

Этап 8. Пусть $y \in Y_+$, $\hat{\rho}(y) = 1$. Докажем, что $q'(y) \geq 1$. Для этого зафиксируем произвольное a из $(0, 1)$ и положим

$$H_1 = \{ (x_0', x_1') \in E_+' : \hat{\varphi}(x_0', x_1') \geq y \}$$

и

$$H_2 = \{ (x_0', x_1') \in E_+' : \|x_0'\|_0' + \|x_1'\|_1' \leq a \}.$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны тем, которые были проведены на этапе 6. Таким образом, $q' \geq \hat{\rho}$. Отсюда и из (2) заключаем, что на Y_+ выполняется равенство $q' = \hat{\rho}$.

Теорема 3.I полностью доказана.

Литература

I. Лозановский Г.Я. О некоторых банаховых структурах. – СМЖ, т. IO, № 3, I969, 584–599.

2. Лозановский Г.Я. О некоторых банаховых структурах, II. – СМЖ, т. I2, № 3, I97I, 562–567.

3. Лозановский Г.Я. О некоторых банаховых структурах, III. – СМЖ, т. I3, № 6, I972, I304–I3I3.

4. Лозановский Г.Я. О некоторых банаховых структурах, IУ. – СМЖ, т. I4, № I, I973, I40–I55.

5. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, I958.

6. Лозановский Г.Я. О преобразованиях банаховых решеток измеримых функций. – Изв. вузов (математика), в печати.

7. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, I96I.

8. Абрамович Ю.А. Некоторые теоремы о нормированных структурах. – Вестник ЛГУ, №I3, I97I, 5–II.

9. Лозановский Г.Я. О функциях от элементов линейной структуры. – Известия вузов (математика), вып. 4, I973, 45–54.

IO. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., Гостехиздат, I950.

II. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, I962.

12. Бухвалов А.В., Лозановский Г.Я. О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций. – Тр. Моск. матем. о-ва, т. 34, 1977, 128–149.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Межвузовский тематический сборник

Выпуск 2

Ярославский государственный университет
ЯРОСЛАВЛЬ 1978

УДК 513.88

О ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА И ОРЛИЧА[x)]

Г.Я.Лозановский

Напомним, что линейный функционал f на векторной решётке (ВР) X называется дискретным, если для любых $x, y \in X_+$ выполняется равенство $f(x \vee y) = max\{f(x), f(y)\}$, другими словами, если f является решёточным гомоморфизмом на X. Если, например, X есть ВР $C(K)$ – всех непрерывных функций на компактном (хаусдорфовом) пространстве К, то всякий дискретный функционал f на $C(K)$ имеет вид $f(x) = x(t)$, где t точка из К. Такой же вид имеют дискретные функционалы и на пространстве $L^\infty[0,1]$, только вместо значений в точках отрезка $[0,1]$ надо брать значения в точках пространства максимальных идеалов, на котором реализуется $L^\infty[0,1]$, как пространство непрерывных функций. В настояще работе мы покажем, что и на таких классических функциональных пространствах

x) Настоящая работа подготовлена к печати после кончины Г.Я.Лозановского Ю.А.Абрамовичем.

пространства Марцинкевича и Орлича при определенных условиях имеются ненулевые дискретные функционалы. Точнее, на пространстве Марцинкевича $M(\psi)$ имеются ненулевые дискретные функционалы тогда и только тогда, когда $\underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2$ (теорема 3). В следствии к теореме 5 показано, что если X есть сепарабельное пространство Орлича L_M, то для всякого $x \in L_M \setminus E_M$ существует дискретный функционал, отличный на x от 0. В противоположность к указанным случаям в теореме 4 доказано, что на пространствах со смешанной нормой $L(\infty,1)$ и $L(1,\infty)$ нетривиальных дискретных функционалов не существует. При этом отметим, что существование или отсутствие нетривиальных дискретных функционалов на рассматриваемых конкретных пространствах устанавливается с помощью общего критерия непрерывности сопряжённого пространства X^*, доказанного в теореме I. Эта теорема, равно как и теорема 2, были анонсированы без доказательств в работе автора [I].

§ I. Терминология и обозначения

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы следуем [2] и [3]. Напомним некоторые определения, необходимые для понимания последующего.

<1> Пусть X произвольная банахова решётка (БР) и X^* сопряженное пространство. Функционал $f \in X^*$ называется

I) порядково непрерывным, если из $x_\alpha \downarrow 0$ следует, что $f(x_\alpha) \to 0$;

2) антинормальным, если он дизъюнктен всем порядково непрерывным функционалам;

3) анормальным (сингулярным), если существует фундамент Φ в X, такой что сужение $f|\Phi = 0$.

Пространства соответствующих функционалов обозначаются соответственно через $X_n^*, X_{ant}^*, X_{an}^*$.

⟨2⟩ Элемент x ВР X называется ортом (или дискретным), если для всякого $y \in X$, удовлетворяющего неравенству $|y| \le |x|$, существует число $\lambda \in [-1,1]$, такое что $y = \lambda x$. Элемент $x \in X$ называется непрерывным, если не существует орта $y \ne 0$, такого что $|y| \le |x|$.

Множество всех положительных дискретных элементов ВР X будем обозначать $\mathcal{D}(X)$.

ВР X называется дискретной, если полоса в X, порожденная множеством $\mathcal{D}(X)$, совпадает с X.

ВР X называется непрерывной, если $\mathcal{D}(X) = \{0\}$.

Данное нами во введении определение дискретного функционала равносильно тому, что этот функционал является дискретным элементом K-пространства всех регулярных функционалов на ВР X. Таким образом, если X БР, то $f \in X^*$ дискретен, тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{D}(X^*)$.

⟨3⟩ ВР X, являющаяся K-пространством (соотв. K_σ-пространством), называется банаховым K-пространством (соотв. K_σ-пространством).

⟨4⟩ Говорят, что норма в БР X порядково непрерывна[x], если выполнено следующее условие:

$$(A)\quad x_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow \|x_\alpha\| \to 0$$

---

x) Короче: (с) – непрерывна.

⟨5⟩ Говорят, что норма в БР X монотонно полна, если выполнено следующее условие:

$$(B)\quad (0 \le x_\alpha \uparrow, \|x_\alpha\| \le C) \Rightarrow \exists \sup x_\alpha \in X$$

БР, в которой выполнены условия (A) и (B), называется КВ-пространством (пространством Канторовича-Банаха).

§ 2. Условия непрерывности и дискретности сопряженного пространства

Теорема 1. Пусть X нормированное K_σ-пространство. Эквивалентны следующие утверждения:

а) X^* есть непрерывное К-пространство, т.е. $\mathcal{D}(X^*) = \{0\}$.

б) $\forall x \in X_+, \forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in X$, такие что

$$x_i \wedge x_j = 0 \ (i \ne j),$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x,$$
$$\|x_i\| \le \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n).$$

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Фиксируем $x \in X_+$. Не умаляя общности, можем считать, что x есть (слабая) единица в X, иначе вместо X рассмотрим полосу Y в X, порожденную элементом x. (Ясно, что при этом будем иметь $\mathcal{D}(Y^*) = \{0\}$, т.е. условие а) для Y сохранит справедливость). Следовательно [2, теор.5.4.1] X может быть реализовано как фундамент в пространстве расширенных непрерывных функций

$C_\infty(Q)$, где Q квазиэкстремальный бикомпакт.

Покажем, что для любой точки $t_0 \in Q$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность[x)] $U \in \mathcal{U}(t_0)$, что

$$\| x_U \| \leq \varepsilon , \qquad (I)$$

где $x_U = x \cdot \chi_U$ и χ_U – характеристическая функция множества U . Допустим противное, что существуют $t_0 \in Q$ и $\varepsilon > 0$, такие, что для любой $U \in \mathcal{U}(t_0)$ имеем $\| x_U \| > \varepsilon$. Тогда для любой $U \in \mathcal{U}(t_0)$ найдется функционал $f_U \in X_+^*$, такой что

$$\| f_U \| = 1 \qquad (2)$$

$$f_U(x_U) = \| x_U \| > \varepsilon \qquad (3)$$

$$f_U(y) = f_U(y \cdot \chi_U) \quad (\forall y \in X) \qquad (4)$$

В силу (2) у обобщённой последовательности $\{ f_U : U \in \mathcal{U}(t_0) \}$ имеется хоть одна слабая* предельная точка. Обозначим её через f . Ясно, что в силу (3) и (4) $f(x) \geq f(x_U) \geq \varepsilon$ $\forall U \in \mathcal{U}(t_0)$ и, в частности, $f \neq 0$. Заметим далее, что если $y, z \in X$ и $\exists U \in \mathcal{U}(t_0)$, для которой $y_U = z_U$, то в силу (4) $f(y) = f(z)$. Из этого очевидно следует, что $f \in \mathcal{D}(X^*)$. Так как $f \neq 0$, то это противоречит условию. Итак, (I) доказано. Следовательно, $\forall t \in Q$ найдется её открыто-замкнутая окрестность U_t , такая что $\| x_{U_t} \| \leq \varepsilon$. Так как Q

---

x) Через $\mathcal{U}(t_0)$ мы обозначаем множество всех открыто-замкнутых окрестностей точки t_0 .

компактно, то можем выбрать конечное покрытие $U_{t_1}, \dots , U_{t_n}$. Остаётся положить $x_1 = x_{U_{t_1}}, x_2 = x_{U_{t_2}} - x_{U_{t_2}} \wedge x_1, \dots , x_n = x_{U_{t_n}} - x_{U_{t_n}} \wedge (x_1 + \dots + x_{n-1})$. Очевидно, что элементы $x_1, \dots , x_n$ удовлетворяют б) .

Докажем б) $\Rightarrow$ а) . Пусть $f \in \mathcal{D}(X^*)$. Покажем, что $f = 0$. Действительно, возьмём $x \in X_+$, $\| x \| = 1$ так, чтобы $f(x) \geq \frac{1}{2} \| f \|$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и пусть элементы $x_1, \dots , x_n$ такие как в б) . Так как $\{x_i\}$ попарно дизъюнктны и f дискретен, то $f(x_i) \wedge f(x_j) = 0$ при $i \neq j$, и следовательно, для всех i кроме, быть может, одного (обозначим его i_0) $f(x_i) = 0$. Но тогда $f(x_{i_0}) = f(x) \geq \frac{1}{2} \| f \|$ и так как $\| x_{i_0} \| \leq \varepsilon$, то $\| f \| \geq f(x_{i_0}) / \| x_{i_0} \| \geq \frac{1}{2\varepsilon} \| f \|$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $f = 0$. Теорема I полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Ясно, что импликация б) $\Rightarrow$ а) остаётся справедливой и для любой нормированной решётки. Справедливость же обратной импликации а) $\Rightarrow$ б) для любой БР нам не известна. В произвольной нормированной решётке а) $\not\Rightarrow$ б) . Приведем соответствующий пример. Пусть X есть пространство $C[0,1]$, наделенное нормой из $L^1[0,1]$. Тогда ясно $X^* = L^\infty[0,1]$ непрерывно, но функция $\mathbf{1}$, тождественно равная единице, не удовлетворяет условию б) .

Следующая простая теорема даёт критерий дискретности пространства X^*.

Т е о р е м а 2. Пусть X банахово K_σ–пространство. Эквивалентны следующие утверждения:

а) X^* дискретно,

б) в X выполнено условие (А) и X дискретно.

Доказательство. $a) \Rightarrow б)$ Допустим, что в X не выполнено (А). Тогда [4] в X найдется векторная подрешётка Y, порядково изоморфная l^∞. Возьмём $0 < f \in Y^{\sim}$, дизъюнктный $D(Y^*)$ и пусть $\hat{f}$ его положительное распространение на всё X. Легко видеть, что $\hat{f} \notin \{D(X^*)\}^{dd}$, а это противоречит $a)$. Итак, в X (А) выполнено. Тогда $X^* = X_n^*$ и поскольку максимальные расширения [2] пространств X и $X_n{}^*$ (0)-изоморфны, то X дискретно. Импликация $б) \Rightarrow a)$ очевидна.

Замечание. Пусть $X - c$ БР всех сходящихся последовательностей. Тогда X^* дискретно, но в X не выполнено (А). Тем самым для любой БР теорема 2 не имеет места. Интересно отметить, что в [5] построена непрерывная БР X, такая что X^* (0)-изоморфно и изометрично l^1. Таким образом и второе условие в $б)$ также не следует из $a)$, если X лишь произвольная БР.

Следствие. Если X БР, такая что X^{***} дискретно, то X рефлексивно.

§ 3. Дискретные функционалы в пространствах Марцинкевича и Орлича

Пусть $\psi(t)$ неубывающая, непрерывная вогнутая на $[0,1]$ функция, такая что $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ при $t>0$ и $\lim\limits_{t\to 0} t/\psi(t)=0$. Напомним, что банахово функциональное пространство Марцинкевича $M(\psi)$ состоит из всех тех измеримых на

$[0,1]$ функций[x)] $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h\le 1} \frac{\int_0^h x^*(t)\,d\mu}{\psi(h)}.$$

Здесь μ – мера Лебега на $[0,1]$ и через x^* обозначена перестановка функции x в убывающем порядке.

Изучению структуры сопряженного пространства $M(\psi)^*$ посвящено значительное число работ; упомянем, например, [6], [7], [8]. В следующей теореме найдено необходимое и достаточное условие на функцию $\psi(t)$, обеспечивающее наличие в $M(\psi)^*$ ненулевых дискретных функционалов.

Теорема 3. Для пространства Марцинкевича $M(\psi)$ равносильны следующие два утверждения:

а) $D(M(\psi)^*) \neq \{0\}$, то есть на $M(\psi)$ существует ненулевой дискретный функционал;

б) $\varliminf\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2$.

Доказательство. $б) \Rightarrow a)$ Пусть $x(t) = \psi'(t)$ производная функции $\psi(t)$. Известно (и очевидно), что $x \in M(\psi)$ и $\|x\| = 1$. Докажем, что для элемента x не выполнено условие $б)$ теоремы I, чем и будет доказано, что $D(M(\psi)^*) \neq \{0\}$. Пусть $x = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_i \wedge x_j = 0 \; (i \neq j)$ и пусть $a = \max\limits_{i=1} \|x_i\|$. Докажем, что $a \geq 1$. Как замечено Е.М.Семеновым из $б)$ следует, что для любого $n = 3, 4, \ldots$

$$\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(nt)}{\psi(t)} = n \qquad (5)$$

x) При этом эквивалентные функции, разумеется, отождествляются.

Возьмем любое $h \in (0,1]$. Тогда имеем

$$\psi(h) = \int_0^h \psi'(t)\,d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{e_i} x_i(t)\,d\mu,$$

где $e_i \subset supp\ x_i$, носителю элемента x_i, и $\sum_{i=1}^n \mu e_i = h$.

Следовательно,

$$\psi(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\int x_i(t)\,d\mu}{\psi(\mu e_i)} \psi(\mu e_i) \le \sum_{i=1}^n \|x_i\| \psi(\mu e_i) \le$$

$$\le a\sum_{i=1}^n \psi(\mu e_i) = an \sum_{i=1}^n 1/n\, \psi(\mu e_i) \le$$

$$\le an\,\psi\left(\frac{\sum_{i=1}^n \mu e_i}{n}\right) = an\,\psi\left(\frac{h}{n}\right).$$

Отсюда $a \ge \frac{\psi(h)}{n\psi(\frac{h}{n})}$ и потому

$$a \ge \varlimsup_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{n\psi(\frac{h}{n})} = \varlimsup_{t\to 0}\frac{\psi(nt)}{n\psi(t)} = 1$$

в силу (5).

а) ⇒ б) Допустим, что

$$\varlimsup_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = q < 2 \qquad (6)$$

Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$ из равенства

$$\frac{\psi(2^n t)}{\psi(t)} = \prod_{k=1}^n \frac{\psi(2^{k+1}t)}{\psi(2^k t)}$$

следует, что

$$\varlimsup_{t\to 0}\frac{\psi(2^n t)}{\psi(t)} \le q^n \quad (\forall n=1,2,\dots) \qquad (7)$$

Пусть $x \in M(\psi)_+$ произвольный элемент. Покажем, что x удовлетворяет условию б) теоремы I и, следовательно,

$\mathcal{D}(M(\psi)^{\cdot\cdot}) = \{0\}$, что противоречит условию а) доказываемой теоремы. Тем самым предположение (6) будет опровергнуто. Не умаляя общности, можно считать, что x -счётнозначный элемент. Пусть $[0,1] = \bigcup_{k=1}^\infty e_k$ где e_k измеримы и попарно дизъюнктны и пусть $x|_{e_k} = \lambda_k$ $(\forall k=1,2,\dots)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмём пока произвольное n и каждое множество e_k представим в виде $e_k = \bigcup_{i=1}^{2^n} e_k^i$, где e_k^i измеримы, попарно дизъюнктны и $\mu e_k^i = 1/2^n\, \mu e_k$ для всех $i = 1, 2, \dots 2^n$. Положим теперь

$$x_i(t) = \begin{cases}\lambda_k & \text{при } t\in e_k^i\\ 0 & \text{при } t\in[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^\infty e_k^i\end{cases}.$$

Ясно, что $x_i \wedge x_j = 0$ при $i \ne j$ и $\sum_{i=1}^{2^n} x_i = x$. Кроме того

$$x_i^*(t) = \begin{cases} x^*(2^n t) & \text{при } 0\le t\le \frac{1}{2^n}\\ 0 & \text{при } 1/2^n < t \le 1\end{cases}.$$

Для краткости обозначим x_i^* через z. Возьмём $\tau \in (0, 1/2^n)$. Тогда $z = z\chi_{[0,\tau]} + z\chi_{[\tau,1]}$. Так как $z\chi_{[\tau,1]}$ функция ограниченная, то легко видеть, что она удовлетворяет условию б) теоремы I. Поэтому остаётся лишь доказать, что при подходящих n и τ будет справедливо неравенство

$$\|z\chi_{[0,\tau]}\| \le \varepsilon. \qquad (8)$$

Имеем:

$$\|z\chi_{[0,\tau]}\| = \sup_{0<h\le\tau}\frac{\int_0^h x^*(2^n t)\,d\mu}{\psi(h)} = \sup_{0<h\le\tau}\frac{\int_0^{2^n h} x^*(t)\,d\mu}{2^n\psi(h)} \le$$

$$\le \|x\| \sup_{0<h\le\tau}\frac{\psi(2^n h)}{2^n\psi(h)},$$

и кроме того в силу (7)

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{0<h\le\tau}\frac{\psi(2^n h)}{2^n\psi(h)} \le \left(\frac{q}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда ясно, что, взяв достаточно большое n и достаточно малое $\tau > 0$, можно обеспечить (8). Теорема полностью доказана.

Ещё одно применение теоремы I может быть проиллюстрировано на примере пространств со смешанной нормой.

Напомним, что через $L(p,q)$ обозначается пространство (классов) измеримых функций $x(s,t)$ на единичном квадрате $\Delta = [0,1] \times [0,1]$, для которых

$$\|x\|_{p,q} = \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 |x(s,t)|^p d\mu(t)\right]^{q/p} d\mu(s)\right]^{1/q} \text{ при } 1 \le p, q < \infty;$$

$$\|x\|_{p,\infty} = \operatorname*{vraisup}_s \left[\int_0^1 |x(s,t)|^p d\mu(t)\right]^{1/p} \quad \text{при } 1 \le p < \infty,\ q = \infty$$

$$\|x\|_{\infty,q} = \left[\int_0^1 \operatorname*{vraisup}_t |x(s,t)|^q d\mu(s)\right]^{1/q} \quad \text{при } p = \infty,\ 1 \le q < \infty.$$

Наиболее сложны для изучения "крайние" случаи пространств $L(p,\infty)$ и $L(\infty,q)$. Оказывается сопряженные к указанным пространствам непрерывны, что весьма контрастирует со случаем пространства $L^\infty[0,1]$.

Т е о р е м а 4. Пусть X любое из пространств $L(\infty,q)$ или $L(p,\infty)$. Тогда $\mathcal{D}(X^*) = \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вначале $X = L(\infty,q), 1 \le q < \infty$. Фиксируем $x \in X_+$ и $\varepsilon > 0$. Положим $y(s) = \operatorname*{vraisup}_t x^q(s,t)$. Так как $x \in L(\infty,q)$, то $\int_0^1 y\, d\mu(s) < \infty$. Следовательно, найдется натуральное n, такое что $\int_{(k-1)/n}^{k/n} y\, d\mu(s) \le \varepsilon^q$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Положим

$$x_k(s,t) = \begin{cases} x(s,t) & \text{при } (k-1)/n \le s \le k/n, \\ 0 & \text{при прочих } s. \end{cases}$$

Ясно, что x_k попарно дизъюнктны, $\|x_k\| \le \varepsilon$ и $x = x_1 + \ldots + x_n$. По теореме I $\mathcal{D}(X^*) = \{0\}$.

Пусть теперь $X = L(p,\infty)$. Фиксируем $x \in X_+$ и $\varepsilon > 0$.

Для $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$E_n = \left\{(s,t) \in \Delta : \left[\int_0^t |x(s,t)|^p d\mu(t)\right]^{1/p} \le n^{1/p}\varepsilon\right\}.$$

Ясно, что множества E_n измеримы и существует n, такое что $E_n = \Delta$. Положим $e_1 = E_1$, $e_2 = E_2 \setminus E_1, \ldots, e_n = E_n \setminus E_{n-1}$ и примем $x_i = x\chi_{e_i}$. Тогда $x_i \wedge x_j = 0$ при $i \ne j$, $x = x_1 + \ldots + x_n$ и $\|x_i\| \le \varepsilon$. Следовательно $\mathcal{D}(X^*) = \{0\}$.

З а м е ч а н и е. Для прочих значений индексов p и q непрерывность пространства $L^*(p,q)$ следует, например, из выполнения в них условия (А).

Т е о р е м а 5. Пусть X банахово K-пространство, обладающее следующими двумя свойствами:

1) Существует замкнутый по норме фундамент Y в X, в котором выполнено условие (А).

2) X^*_{ant} есть KB-пространство с аддитивной нормой.

Тогда для любого $x \in X$, $x \notin Y$ существует $f \in \mathcal{D}(X^*)$, такой что $f(x) \ne 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $Z = X/Y$ и рассмотрим естественные операторы фактор-отображения $\alpha : X \to Z$ и вложения $\beta : Z \to Z^{**}$. Рассмотрим сопряженный оператор $\alpha^* : Z^* \to X^*$. Покажем, что α^* есть изоморфизм Z^* на X^*_{ant}. Пусть $g \in Z^*$. Тогда $\forall x \in Y\ (\alpha^* g)(x) = g(\alpha x) = g(0) = 0$, т.е. $\alpha^* g$ аннулируется на Y. Следовательно $\alpha^* g \in X^*_{ant}$. Итак $\alpha^* : Z^* \to X^*_{ant}$. Возьмём $\forall f \in X^*_{ant}$. Так как $X^*_{ant} = X^*_{an}$ [9,4.50.4], то найдется фундамент Φ в X, такой что $f|\Phi = 0$. Поскольку $\Phi \cap Y$ есть фундамент в Y и в Y выполнено (A), то $\Phi \cap Y$ плотно в Y по норме и потому $f|_Y=0$. Следовательно $f\in\alpha^*(Z^*)$.

итак, α^* есть изоморфизм Z^* на X^*_{aut}. Более того легко убедиться, что α^* есть изометрия и порядковый изоморфизм. Следовательно, Z^* есть KB-пространство с аддитивной нормой. Поэтому Z^{**} есть банахово K-пространство ограниченных элементов. Реализуем его в виде $C(Q)$ на экстремальном бикомпакте Q. Фиксируем $x\in X$, $x\notin Y$. Тогда $\alpha(x)\neq 0\in Z$ и, следовательно, $\beta(\alpha(x))\neq 0\in Z^{**}=C(Q)$. Найдем точку $t\in Q$, такую что $\beta(\alpha(x))(t)\neq 0$. Остается положить $f(x')=\beta(\alpha(x'))(t)$ $(x'\in X)$. Ясно, что f есть искомый дискретный функционал.

Следствие I. Пусть $X=L_M[0,1]$ несепарабельное пространство Орлича[x)] и $Y=E_M$ замыкание в X подпространства ограниченных элементов. Тогда для любого $x\in X$, $x\notin Y$ существует дискретный функционал $f\in X^*$, такой что $f(x)\neq 0$

Справедливость этого следствия немедленно вытекает из предыдущей теоремы, поскольку в силу известной теоремы Андо [II] пространство Орлича удовлетворяет всем условиям теоремы 5.

Из этого следствия вытекает и такой факт: если мы реализуем несепарабельное пространство Орлича L_M на его стоуновском экстремальном бикомпакте Q, то в Q существует плотное множество точек, в которых пространство L_M имеет

---

x) Несепарабельность пространства L_M равносильна тому, что N-функция $M(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию [IO], или тому, что в L_M не выполнено условие (A).

сильные локальные единицы.

Следствие 2. Пусть $X=M(\psi)$ пространство Марцинкевича и $Y=M_0(\psi)$ замыкание в X подпространства ограниченных функций. Если функция ψ удовлетворяет следующему условию

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{n\psi(t)}{\psi(nt)}<\infty, \qquad (9)$$

то $\forall x\in X, x\notin Y$ $\exists f\in\mathfrak{D}(X^*)$, такой что $f(x)\neq 0$.

Доказательство. В [7] показано, что при выполнении условия (9) $M(\psi)^*_{aut}$ (с точностью до эквивалентной перенормировки) является KB-пространством с аддитивной нормой. Далее применяем теорему 5.

Замечание. Легко видеть, что условие (9) вытекает из следующего условия

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=2. \qquad (IO)$$

Тем самым при выполнении (IO) множество $\mathfrak{D}(M(\psi)^*)$ тотально на $M(\psi)\setminus M_0(\psi)$.

Интересно выяснить имеет ли место подобная тотальность и при выполнении лишь условия

$$\underline{\lim_{t\to 0}}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=2, \qquad (II)$$

которое по теореме 3 равносильно невырожденности множества $\mathfrak{D}(M(\psi)^*)$.

С учетом упомянутой выше теоремы Андо следствие I можно переформулировать так: для пространства Орлича L_M множество дискретных функционалов $\mathfrak{D}(L^*_M)\neq\{0\}$ тогда и только тогда, когда $(L_M)^*_{aut}$ есть (ненулевое) KB-пространство с аддитивной нормой. А для пространства Марцинкевича $M(\psi)$ следствие

2 переформулируется так: если $M(\psi)^*_{abt}$ есть (ненулевое) KB-пространство с аддитивной нормой, то $\mathcal{D}(M(\psi)^*)\neq\{0\}$. Обратить следствие 2 и получить в этом вопросе полную аналогию между пространствами Орлича и Марцинкевича невозможно. А именно, верно такое

П р е д л о ж е н и е. Существует такое пространство Марцинкевича $M(\psi)$, что

а) $M(\psi)^*_{abt}$ не имеет счётный тип [2] и тем более не является KB-пространством;

б) $\mathcal{D}(M(\psi)^*)\neq\{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно построить такую определяющую пространство $M(\psi)$ функцию $\psi(t)$ на [0,I], чтобы были выполнены условия

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1 \qquad (I2)$$

и условие (II). Действительно, как доказано в [7], условие (I2) равносильно $a)$ а (II) по теореме 3 равносильно $б)$. Именно такая функция ψ была построена Е.М.Семеновым [I2].

Л и т е р а т у р а

1. Лозановский Г.Я. О локализованных функционалах в векторных структурах.—В сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". Вып. 19, Харьков, 1974, 66-80.

2. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., "Наука", 1961.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, М., "Наука", 1977.

4. Лозановский Г.Я., Меклер А.А. Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных структурах. Изв.ВУЗов, Матем., № 11, 1967, 47-53.

5. Lacey E.H., Wojtaszczyk P. Nonatomic Banach lattices can have l_1 as a dual space. Proc. AMS 57, 1976, № 1, 79-84.

6. Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докт. дисс. Воронеж, 1968.

7. Лозановский Г.Я. О представлении линейных функционалов в пространствах Марцинкевича. Известия ВУЗов, Матем., № 1, 1978, 1-11.

8. Лозановский Г.Я. Дополнение к статье "О локализованных функционалах в векторных структурах". Записки научн. семин. ЛОМИ, Л., 56, 1976, 188-190.

9. Luxemburg W.A.J. Notes on Banach Function spaces, XVa, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, Ser. A, 68, 1965, 415-429.

10. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.

11. Andô T. Linear functionals on Orlicz spaces, Nieuw Archief voor Wiskunde, (3), 8, 1960, 1-16.

12. Семенов Е.М. О некоторых числовых характеристиках симметричных пространств. Тр. НИИ Матем. ВГУ, вып. 1, 1970, 137-144.

Ленинградский военный инженерный
институт им. А.Ф.Можайского

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. И. Н. УЛЬЯНОВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ВЫПУСК 10

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Ульяновск 197[illegible]

Г.Я.Лозановский

БАНАХОВЫ РЕШЕТКИ И ПРИМАРНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА КОМПАКТОВ

На протяжении всей статьи Q означает некоторое компактное хаусдорфово пространство, $C(Q)$ – банахову решетку (KB – линеал в терминологии монографии [1]) всех непрерывных вещественных функций на Q. Если P замкнуто в Q, то через $C(Q,P)$ обозначим множество $\{x\in C(Q) : x(t)=0 \ \ \forall t\in P\}$; $C(Q,P)$ есть, очевидно, замкнутый идеал в $C(Q)$, являющийся фундаментом *), если и только если P нигде не плотно.

Пусть q – неизолированная точка из Q, X – фундамент в $C(Q,q)$ **), отличный от $C(Q,q)$ и разделяющий точки из Q (то есть для любой точки $t\in Q$, $t\neq q$, найдется функция $x\in X$ такая, что $x(t)\neq 0$). В силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса $\overline{X}=C(Q,q)$, и, следовательно, норма, индуцированная в X из $C(Q)$ – не банахова. Представляет интерес следующий вопрос: существует ли на X монотонная банахова норма (разумеется, не эквивалентная норме, индуцированной из $C(Q)$)? Из основного результата настоящей статьи вытекает, что, если Q экстремально несвязно, то ответ на этот вопрос отрицателен для любого X (предложение 2). Отметим, что для метризуемого Q и любой неизо-

---

*) Определение фундамента и других используемых здесь понятий теории векторных решеток и общей топологии можно найти в монографиях [1], [2].

**) Так мы пишем вместо $C(Q,\{q\})$.

лированной точки $q\in Q$ ответ на поставленный выше вопрос положителен хотя бы для одного X (предложение 1). Изучение аналогичного вопроса для фундаментов, содержащихся в $C(Q,P)$, приводит к некоторому классу подмножеств Q, называемых в настоящей статье "примарными".

Перейдем к основному определению. Пусть $\mathfrak{M}$ – совокупность всех банаховых решеток, являющихся фундаментами в $C(Q)$. Для $X\in\mathfrak{M}$ положим $R(X)=\{t\in Q : x(t)=0 \ \ \forall x\in X\}$.

Определение 1. Непустое замкнутое нигде не плотное $P\subset Q$ назовем <u>примарным</u>, если из соотношений $X\in\mathfrak{M}$, $R(X)=P$ вытекает $X=C(Q,P)$.

Если Q метризуемо, то примарных множеств в нем нет; это вытекает из следующего предложения.

Предложение 1. Пусть P – непустое замкнутое нигде не плотное множество в Q. Если P примарное, то P не содержит непустого замкнутого G_δ -множества. В частности, никакое G_δ -множество в Q – не примарное.

Доказательство. Пусть P – непустое замкнутое G_δ -множество в P; выберем последовательность $(U_n)_{n\geq 0}$ открытых окрестностей A такую, что $\bigcap U_n = A$, $Q=U_0\supsetneqq\overline{U}_1\supset U_1\supsetneqq\overline{U}_2\supset U_2\ldots$. Зафиксируем точки $t_n\in U_n\setminus(\overline{U}_{n+1}\cup P)$, и пусть X состоит из всех $x\in C(Q,P)$, для которых

$$\|x\| = \sup_{t\in Q}|x(t)| + \sum_{n\geq 0}|x(t_n)| < +\infty .$$

Ясно, что $X\in\mathfrak{M}$ и $R(X)=P$. С другой стороны, в силу теоремы Урысона о продолжении найдется функция $x\in C(Q,P)$ такая, что $x(t_n)=1/(n+1)$. Тогда $x\notin X$, и, следовательно, P – не примарно.

Следующий пример показывает, что предложение 1 не обратимо, даже если Q экстремально несвязно.

Пример. Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная прямая с мерой Лебега. Реализуем $L^\infty(\mathbb{R})$ в виде пространства $C(Q)$. Пусть $X = L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ с нормой $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x\|_1$, и пусть $P = R(X)$. Ясно, что P – непустое замкнутое нигде не плотное множество в Q, причем P – не примарное, так как X не замкнуто в $L^\infty(\mathbb{R})$ и полно в норме $\|\cdot\|$. Допустим, что существует непустое замкнутое G_δ – множество A, содержащееся в P. Тогда $A = \bigcap U_n$, где (U_n) – убывающая последовательность открыто-замкнутых подмножеств Q. Множествам U_n соответствуют измеримые множества $\hat{U}_n \subset \mathbb{R}$, обладающие свойствами:

а) $\hat{U}_0 \supset \hat{U}_1 \supset \ldots \supset \hat{U}_n \supset \ldots$;

б) $\mu(\hat{U}_n) > 0 \quad \forall n$;

в) $\forall x \in X \quad \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t\in \hat{U}_n} |x(t)| = 0$.

Пусть V_n – измеримое подмножество $\hat{U}_n$ такое, что $0 < \mu(V_n) < 1/n^2$. Тогда характеристическая функция множества $\bigcup V_n$ принадлежит X, но для нее условие в) не выполнено.

Основным результатом статьи является нижеследующая теорема 1, дающая достаточное условие примарности. В связи с этой теоремой удобно ввести одно вспомогательное понятие. Будем говорить, что замкнутое множество $P \subset Q$ обладает свойством (R), если выполнено условие:

(R). Пусть (G_n) – произвольная последовательность открытых F_σ -множеств в Q, обладающая свойствами: а) $\bar{G}_n \cap \bar{G}_m = \emptyset$ при $n \neq m$; б) $\bar{G}_n \cap P = \emptyset \ \forall n$. Тогда для некоторой подпоследовательности (G_{n_k}) выполнено $P \cap \overline{\bigcup G_{n_k}} = \emptyset$.

Заметим, что если Q квазиэкстремально несвязно, то в определении свойства (R) множества G_n можно считать открыто-замкнутыми.

Теорема 1. Всякое непустое замкнутое нигде не плотное множество $P \subset Q$, обладающее свойством (R), – примарное.

Доказательство. Допустим, от противного, что P обладает свойством (R), но не примарно. Тогда найдется $X \in \mathfrak{M}$ такой, что $R(X) = P$, но $X \neq C(Q,P)$. Дальнейшее доказательство теоремы разобьем на ряд пунктов.

1. Обозначим через Γ отображение вложения X в $C(Q,P)$. Отметим сразу, что Γ, будучи положительным отображением, непрерывно (см. [1]).

2. Далее V будет обозначать некоторую замкнутую окрестность P. Обозначим $X_V = X \cap C(Q,V)$. Так как $R(X) = P$, то $X_V = C(Q,V)$ по запасу элементов, но тогда нормы в $X_V = C(Q,V)$, индуцированные из X и $C(Q)$, эквивалентны.

3. Покажем, что X плотно в $C(Q,P)$. Действительно, пусть $x \in C(Q,P)$, $x \geq 0$. Для любого натурального n положим $V_n = \{t \in Q : x(t) \leq 1/(n+1)\}$. Тогда элемент $x_n = (x - \frac{1}{n+1}\mathbb{1})_+ \in C(Q, V_n)$, и в силу п. 2 $x_n \in X$. Осталось заметить, что $\lim x_n = x$ в $C(Q,P)$.

4. Пусть $X(V) = \{x|V : x \in X\}$ ($x|V$ – сужение x на V); ясно, что $X(V) \subset C(V,P)$. Пользуясь теоремой Урысона о продолжении и соотношением $X \neq C(Q,P)$, легко показать, что $X(V) \neq C(V,P)$. Будем рассматривать $C(V,P)$

как факторпространство пространства $C(Q,P)$ при факторном отображении $\pi_V(x)=x|V$. Сужение π_V на X будем обозначать ρ_V; в $X(V)$ будем рассматривать факторнорму, соответствующую факторному отображению $\rho_V : X\to X(V)$.

5. Пусть γ_V – отображение вложения $X(V)$ в $C(V,P)$; в силу п. 1 γ_V непрерывно. Пусть $\gamma_V^* : C(V,P)^*\to X(V)^*$ сопряженное отображение к γ_V. Так как $X(V)$ плотно в $C(V,P)$, и $X(V)\neq C(V,P)$, то образ $C(V,P)^*$ при отображении γ_V^* не замкнут в $X(V)^*$ [3, теорема IV.7.9]. Поэтому для любого $\alpha>0$ можно найти функционал $f_\alpha\in C(V,P)^*_+$ такой, что $\|f_\alpha\|>\alpha$ и $\|\gamma_V^*(f_\alpha)\|\le 1$. Возьмем $x\in C(V,P)_+$ такой, что $\|x\|_{C(V)}\le 1$ и $f_\alpha(x)>\alpha$. Пусть $x_n=(x-\frac{1}{n+1}\mathbb{1})_+$, тогда $\|x_n\|_{C(V)}\le\|x\|_{C(V)}\le 1$, и $\lim x_n=x$ в $C(V,P)$. Обозначим через x_α какой-либо x_{n_0}, для которого $f_\alpha(x_{n_0})>\alpha$. Пусть $\tilde f_\alpha=\pi_V^*(f_\alpha)$, тогда $\gamma^*(\tilde f_\alpha)=\rho_V^*\gamma_V^*(f_\alpha)$, поэтому $\|\gamma^*(\tilde f_\alpha)\|\le 1$. С другой стороны, если $\tilde x_\alpha$ – любое положительное продолжение x_α на Q, то $\tilde f_\alpha(\tilde x_\alpha)>\alpha$, и $\tilde x_\alpha$, так же, как и x_α, обращается в нуль в некоторой окрестности P (а именно, в окрестности $\{t\in Q : x(t)<1/(n_0+1)\}$).

6. Пользуясь п. 5, построим по индукции последовательность (V_n) замкнутых окрестностей P, последовательности элементов $x_n\in C(Q,P)_+$ и функционалов $f_n\in C(Q,P)^*$ ($n>0$) такие, что:

а) $Q=V_0\supset V_1\supset \mathrm{Int}\,V_1\supset V_2\supset\ldots\supset V_n\supset \mathrm{Int}\,V_n\supset V_{n+1}\supset\ldots$;

б) $x_n(t)=0$, если $t\notin V_{2n}\setminus \mathrm{Int}\,V_{2n+1}$, и $\|x_n\|_{C(Q)}\le 1$;

в) $f_n(x_n)>n$;

г) $\|\gamma^*(f_n)\|\le 1$.

Положим $G_n=\{t\in Q : x_n(t)>0\}$. По условию теоремы существует подпоследовательность (G_{n_k}) такая, что $P\cap\overline{\bigcup G_{n_k}}=\emptyset$. Пусть U – замкнутая окрестность P такая, что $U\cap\overline{\bigcup G_{n_k}}=\emptyset$. Рассмотрим сужения f'_{n_k} функционалов f_{n_k} на $X_U=C(Q,U)$. В силу п. 2 и неравенства г) последовательность (f'_{n_k}) ограничена в $C(Q,U)^*$. Но $x_{n_k}\in C(Q,U)$, и в силу в) $f'_{n_k}(x_{n_k})>n_k$, что противоречит ограниченности последовательности (x_{n_k}) (см. б)). Теорема доказана.

В связи с этим возникает вопрос о том, насколько велик запас множеств со свойством (R). В направлении ответа на этот вопрос докажем два утверждения.

Предложение 2. В каждом из следующих случаев непустое замкнутое нигде не плотное $P\subset Q$ обладает свойством (R) и, следовательно, примарно:

а) Q – F-пространство [2], а P конечно;

б) Q произвольно, а P – P-множество [4].

Доказательство. а) Достаточно рассмотреть случай, когда P состоит из одной точки: $P=\{q\}$. Пусть (G_n) – последовательность из определения свойства (R). Так как $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_{2n}$ и $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_{2n+1}$ – непересекающиеся открытые F_σ-множества, то в силу определения F-пространства $\overline{\bigcup G_{2n}}\cap\overline{\bigcup G_{2n+1}}=\emptyset$, поэтому либо $q\notin\overline{\bigcup G_{2n}}$, либо $q\notin\overline{\bigcup G_{2n+1}}$.

б) Доказательство сразу следует из определения P-множества.

Замечание. Напомним в связи с предложением 2, что каждое квазиэкстремально несвязное Q является F-пространством.

Теорема 2. Пусть Q — квазиэкстремально несвязно, а P — непустое замкнутое нигде не плотное подмножество Q, не удовлетворяющее условию (R). Тогда существует непрерывное отображение P на $\beta N \setminus N$ (здесь βN — компактификация Чеха-Стоуна счетного дискретного пространства N).

Доказательство. Так как Q квазиэкстремально несвязно и (R) не выполнено для P, то существует последовательность попарно непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств $H_n \subset Q$ $(n > 0)$ такая, что $P \cap \overline{\cup H_{n_k}} \neq \emptyset$ для любой подпоследовательности (H_{n_k}), и $H_n \cap P = \emptyset$ $\forall n$.

Пусть $S = P \cap \overline{\cup H_n}$; так как $\overline{\cup H_n}$ — открыто-замкнуто в Q, то S — открыто-замкнуто в P, поэтому достаточно построить непрерывное отображение S на $\beta N \setminus N$. Определим отображение $\varphi : \overline{\cup H_n} \to \beta N$, полагая $\varphi(q) = n$, если $q \in H_n$, и продолжая полученное отображение по непрерывности на $\overline{\cup H_n}$ (что возможно в силу того, что $\beta(\cup H_n)$ гомеоморфно $\overline{\cup H_n}$; это вытекает из [1, V.1.1]). Ясно, что φ отображает $\overline{\cup H_n}$ на βN и $\varphi(S) \subset \beta N \setminus N$. Покажем, что $\varphi(S) = \beta N \setminus N$. Пусть $t \in \beta N \setminus N$; тогда найдется ультрафильтр $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ подмножеств $A_\gamma \subset N \subset \beta N$ такой, что $\{t\} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma$ и $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \emptyset$. Рассмотрим множества $B_\gamma = S \cap \overline{\bigcup_{n \in A_\gamma} H_n}$; очевидно, $B_\gamma \neq \emptyset$ и $\varphi(B_\gamma) \subset \bar{A}_\gamma$.

Семейство $(B_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — центрировано, следовательно, существует точка $q \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$. Ясно, что $\varphi(q) = t$. Теорема доказана.

Пусть $c(Q)$ — супремум всех кардинальных чисел τ, для которых существует система из τ непустых открытых попарно непересекающихся подмножеств Q ($c(Q)$ обычно называют числом Суслина или типом пространства Q). Известно, что

$c(\beta N \setminus N)$ есть мощность континуума [2]. Отсюда вытекает

Следствие. Если Q — квазиэкстремально несвязно и $c(P)$ меньше мощности континуума, то P удовлетворяет условию (R) и, следовательно, примарное. В частности, если P сепарабельно, то P примарно.

В заключение заметим следующее. Множество $\beta N \setminus N$ имеет тип G_δ в βN, поэтому не примарно в βN (предложение 1). Однако в предположении гипотезы континуума можно построить экстремально несвязное Q и примарное $P \subset Q$, гомеоморфное $\beta N \setminus N$. Тем самым примарность есть свойство, зависящее не только от относительной топологии множества P, но и от расположения P в компакте Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
2. L. Gillman, M. Jerison, Rings of Continuous functions, Princeton, 1960.
3. Х. Шефер, Топологические векторные пространства, М., "Мир", 1971.
4. А.И. Векслер, P-множества в топологических пространствах, ДАН СССР, 193, №3 (1970), 510-513.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.И.ГЕРЦЕНА

XXXI ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Сборник научных трудов

Ленинград
1978

Г.Я.Лозановский, Г.Я.Роткович

ОДНА ТЕОРЕМА О ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЯХ

Настоящая заметка подготовлена к печати вторым автором на основе архива Г.Я.Лозановского.

Пусть всюду далее ψ есть непрерывная, вогнутая на $[0,1]$ функция, такая, что $\psi(0)=0$ и $\psi'(0)=+\infty$.

Для $\alpha>1$ положим

$$u(\alpha)=\inf_{0<r\le 1}\frac{\psi(r)}{\psi(\frac{r}{\alpha})}.$$

Ясно, что функция $u(\alpha)$ не убывает на $[1,+\infty)$ и, следовательно, существует

$$R(\psi)=\lim_{\alpha\to+\infty}u(\alpha)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $R(\psi)$ равно 1 или $+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}u(\alpha)\ge 1$. Допустим, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}u(\alpha)=\tau>1$. Поскольку $\forall\alpha\in[1,+\infty)$ и $\forall r\in(0,1]$

$$\frac{\psi(r)}{\psi(\frac{r}{\alpha^2})}=\frac{\psi(r)}{\psi(\frac{r}{\alpha})}\,\frac{\psi(\frac{r}{\alpha})}{\psi(\frac{r}{\alpha^2})}\ge u(\alpha)^2$$

то отсюда получаем, что

$$u(\alpha^2)\ge u(\alpha)^2 \qquad (1)$$

Из (1) следует, что $\tau\ge\tau^2$, откуда $\tau=+\infty$.

Напомним, что через $M(\psi)$ обозначается пространство Марцинкевича, состоящее из всех тех измеримых на $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\psi)}\overset{df}{=}\sup_{\substack{e\in[0,1]\\ \mu>0}}\frac{\int_E x(t)d\mu)}{\psi(\mu E)}<+\infty$$

(Здесь μ - мера Лебега на $[0,1]$).

Многие свойства пространства $M(\psi)$ и его сопряженного $M(\psi)^*$ зависят от того больше или равен 1 предел

$$\lim_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}$$

см., например, [1],[2],[3].

Ниже мы покажем, что величина последнего предела однозначно определяется по величине $R(\psi)$.

ТЕОРЕМА. Справедливы следующие утверждения.

1. $(\lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}=1)\Longleftrightarrow(R(\psi)=1)$,

2. $(\lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}>1)\Longleftrightarrow(R(\psi)=+\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на ряд простых лемм. Допустим дополнительно, что функция ψ строго возрастает.

ЛЕММА 1. Если $\alpha>1$ и $u(\alpha)=1$, то существует последовательность $r_n\in(0,1]$, такая, что $r_n\to 0$ и

$$\frac{\psi(r_n)}{\psi(r_n/\alpha)}\longrightarrow 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность $\{r_n\}\subset(0,1]$ такую, что $\frac{\psi(r_n)}{\psi(r_n/\alpha)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$. Допустим, что $r_n\not\to 0$. Тогда существуют $c\in(0,1]$ и подпоследовательность $\{r_{n_k}\}$ такая, что $r_{n_k}\to c$. Отсюда

$$\frac{\psi(c)}{\psi(c/\alpha)}=1$$

т.е. $\psi(c)=\psi(c/\alpha)$ вопреки строгой монотонности функции ψ.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha>1$ и $u(\alpha)=1$. Пусть $0<\delta<\alpha-1$. Тогда $u(\alpha+\delta)=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем последовательность $\{r_n\}$ из леммы 1, причем будем считать, что $r_n<1/2$ при всех n. Положим

$$s_n=\frac{r_n(\alpha-\delta)}{\alpha},\quad t_n=\frac{r_n(\alpha+\delta)}{\alpha} \qquad (2)$$

Тогда $0<s_n,t_n<1$ и $\frac{1}{2}s_n+\frac{1}{2}t_n=r_n$. Следовательно,

$$\psi(r_n)\ge\frac{1}{2}[\psi(s_n)+\psi(t_n)],$$

откуда

$$\frac{\psi(r_n)}{\psi(r_n/\alpha)}\ge\frac{1}{2}\Big[\frac{\psi(s_n)}{\psi(r_n/\alpha)}+\frac{\psi(t_n)}{\psi(r_n/\alpha)}\Big].$$

С учетом (2) последнее соотношение можем переписать так:

$$\frac{\psi(r_n)}{\psi(r_n/\alpha)}\ge\frac{1}{2}\Big[\frac{\psi(s_n)}{\psi(s_n/\alpha-\delta)}+\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_n/\alpha+\delta)}\Big] \qquad (3)$$

Заметим, что $\alpha-\delta>1$, поэтому из (3) имеем

$$\frac{\psi(r_n)}{\psi(r_n/\alpha)}\ge\frac{1}{2}[u(\alpha-\delta)+u(\alpha+\delta)],$$

откуда $u(\alpha)=1\geq \frac{1}{2}\,[u(\alpha-\delta)+u(\alpha+\delta)]$ (4)

Так как $u(\alpha-\delta)=1$, то из (4) следует, что $u(\alpha+\delta)=1$

ЛЕММА 3. Если $\alpha>1$ и $u(\alpha)=1$, то $u(\alpha')=1$ при всех $\alpha'\geq 1$ и, следовательно, $R(\psi)=1$.

Справедливость этой леммы непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Так как

$$\lim_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}=\lim_{r\to 0}\frac{\psi(r)}{\psi(r/2)},$$

то $u(2)\leq \lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}$. Следовательно, если

$\lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}=1$, то $u(2)=1$ и по лемме 3 $R(\psi)=1$.

Обратно, если $R(\psi)=1$, то по лемме 1 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}=1$.

Итак, утверждение 1. теоремы доказано. Если же

$\lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}>1$, то $u(2)>1$ и в силу предложения $R(\psi)=+\infty$. Наконец, если $R(\psi)=+\infty$, то (по уже доказанной части I.) с необходимостью $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}>1$.

Осталось заметить, что сделанное вначале дополнительное допущение строгой монотонности ψ не уменьшает общности. Действительно, если ψ произвольная, то существует $\delta\in(0,1]$ такое, что на $(0,\delta]$ ψ строго возрастает и постоянна на $[\delta,1]$. Далее, существует $\varepsilon\in(0,\delta]$, такое, что ψ дифференцируема в точке ε и $\psi'(\varepsilon)>0$. Положим

$$\psi_1(t)=\begin{cases}\psi(t) & \text{при } 0\leq t\leq\varepsilon\\ \psi(\varepsilon)+\psi'(\varepsilon)(t-\varepsilon) & \text{при } \varepsilon\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Функция ψ_1 уже строго возрастает и легко убедиться, что $R(\psi)=R(\psi_1)$ и

$$\lim_{r\to 0}\frac{\psi(2r)}{\psi(r)}=\lim_{r\to 0}\frac{\psi_1(2r)}{\psi_1(r)}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е.М. С е м е н о в. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докторская диссерт., Воронеж, 1968.

[2] Г.Я. Л о з а н о в с к и й. О локализованных функционалах в векторных структурах. Теория функций. Функциональный анализ и их приложения. 1974, 19, 66-80.

[3] Г.Я. Л о з а н о в с к и й. О представлении линейных функционалов в пространствах Марцинкевича. Изв.ВУЗов, Математика, 1978, № 1, 1-11.

А.И.Поволоцкий, Н.М.Гулевич

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ КОММУТИРУЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ДЕРЕВЬЕВ

Деревом назовем компактное локально связное хаусдорфово пространство T, в котором всякая пара точек x, y отделяется третьей точкой z в том смысле, что $T\setminus\{z\}=T_1\cup T_2$, где $T_1\cap T_2=\emptyset$, $x\in T_1$, $y\in T_2$. В работе Исбелла [1] был поставлен вопрос: имеет ли коммутирующее семейство непрерывных отображений дерева в себя общую неподвижную точку. Для гомеоморфизмов ответ положительный [1], в общем же случае даже для метрических деревьев ответ отрицательный [2]. Ниже дается положительное решение проблемы Исбелла для частного случая, когда дерево связное метрическое, а отображения семейства нерастягивающие.

Предварительные замечания. Пусть M компактное метрическое пространство, а F семейство всех нерастягивающих отображений M в себя, снабженное топологией поточечной сходимости. Тогда F компактная топологическая полугруппа с единицей (роль операции исполняет суперпозиция). Если F' подсемейство F всех нерастягивающих отображений M на себя, то F' компактная топологическая подполугруппа полугруппы F.

ЛЕММА 1. Если M_0 компакт в метрическом пространстве и f нерастягивающее отображение M_0 на себя, то f изометрия.

Действительно, можно считать M_0 отличным от точки (иначе утверждение тривиально). Отображение $f\in F'$, где F'

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Под редакцией *Г. П. Акилова*

(Отдельный оттиск)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск, 1977

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЭТИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А. В. Бухвалов, *Г. Я. Лозановский*

§ 1. Основные свойства идеальных пространств

1. Многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются идеальными пространствами (пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича, со смешанной нормой). Теория таких пространств является ветвью общей теории векторных (банаховых) решеток, основы которой были построены в тридцатых годах Л. В. Канторовичем. Многие результаты, которые в настоящем обзоре будут приведены только для случая идеальных пространств, справедливы на самом деле для существенно более широких классов банаховых решеток. Мы сознательно жертвуем здесь общностью формулировок, так как хотим свести к минимуму использование терминологии абстрактной теории векторных решеток. По этой же причине мы ограничиваемся случаем σ-конечной меры.

Всюду далее (T, Σ, μ) (возможно, с индексами) есть пространство с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой, $S=S(\mu)$ — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (эквивалентные по мере μ функции и множества отождествляются). Для $E\in\Sigma$ через χ_E обозначается характеристическая функция E. Для $x\in S$ полагаем $\operatorname{supp} x=\{t\in T: x(t)\neq 0\}$. Для любого $A\subset S$ $\operatorname{supp} A$ означает наименьшее $E\in\Sigma$, содержащее $\operatorname{supp} x$ для каждого $x\in A$. Пусть $x, y\in S$. Запись $x\geqslant y$ означает, что $x(t)\geqslant y(t)$ для почти всех $t\in T$. Символы $x\vee y$, $x\wedge y$ определяются формулами

$$(x\vee y)(t)=\max\{x(t), y(t)\},$$
$$(x\wedge y)(t)=\min\{x(t), y(t)\},\ t\in T.$$

Напомним, что S есть *полная векторная решетка* (*K-пространство*), т. е. каждое порядково ограниченное $A\subset S$ имеет супремум ($\sup A$) и инфимум ($\inf A$). Элементы x, $y \in S$ называются дизъюнктными (обозначение xdy), если $|x| \wedge |y| = 0$. Под (μ)-топологией на S понимается топология сходимости по мере μ, которая может быть задана с помощью метрики $\rho(x, y) = \int \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\, u d\mu$, $x, y \in S$; здесь u — любая функция такая, что $u \geqslant 0$, $u \in L^1(\mu)$, $\operatorname{supp} u = T$. Запись $x_n \xrightarrow{(\mu)} x$ $(x_n, x \in S)$ означает, что последовательность $x_n \to x$ в (μ)-топологии. Запись $x_n \downarrow$ означает, что $x_n \geqslant x_m$ при $n \leqslant m$. Запись $x_n \downarrow x$ означает, что $x_n(t) \downarrow x(t)$ п. в. Подобным же образом определяется $x_n \uparrow$ и $x_n \uparrow x$.

Идеальным пространством (ИП) на (T, Σ, μ) называется векторное подпространство X в S такое, что $(x \in X$, $y \in S$, $|y| \leqslant |x| \Rightarrow y \in X)$.

Норма $\|\cdot\|$ на ИП X называется *монотонной*, если $(x, y \in X$, $|x| \leqslant |y| \Rightarrow (\|x\| \leqslant \|y\|))$.

Нормированным (банаховым) идеальным пространством на (T, Σ, μ) (соответственно НИП и БИП) называется ИП на (T, Σ, μ), снабженное монотонной (монотонной банаховой) нормой.

Таким образом, ИП является порядково полной векторной решеткой (K-пространством), НИП (соответственно БИП) является порядково полной нормированной (соответственно банаховой) решеткой. Отметим, что любые две монотонные банаховы нормы на одном и том же ИП эквивалентны.

2. Теорема 1.2.1. *Пусть X есть* БИП *на* (T, Σ, μ), *причем* $\operatorname{supp} X = T$. *Если* $\mu T < \infty$, *то существует* $u \in S_+$ *такое, что*

$$L^\infty(\mu) \subset \{xu : x \in X\} \subset L^1(\mu).$$

Эта теорема показывает, что если $\mu(T) < \infty$, то БИП на (T, Σ, μ) всегда можно считать „зажатым" между $L^\infty(\mu)$ и $L^1(\mu)$.

3. Пусть X есть ИП на (T, Σ, μ). Аддитивный и однородный функционал f на X называется *порядково ограниченным* (или *регулярным*), если он ограничен на каждом порядковом интервале из X, т. е. на каждом множестве вида $\{z \in X:\ x \leqslant z \leqslant y\}$, где $x, y \in X$, $x \leqslant y$. Пространство $X^\sim$ всех порядково ограниченных функционалов на X при естественном упорядочении есть K-пространство, т. е. полная векторная решетка.

Функционал $f \in X^\sim$ называется *порядково непрерывным* (или *вполне линейным*), если $(x_n \in X,\ x_n \downarrow 0) \Rightarrow (f(x_n) \to 0)$.

Функционал $f \in X^\sim$ называется *сингулярным* (или *анормальным*), если $\operatorname{supp}\{x \in X : |f|(|x|) = 0\} = \operatorname{supp} X$.

Совокупность $X_n^\sim$ всех порядково непрерывных и совокупность $X_s^\sim$ всех сингулярных функционалов на X суть дополнительные друг к другу полосы (компоненты) в K-пространстве $X^\sim$. Тем самым каждый $f \in X^\sim$ однозначно представим в виде $f = f_n + f_s$, где $f_n \in X_n^\sim$, $f_s \in X_s^\sim$.

Если X есть НИП, то $X^* \subset X^\sim$; если X есть БИП, то $X^* = X^\sim$. Здесь X^* — банахово сопряженное к X; X^* есть порядково полная банахова решетка. Пусть по-прежнему X есть ИП на (T, Σ, μ).

Теорема 1.3.1. а) *Каждая полоса в $X^\sim$ секвенциально замкнута в слабой топологии $\sigma(X^\sim, X)$;*

б) *если $X^\sim$ разделяет точки из X, то топология Макки $\tau(X, X^\sim)$ может быть задана набором монотонных полунорм.*

в) *если $X_n^\sim$ разделяет точки из X, то каждый порядковый интервал в X компактен в топологии $\sigma(X, X_n^\sim)$, а топология Макки $\tau(X, X_n^\sim)$ может быть задана набором монотонных полунорм.*

4. Пусть по-прежнему X есть ИП на (T, Σ, μ). Дуальное ИП к X определяется формулой

$$X' = \{x' \in S : \operatorname{supp} x' \subset \operatorname{supp} X,\ xx' \in L^1(\mu)\ \ \forall x \in X\}.$$

По каждому $x' \in X'$ можно построить $f_{x'} \in X_n^\sim$ по формуле

$$f_{x'}(x) = \int_T xx'd\mu,\ x \in X.$$

Теорема 1.4.1. *Отображение $x' \to f_{x'}$ есть векторно-решеточный изоморфизм X' на $X_n^\sim$.*

Пусть теперь $\operatorname{supp} X' = \operatorname{supp} X$. Тогда $X \subset X''$, $X''' = X'$. Если $X'' = X$, то X называется *(o)-рефлексивным* (или *рефлексивным по Накано*).

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Норма Лоренца $\|\cdot\|_L$ на X определяется формулой

$$\|x\|_L = \inf\{\lim_{n\to\infty} \|x_n\| : \{x_n\} \subset X,\ 0 \leqslant x_n \uparrow |x|\},\ x \in X.$$

$\|\cdot\|_L$ есть монотонная норма на X.

Положим $X^\times=\{x'\in X' : f_{x'}\in X^*\}$. Для $x'\in X^\times$ полагаем $\|x'\|^\times=\sup\{|f_{x'}(x)| : x\in X,\ \|x\|\leqslant 1\}$. $\|\cdot\|^\times$ есть монотонная норма на $X^\times$.

Теорема 1.4.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Тогда* $\operatorname{supp} X'=\operatorname{supp} X^\times=\operatorname{supp} X$ *(тем самым $X^*\cap X_n^\sim$ разделяет точки из X). Кроме того, $\|x\|_L=\|x\|^\times$ для любого $x\in X$.*

Если $(X, \|\cdot\|)$ есть БИП, то $X^\times=X'$; в этом случае вместо $\|\cdot\|^\times$ будем писать $\|\cdot\|'$ и называть норму $\|\cdot\|'$ дуальной к норме $\|\cdot\|$.

Теорема 1.4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть БИП на (T, Σ, μ), причем* $\operatorname{supp} X=T$. *Тогда а) для любых $x\in X$, $x'\in X'$ справедливо $\int_T |xx'|\,d\mu\leqslant\|x\|\cdot\|x'\|'$; б) для любого $h\in L^1(\mu)$ справедливо*

$$\inf\{\|x\|\cdot\|x'\|' : x\in X,\ x'\in X',\ xx'=h\}=\int_T |h|\,d\mu.$$

5. Теорема 1.5.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — НИП на (T, Σ, μ), причем полнота по норме не предполагается.*

а) *Если $x_n\in X$, $\|x_n\|\to 0$, то $x_n\xrightarrow{(\mu)}0$. Тем самым оператор вложения X в S непрерывен.*

б) *Если $\{x_n\}\in X$ есть последовательность Коши, то она (μ)-сходится к некоторому $x\in S$.*

Теорема 1.5.2. *Для любого НИП $(X, \|\cdot\|)$ на (T, Σ, μ) следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *$(X, \|\cdot\|)$ полно по норме;*

(б) *если $x_n\in X_+$, $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|<\infty$, то $\sum_{n=1}^\infty x_n\in X$;*

(в) *если $x_n\in X_+$, $x_n d x_m$ при $n\neq m$, $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|<\infty$, то $\sum_{n=1}^\infty x_n\in X$.*

6. В теории нормированных решеток важную роль играют свойства (o)-непрерывности, (o)-полунепрерывности и монотонной полноты нормы. Мы приведем эти свойства применительно к НИП, но в случае произвольных нормированных решеток они определяются аналогично.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Говорят, что элемент $x\in X$ имеет *(o)-непрерывную* (или *абсолютно непрерывную*) *норму*, если $(|x|\geqslant x_n\downarrow 0)\Rightarrow(\|x_n\|\to 0)$. Если $\mu(T)<\infty$, то $x\in X$ имеет (o)-непрерывную норму тогда и только тогда, когда для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что $(E\in\Sigma,\ \mu E<\delta)\Rightarrow(\|x\chi_E\|<\varepsilon)$.

Множество $X_{(A)}$ всех $x\in X$ с (o)-непрерывной нормой есть НИП; $X_{(A)}$ замкнуто в $(X, \|\cdot\|)$.

Говорят, что в $(X, \|\cdot\|)$ *выполнено условие* (A) *(условие (o)-непрерывности нормы)*, если $X=X_{(A)}$, т. е. если каждый $x\in X$ имеет (o)-непрерывную норму.

Теорема 1.6.1. *Для любого БИП $(X, \|\cdot\|)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (A);*

(2) *если $x_n\downarrow 0$ в X и $(x_n-x_{n+1})\,d\,x_{n+1}$ для $\forall n$, то $\|x_n\|\to 0$;*

(3) *$X^*=X_n^\sim$;*

(4) *каждый порядковый интервал в X слабо компактен;*

(5) *в X выполнено условие (u) Пелчинского: для каждой слабо фундаментальной последовательности $x_n\in X$ существует такая последовательность $y_n\in X$, что $\sum_{n=1}^\infty|f(y_n)|<\infty$ для $\forall f\in X^*$ и последовательность $x_n-\sum_{i=1}^n y_i$ слабо сходится к нулю;*

(6) *в X не существует подпространства изоморфного l^∞;*

(7) *для $\forall x\in X$ $\exists x'\in X'$ такой, что $\|x'\|'=1$ и $\|x\|=\int_T xx'\,d\mu$;*

(8) $\operatorname{supp} X_{(A)}=\operatorname{supp} X$ *и существует проектор из X на $X_{(A)}$;*

(9) *при естественном сложении X в X^{**} БИП X оказывается идеалом в X^{**};*

Если мера μ сепарабельна, то каждое из условий (1) — (9) *эквивалентно условию*

(10) *X — сепарабельно.*

Теорема 1.6.2. *Для любого БИП $(X, \|\cdot\|)$ справедливо $(X'')_{(A)}=X_{(A)}$ и $\|x\|''=\|x\|$ для $\forall x\in X_{(A)}$.*

7. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Говорят, что элемент $x\in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму, если $(0\leqslant x_n\uparrow|x|)\Rightarrow(\|x_n\|\to\|x\|)$, т. е. если $\|x\|_L=\|x\|$, где $\|\cdot\|_L$ — норма Лоренца. Если $\mu(T)<\infty$, то $x\in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму тогда и только тогда, когда

для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$(E\in\Sigma,\ \mu(T\setminus E)<\delta)\Rightarrow(\|x\chi_E\|>\|x\|-\varepsilon).$$

Говорят, что в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено *условие (C) (условие (o)-полунепрерывности нормы)*, если каждый $x\in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму. Ясно, что $(A)\Rightarrow(C)$.

Теорема 1.7.1. *Если в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено (C), то каждая порядково ограниченная последовательность Коши в X сходится.*

Теорема 1.7.2. *Для любого* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (C);*

(2) *если $x_n\in X$, $\|x_n\|\leqslant 1$ для $\forall n$, $x_n \xrightarrow{\mu} x\in X$, то $\|x\|\leqslant 1$;*

(3) $\|x\|=\|x\|^{\times\times}$ *для* $\forall x\in X$;

(4) *для любых $x\in X_+$ и $\varepsilon>0$ найдутся $y\in X_+$, $y^\times\in X_+^\times$ такие, что $(1-\varepsilon)x\leqslant y\leqslant(1+\varepsilon)x$, $\|y^\times\|^\times=1$, $\|y\|=\int\limits_T yy^\times d\mu$.*

8. Говорят, что в НИП $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (B) (условие монотонной полноты нормы), если $(0\leqslant x_n\uparrow$, $\sup\|x_n\|<\infty)\Rightarrow(\sup x_n\in X)$.

Теорема 1.8.1. *Пусть в* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *выполнено условие (B). Тогда* а) $(X, \|\cdot\|)$ *полно по норме;* б) $X=X''$ *и $\|\cdot\|$ эквивалентна $\|\cdot\|''$.*

Теорема 1.8.2. *Для любого* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено (B);*

(2) *если $0\geqslant x_n\uparrow$, $x_n\in X$, $(x_{n+1}-x_n)dx_n$ для всех n, $\sup\|x_n\|<\infty$, то $\sup x_n\in X$.*

(3) *существует константа $c>0$ такая, что если $x_n\in X$, $\|x_n\|\leqslant 1$ для всех n, $x_n\xrightarrow{(\mu)} x\in S$, то $x\in X$ и $\|x\|\leqslant c$;*

(4) *$X=X^{\times\times}$ по запасу элементов.*

9. Особый интерес представляет конъюнкция свойств (B) и (C).

Теорема 1.9.1. *Для любого* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в $(X, \|\cdot\|)$ выполнены условия (B) и (C);*

(2) *единичный шар $\{x\in X: \|x\|\leqslant 1\}$ (μ)-замкнут в S;*

(3) *$X=X^{\times\times}$ и $\|\cdot\|=\|\cdot\|^{\times\times}$;*

(4) *любая центрированная система замкнутых шаров в X имеет непустое пересечение;*

(5) *X — банахово и существует проектор единичной нормы из X^{**} на X (при естественном вложении X в X^{**}).*

Теорема 1.9.2 дополняет теорему 1.4.3.

Теорема 1.9.2. *Пусть в* БИП $(X, \|\cdot\|)$ *выполнены условия (B) и (C) и* $\operatorname{supp}X=T$. *Тогда для $\forall h\in L^1(\mu)$ $\exists x\in X$, $\exists x'\in X'$ такие, что $h=xx'$ и $\|x\|\cdot\|x'\|=\int\limits_T|h|\,d\mu$.*

Теорема 1.9.3. *Для любого* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *в $(X^*, \|\cdot\|^*)$ и $(X^\times, \|\cdot\|^\times)$ выполнены условия (B) и (C).*

10. *KB-пространством* (или *пространством Канторовича — Банаха*) называется НИП, в котором выполнены условия (A) и (B). KB-пространство всегда полно по норме.

Теорема 1.10.1. *Для любого* БИП $(X, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *X есть KB-пространство;*

(2) *X слабо секвенциально полно;*

(3) *при естественном вложении X в X^{**}* БИП *X оказывается полосой (компонентой) в X^{**};*

(4) *в X нет подпространств, изоморфных пространству (c_0).*

11. Теорема 1.11.1. *Для любого* БИП *X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *X рефлексивно;*

(2) *X есть KB-пространство и X^* есть KB-пространство;*

(3) *X есть KB-пространство и в X' выполнено условие (A);*

(4) *X' рефлексивно;*

(5) *в X не существует подпространства, изоморфного c_0, и не существует подпространства, изоморфного l^1.*

12. Остановимся кратко на одном важном классе БИП — симметричных пространствах, теория которых в настоящее время очень интенсивно развивается, особенно в связи с задачами интерполяции операторов. Для простоты ограничимся случаем пространств на отрезке $[0, 1]$.

Итак, пусть (T, Σ, μ) есть отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. БИП X на $[0, 1]$ называется *симметричным*, если $(x\in X,\ y\in S,\ x$ и y равноизмеримы$)\Rightarrow(y\in X$ и $\|x\|=\|y\|)$. Для любого симметричного X справедливо $L^\infty\subset X\subset L^1$.

Теорема 1.12.1. *Пусть X — симметричное пространство на $[0, 1]$. Дуальное пространство X' также симметрично. Если $X\neq L^\infty$, то $X_{(A)}$ совпадает с замыканием*

L^∞ в X. Если $X \neq X_{(A)}$, то не существует проектора из X на X_A и $X_{(A)}$ не изоморфно сопряженному банахову пространству.

Многие свойства симметричного пространства X зависят от его фундаментальной функции φ, где

$$\varphi(t) = \|\chi_{[0,\,t]}\|, \quad t \in [0,\ 1].$$

К числу симметричных пространств относятся классические пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Приведем определения пространств Лоренца и Марцинкевича, которые в классе симметричных пространств играют важную „экстремальную" роль. Для $x \in S[0,\ 1]$ через x^* обозначается невозрастающая перестановка функции $|x|$.

Пусть ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0,\ 1]$ функция такая, что $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ при $t \geqslant 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\psi(t)} = 0.$$

Пространство $M(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0,\ 1]$ таких, что

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h<1} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(t)\,dt < \infty.$$

Пространство $\Lambda(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0,\ 1]$ таких, что

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^* d\psi < \infty.$$

Эти пространства и их нормы дуальны друг к другу.

13. Остановимся более подробно на строении пространства $X_s^\sim$, где X есть ИП на $(T,\ \Sigma,\ \mu)$.

Для $f \in X^\sim$, $E \in \Sigma$ определим функционал $f_E \in X^\sim$ формулой

$$f_E(x) = f(x \cdot \chi_E), \quad x \in X.$$

Функционал $f \in X_s^\sim$ называется *локализованным*, если для всякого $F \in \Sigma$ с $\mu(F)>0$ найдется $E \in \Sigma$ такое, что $E \subset F$, $\mu(E)>0$ и $f_E = 0$. Совокупность всех локализованных функционалов на X обозначим через $X_{\mathrm{loc}}^\sim$. $X_{\mathrm{loc}}^\sim$ есть идеал в $X_s^\sim$. Как отмечено в п. 3, $X^\sim = X_n^\sim \oplus X_s^\sim$. В приложениях бывает важно иметь равенство $X^\sim = X_n^\sim \oplus X_{\mathrm{loc}}^\sim$, т. е. $X_s^\sim = X_{\mathrm{loc}}^\sim$. В случае L^∞, очевидно, имеем $(L^\infty)_{\mathrm{loc}}^\sim = (L^\infty)_s^\sim$, и мы получаем часто используемую теорему Иосиды — Хьюита.

Теорема 1.13.1. $(L^\infty)^* = L^1 \oplus (L^\infty)_{\mathrm{loc}}^\sim$.

Выясним, когда еще $X_s^\sim = X_{\mathrm{loc}}^\sim$.

Теорема 1.13.2. *Пусть X есть ИП, $f \in X_s^\sim$. Пусть существует $u \in X_+$ такое, что $|f|(x) = \lim\limits_{n\to\infty} |f|(x \wedge nu)$ для всех $x \in X_+$. Тогда $f \in X_{\mathrm{loc}}^\sim$.*

Теорема 1.13.3. *Пусть X есть БИП, причем X квазиравномерно выпукло (это значит, что существует число $r>0$ такое, что $\|x_1+x_2\| < 2-r$ для любых $x_1,\ x_2 \in X_+$ с $\|\bar{x}_1\| \leqslant 1$; $\|x_2\| \leqslant 1$, $x_1 d x_2$). Тогда X^* есть КВ-пространство и $X_s^\sim = X_{\mathrm{loc}}^\sim$.*

Остановимся на двух конкретных пространствах.

Теорема 1.13.4. *Если X есть произвольное пространство Орлича на $[0,\ 1]$, то $X_s^\sim = X_{\mathrm{loc}}^\sim$.*

Теорема 1.13.5. *Пусть $M(\psi)$ есть пространство Марцинкевича. Тогда*

а) *если* $\varliminf\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$, *то* $M(\psi)_s^\sim = M(\psi)_{\mathrm{loc}}^\sim$;

б) *если* $\varliminf\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, *то* $M(\psi)_s^\sim \neq M(\psi)_{\mathrm{loc}}^\sim$;

более того, в этом случае существует $f \in M(\psi)_s^\sim$, $f \geqslant 0$ такой, что $\|f_E\| = 1$ для всех $E \in \Sigma$ с $\mu(E)>0$.

14. В этом пункте будут сформулированы результаты о замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций, которые находят приложения, например, в выпуклом анализе. Их доказательства опираются на теорему 1.13.1 и некоторые факты из теории векторных решеток. Мы для простоты ограничимся случаем пространства $L^1(\mu)$, хотя большая часть изложенного материала допускает обобщение на широкие классы векторных решеток.

Пусть $\pi: L^1(\mu) \to L^1(\mu)^{**}$ — оператор естественного вложения. Тогда $\pi(L^1(\mu))$ есть полоса в $L^1(\mu)^{**}$. Обозначим через $\mathcal{P}$ оператор проектирования $(L^1(\mu))^{**}$ на $\pi(L^1(\mu))$ ($\mathcal{P}$ есть проектор в смысле теории векторных решеток).

Теорема 1.14.1. *Пусть V — непустое выпуклое множество в $L^1(\mu)$, W — замыкание множества $\pi(V)$ в $L^1(\mu)^{**}$ в топологии $\sigma(L^1(\mu)^{**},\ L^1(\mu)^*)$. Тогда*

а) *если $V(\mu)$-замкнуто в $L^1(\mu)$, то $\mathscr{P}(W)=\pi(V)$;*
б) *если V ограничено по норме в $L^1(\mu)$ и $\mathscr{P}(W)=\pi(V)$, то V (μ)-замкнуто в $L^1(\mu)$.*

Следствие 1.14.2. *Пусть Z есть ИП на (T, Σ, μ) такое, что* $\operatorname{supp} Z=T$ *и* $Z\subset L^\infty(\mu)$ *(в частности, можно взять $Z=L^\infty(\mu)$). Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в $L^1(\mu)$, (μ)-замкнутые в $L^1(\mu)$. Если одно из них ограничено по норме в $L^1(\mu)$, то существует $z\in Z$ такое, что*

$$\sup\left\{\int_T xz d\mu : x\in V_1\right\}<\inf\left\{\int_T xz d\mu : x\in V_2\right\}.$$

Следствие 1.14.3. *Пусть $\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — центрированная система выпуклых, ограниченных по норме, (μ)-замкнутых подмножеств в $L^1(\mu)$. Тогда $\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi\neq\varnothing$.*

Следствие 1.14.4. *Пусть $\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — центрированная система выпуклых, (μ)-ограниченных, (μ)-замкнутых подмножеств в $S(\mu)$, причем $V_\xi\subset S(\mu)_+$ для всех ξ. Тогда $\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi\neq\varnothing$.*

Следствие 1.14.5. *Пусть V_1, V_2 — выпуклые, ограниченные по норме, (μ)-замкнутые подмножества в $L^1(\mu)$. Тогда*
а) *множества V_1+V_2 и $\operatorname{conv}(V_1\cup V_2)$ (μ)-замкнуты;*
б) *существуют $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$ такие, что*

$$\|x_1-x_2\|=\inf\{\|y_1-y_2\|: y_1\in V_1,\ y_2\in V_2\}.$$

Следствие 1.14.6. *Пусть V — непустое, выпуклое, ограниченное по норме, (μ)-замкнутое подмножество в $L^1(\mu)$ и пусть $E\in\Sigma$. Тогда множество $\{x\chi_E : x\in V\}$ (μ)-замкнуто в $L^1(\mu)$.*

15. С тех пор как в 1972 г. П. Энфло построил пример сепарабельного рефлексивного банахова пространства без свойства аппроксимации, появился ряд работ, посвященных уточнению и усовершенствованию его конструкции. Однако все построенные пространства типа Энфло не удавалось превратить в БИП. Лишь совсем недавно А. Шанковскому удалось построить пример БИП без свойства аппроксимации, но БИП в этом примере не являлось рефлексивным банаховым пространством. Опираясь на существование БИП, построенного А. Шанковским, первому автору удалось построить пример сепарабельного рефлексивного БИП без свойства аппроксимации, а следовательно, и без базиса. При этом используются следующие результаты, интересные и сами по себе.

Теорема 1.15.1. *Пусть X — БИП с условием (A), E — банахово пространство, $U:E\to X$ — компактный оператор. Тогда существует рефлексивное БИП $Y\subset X$ такое, что $U(E)\subset Y$ и оператор $U:E\to Y$ является компактным.*

Теорема 1.15.2. *Если X — БИП с условием (A), в котором не выполнено свойство аппроксимации, то существует рефлексивное БИП $Y\subset X$ без свойства аппроксимации.*

§ 2. Представление сопряженного пространства к БИП

1. В этом параграфе (T, Σ, μ) — по-прежнему пространство с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой (заметим, впрочем, что условие σ-конечности можно заменить существенно более слабым условием).

Мы будем заниматься задачей представления пространства $X^\sim$ для произвольного ИП на (T, Σ, μ); напомним, что если X есть БИП, то $X^*=X^\sim$. Таким образом, мы рассматриваем задачу несколько более общую, чем задача представления сопряженного пространства к БИП.

Напомним также, что $X_n^\sim$ допускает удобное представление в виде дуального пространства (см. § 1.4).

Через M в этом параграфе будем обозначать пространство всех ограниченных конечно-аддитивных мер ν на Σ таких, что $(E\in\Sigma,\ \mu(E)=0)\Rightarrow(|\nu|(E)=0)$; за $\|\nu\|$ принимаем полную вариацию ν. M есть банахова решетка, являющаяся (L)-пространством в смысле Какутани (ибо $\|\nu_1\|+\|\nu_2\|=\|\nu_1+\nu_2\|$ при $\nu_1, \nu_2\in M_+$).

Напомним, что $(L^\infty(\mu))^*$ векторно-решеточно изоморфно и изометрично M; при этом $f\in(L^\infty(\mu))^*$ соответствует $\nu\in M$, задаваемая формулой

$$\nu(E)=f(\chi_E),\ E\in\Sigma.$$

2. Пусть X — произвольное ИП на (T, Σ, μ). *Представлением* пространства $X^\sim$ будем называть всякий аддитивный и однородный оператор $A:X^\sim\to M$, удовлетворяющий условиям:

а) A взаимнооднозначен;

б) A положителен, т. е. $Af\geqslant 0$ при $f\geqslant 0$.
Множество всех представлений пространства $X^\sim$ обозначим через $\mathscr{R}(X)$.

Теорема 2.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество $\mathscr{R}(X)$ непусто;*

(2) *существует $A\in\mathscr{R}(X)$ такой, что $\mathscr{A}(f\vee g)=Af\vee Ag$ для всех f, $g\in X^\sim$;*

(3) *существует $A\in\mathscr{R}(X)$ такой, что $A(X^\sim)$ есть идеал в M и A есть векторно-решеточный изоморфизм $X^\sim$ на $A(X^\sim)$;*

(4) *существует $F\in(X^\sim)^\sim$ такой, что $F(f)>0$ для всех $f>0$ ($f\in X^\sim$).*

Для случая, когда X есть пространство Орлича, Т. Андо [4] была построена весьма остроумная конструкция представления A, удовлетворяющая условию (2) теоремы 2.2.1.

Однако, как показывает следующая теорема, даже в случае, когда X есть пространство Марцинкевича на отрезке, множество $\mathscr{R}(X)$ может быть пусто.

Теорема 2.2.2. *Пусть $M(\psi)$ есть пространство Марцинкевича на* $[0, 1]$. *Для того чтобы $\mathscr{R}(M(\psi))$ было непусто, необходимо, чтобы выполнялись следующие два условия:*

$$a)\ \lim_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1;\quad б)\ \overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=2.$$

В частности, $\mathscr{R}(M(\psi))$ пусто для важного частного случая $\psi(t)=t^\alpha$, где $0<\alpha<1$, ибо в этом случае не выполняется условие б).

3. Так как M есть (L)-пространство, то по известной теореме Какутани M векторно-решеточно изоморфно и изометрично некоторому пространству $L^1(\mu^*)$, где (T^*, Σ^*, μ^*) есть пространство с неотрицательной счетно аддитивной (не σ-конечной) мерой μ^*, удовлетворяющее условиям: а) для любого $E\in\Sigma^*$ с $\mu^*(E)>0$ найдется $F\in\Sigma^*$ такое, что $F\subset E$ и $0<\mu^*(F)<\infty$; б) $S(\mu^*)$ есть K-пространство.

Заметим, что пространство (T^*, Σ^*, μ^*) и упомянутый изоморфизм M на $L^1(\mu^*)$ в определенном смысле определяются однозначно.

Далее будем отождествлять M с $L^1(\mu^*)$ и с $L^\infty(\mu)^*$.

Идея дальнейших построений заключается в следующем: вместо представлений $A:X^\sim\to M=L^1(\mu^*)$ рассматривать „обобщенные представления"

$$R:X^\sim\to S(\mu^*).$$

4. Нам понадобятся некоторые сведения из общей теории векторных решеток. Пусть E — векторная решетка. Элемент $\mathbf{1}\in E_+$ называется единицей в E, если $x\wedge\mathbf{1}>0$ для всех $x>0$ ($x\in E$). Пусть x, $y\in E$; говорят, что x есть осколок элемента y, если $(y-x)dx$.

Пусть теперь E есть K-пространство. Существует K-пространство W, обладающее следующими свойствами: а) E есть идеал в W; б) если $w\in W$ и wdx для всех $x\in E$, то $w=0$; в) любое подмножество в W, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, порядково ограничено в W.

Пространство W определяется по E в известном смысле однозначно, оно называется *максимальным расширением* E и обозначается $\mathfrak{M}(E)$. Заметим, например, что $\mathfrak{M}(L^1(\mu))=S(\mu)$ (этот пример хорошо поясняет смысл понятия максимального расширения).

5. Пусть X и Y произвольные ИП на (T, Σ, μ). Для $f\in X^\sim$, $u\in X$ построим $f_{(u)}\in L^\infty(\mu^*)$ по формуле $f_{(u)}(x)=f(xu)$, $x\in L^\infty(\mu)$.

Определение. Функционалы $f\in X^\sim$ и $g\in Y^\sim$ будем называть *дизъюнктными* (обозначение: $f\mathscr{D}g$), если для любых $u\in X^+$ и $v\in Y^+$ функционалы $f_{(u)}$ и $g_{(v)}$ дизъюнктны в обычном смысле как элементы K-пространства $L^\infty(\mu)^*$.

Заметим, что f и g в этом определении не являются элементами одного и того же K-пространства, поэтому об их дизъюнктности в обычном смысле говорить не приходится.

Обозначим теперь через $\mathbf{1}^*$ функцию, тождественно равную единице на T^*. В пространстве $\mathfrak{M}(X^\sim)$ фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}$.

Теорема 2.5.1. *Существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X есть полоса в $S(\mu^*)$, а R_X есть векторно-решеточный изоморфизм $\mathfrak{M}(X^\sim)$ на V_X, удовлетворяющая условиям: (1) для любых $f\in X^\sim$, $g\in L^\infty(\mu)^*$ справедливо $(f\mathscr{D}g)\Leftrightarrow(R_Xf\,dg)$; (2) $R_X(\mathbf{1})$ есть осколок элемента $\mathbf{1}^*$.*

Оператор R_X будем называть *канонической реализацией* пространства $X^\sim$.

Теорема 2.5.2. *Пусть R_X и R_Y суть канонические реализации пространств $X^\sim$ и $Y^\sim$. Тогда для любых $f\in X^\sim$ и $g\in Y^\sim$ справедливо*

$$(f\mathcal{D}g)\Leftrightarrow(\hat{R}_X f d\hat{R}_Y g).$$

6. В заключение этого параграфа приведем один результат, родственный теоремам 1.4.3 и 1.9.2.

Теорема 2.6.1. *Пусть X есть* БИП *на (T, Σ, μ). Положим*

$$H=\{f_{(u)}: f\in X^*,\ u\in X\}.$$

Тогда H есть полоса в $L^\infty(\mu)^*$ и для $\forall h\in H$ справедливо

$$\|h\|_{L^\infty(\mu)^*}=\inf\{\|f\|_{X^*}\cdot\|u\|_X: f\in X^*,\ u\in X,\ f_{(u)}=h\}.$$

§ 3. Интегральное представление линейных операторов

1. В этом параграфе мы приведем обзор результатов, касающихся интегрального представления линейных операторов в виде $(Ux)(s)=\int K(t,s)\,x(t)\,d\mu_1(t)$, где ядро $K(t, s)$ — измеримая функция двух переменных. Основополагающие результаты в этой области были получены во второй половине 30-х годов в работах И. М. Гельфанда [14], Н. Данфорда и Б. Петтиса [20], Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха [26]. Здесь будут изложены результаты, являющиеся продолжением и обобщением этих классических исследований, полученные в течение последнего десятилетия.

Пусть (T_i, Σ_i, μ_i) $(i=1, 2)$ — пространства с полной σ-конечной мерой, (T, Σ, μ) — произведение этих пространств. Всюду далее в этом параграфе через X (соответственно Y) обозначается некоторое идеальное пространство на (T_1, Σ_1, μ_1) (соответственно (T_2, Σ_2, μ_2)).

Линейный оператор $U: X\to Y$ называется *регулярным*, если он множества, ограниченные по упорядочению, переводит в множества, ограниченные по упорядочению ($\Leftrightarrow U$ представим в виде разности двух положительных линейных операторов). Пространство всех регулярных операторов $L^\sim(X, Y)$, упорядоченное при помощи конуса положительных операторов, является K-пространством.

Оператор $U\in L^\sim(X, Y)$ называется *порядково непрерывным*, если из $x_n\downarrow 0$ в X следует, что $(Ux_n)(s)\to 0$ μ_2-п. в. $(S\in T_2)$. Пространство $L_n^\sim(X, Y)$ всех порядково непрерывных линейных операторов является полосой (компонентой) в $L^\sim(X, Y)$.

2. Оператор $U: X\to Y$ называется *интегральным*, если существует μ-измеримая функция $K(t, s)$ $(t\in T_1,\ s\in T_2)$ такая, что для любого $x\in X$ имеем

$$(Ux)(s)=\int K(t,s)\,x(t)\,d\mu_1(t). \tag{1}$$

Очевидно, что $U\in L_n^\sim(X, S(\mu_2))$, но, вообще говоря, U может не входить в $L^\sim(X, Y)$. Отметим, что $U\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $K(t, s)\geqslant 0$ μ-п. в. Дадим первый критерий интегральной представимости оператора.

Теорема 3.2.1. *Интегральные регулярные операторы, действующие из X в Y, образуют полосу в K-пространстве $L^\sim(X, Y)$, порожденную множеством вырожденных операторов*

$$\{\Gamma_{x',y}: x'\in X',\ y\in Y\},\ \text{где}\ \Gamma_{x'y}(x)=\left(\int xx'd\mu\right)y\ \ (x\in X).$$

Следствие 3.2.2. *Интегральный оператор U с ядром $K(t, s)$ входит в $L^\sim(X, Y)$ тогда и только тогда, когда оператор с ядром $|K(t, s)|$ действует из X в Y. При этом*

$$[|U|(x)]\,(s)=\int|K(t,s)|\,x(t)\,d\mu_1(t)\ (x\in X).$$

3. Приведенный в п. 2 критерий интегральной представимости носит „неявный", невнутренний для оператора характер. Однако из теоремы 3.2.1 может быть получен критерий в терминах свойств самого оператора:

Теорема 3.3.1. *Пусть $U: X\to Y$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *U — интегральный оператор;*

2) *если $0\leqslant x_n\leqslant x\in X$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $x_n\xrightarrow{(\mu_1)}0$, то $(Ux_n)(s)\to 0$ μ_2-п. в.;*

3) *$U\in L_n^\sim(X, S(\mu_2))$ и если $\chi_{A_n}\leqslant x\in X$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\mu_1(A_n)\to 0$, то $U(\chi_{A_n})(s)\to 0$ μ_2-п.в.*

Из теоремы 3.3.1 при помощи теоремы Лебега получаем, что если оператор порожден неизмеримым ядром, то это ядро можно заменить измеримым, и тем самым данный оператор является интегральным.

Теорема 3.3.2. *Пусть функция $\Phi(t, s)$ такова, что при любом $x \in X$ для п. в. s определена μ_2-измеримая функция $y(s) = \int \Phi(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t)$. Тогда существует μ-измеримая функция $K(t, s)$ такая, что при любом $x \in X$ имеем*

$$\int K(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t) = \int \Phi(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t) \quad \mu_2\text{ - п. в.}$$

(где исключаемое множество меры нуль может зависеть от x).

Если в условиях теоремы 3.3.2 мера μ_1 сепарабельна, то существует μ-измеримая функция $K(t, s)$ такая, что при μ_1-п. в. t имеем $K(t, s) = \Phi(t, s)$ для μ_2-*п. в. s*.

Предложение 3.3.3. *Пусть (T_3, Σ_3, μ_3) — пространство с полной σ-конечной мерой, Z — ИП на (T_3, Σ_3, μ_3).*

1) Если $U \in L^{\sim}(Z, X)$ — интегральный оператор, $V \in L_n^{\sim}(X, S(\mu_2))$, то $W = VU$ — интегральный оператор.

2) Если $V \in L_n^{\sim}(X, Y)$, $U: X \to S(\mu_3)$ — интегральный оператор, то $W = UV$ — интегральный оператор.

4. Приведем определения еще двух классов линейных операторов. Пусть E — банахово пространство, X — ИП на (T_1, Σ_1, μ_1). Оператор $U: E \to X$ называется *оператором с абстрактной нормой*, если существует элемент

$$|U| = \sup\{|U_e| : \|e\| \leqslant 1\}$$

в K-пространстве X. Пространство всех операторов с абстрактной нормой обозначим через $L_A(E, X)$.

Оператор $U: X \to E$ называется *мажорированным*, если существует функция $x' \in X'_+$ такая, что $\|Ux\| \leqslant \int |x|\, x'\, d\mu_1$ $\forall x \in X$. Среди всех таких функций x' существует наименьшая x'_U. Пространство всех мажорированных операторов обозначим через $M_{X_n^{\sim}}(X, E)$.

Если X — БИП с условием (A), то линейный непрерывный оператор $U: X \to E$ является мажорированным тогда и только тогда, когда

$$\|U\|_S = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|U(\chi_{A_k})\| : A_k \cap A_m = \varnothing\ (k \neq m),\right.$$
$$\left.\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}\right\|_X \leqslant 1\right\} < \infty,$$

причем $\|U\|_S = \|x'_U\|'$.

5. Здесь мы приведем некоторые сведения о пространствах со смешанной нормой. Пусть X — ИП на (T_1, Σ_1, μ_1), Y — БИП на (T_2, Σ_2, μ_2), причем норма в Y удовлетворяет условию (C) (см. § 1.7).

Через $X[Y]$ обозначим пространство всех μ-измеримых функций $K(t, s)$ $(t \in T_1, s \in T_2)$ таких, что:

1) при п. в. t функция $s \to K(t, s)$ входит в Y;

2) функция $w(K)(t) = \|K(t, \cdot)\|$ входит в X.

$X[Y]$ — ИП на (T, Σ, μ), что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.5.1. *Пусть $K \in S(\mu)$, F — непустое множество неотрицательных функций в $S(\mu_2)$. Тогда функция*

$$d_F(K)(t) = \sup\left\{\int |K(t, s)|\, y(s)\, d\mu_2(s) : y \in F\right\}$$

μ_1-измерима (здесь идет речь о поточечном супремуме). Более того, существует такая последовательность $y_n \subset F$, что $d_F(K)(t) = \sup\limits_n \left\{\int |K(t, s)|\, y_n(s)\, d\mu_2(s)\right\}$ μ_1-п. в.

Если X — НИП, то $X[Y]$ становится НИП при введении следующей нормы: $\|K\| = \|w(K)\|_X$.

Теорема 3.5.2. *Если X — БИП, то $X[Y]$ полно.*

Теорема 3.5.3. *В НИП $X[Y]$ выполнено условие (A) тогда и только тогда, когда оно выполнено в X и Y.*

Теорема 3.5.4. *$(X[Y])' = X'[Y']$, причем, если X — БИП, то равенство справедливо не только по запасу элементов, но и по норме.*

6. Пусть X — ИП на (T_1, Σ_1, μ_1), Y — БИП на (T_2, Σ_2, μ_2).

Теорема 3.6.1. *Если $U \in L_A(Y, X)$ — интегральный оператор*

$$(Uy)(t) = \int K(t, s)\, y(s)\, d\mu_2(s), \quad y \in Y \tag{2}$$

с μ-измеримым ядром $K(t, s)$, то $K \in X[Y']$ и $|U| = w(K)$. Обратно, любая функция $K \in X[Y']$ определяет интегральный оператор $U \in L_A(Y, X)$.

Теорема 3.6.2. *Если $U \in M_{X_n^{\sim}}(X, Y)$ — интегральный оператор (1) с ядром $K(t, s)$, то $K \in X'[Y'']$, причем $x'_U = w(K)$. Если $X = X''$, то и обратно, если $K \in X'[Y]$, то формула (1) определяет оператор $U \in M_{X_n^{\sim}}(X, Y)$.*

Приведем теперь результаты об интегральном представлении операторов с абстрактной нормой и мажорированных операторов. Напомним, что $Y_{(A)}$ — ИП элементов с (o)-непрерывной нормой (см. § 1.6).

Теорема 3.6.3. *Пусть* $\operatorname{supp} Y_{(A)} = \operatorname{supp} Y$. *Общий вид операторов* U *класса* $L_A(Y, X)$ *дается формулой* (2), *где* $K \in X[Y']$.

Следствие 3.6.4. *Пусть* Y — *как в теореме* 3.6.3. *Тогда формула* (2) *дает общий вид линейного непрерывного оператора из* Y *в* $L^\infty(T_1, \Sigma_1, \mu_1)$, *причем*

$$\|U\| = \operatorname{vraisup}_t \|K(t, \cdot)\|_{Y'}.$$

Теорема 3.6.5. *Оператор* $U \in L_A(Y, X)$ *допускает интегральное представление* (2) *тогда и только тогда, когда из* $y_n \to 0$ *в слабой топологии* $\sigma(Y, Y_n^\sim)$ *следует* $(Uy_n)(t) \to 0$ μ_1-*п. в.*

Теорема 3.6.6. *Пусть* $\operatorname{supp} Y_{(A)} = \operatorname{supp} Y$. *Общий вид операторов* U *класса* $M_{X_n^\sim}(X, Y')$ *дается формулой* (1), *где* $K \in X'[Y']$.

Следствие 3.6.7. *Пусть* Y — *как в теореме* 3.6.6. *Тогда формула* (1) *дает общий вид линейного непрерывного оператора из* $L'(T_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *в* Y', *причем*

$$\|U\| = \operatorname{vraisup}_t \|K(t, \cdot)\|_{Y'}.$$

7. Пусть S_C — комплексное пространство измеримых функций. Тогда точно так же, как это сделано в § 1, можно определить ИП, НИП и БИП в S_C, а далее и все остальные понятия, связанные с этими объектами. При этом почти все результаты § 1 и все результаты § 3 переносятся на комплексный случай. Отметим, в частности, что теорема 3.3.1 является новой даже тогда, когда $X = Y = L^2(\mathscr{D})$, где $\mathscr{D}$ — произвольное измеримое подмножество в R^n.

§ 4. Аналитическое представление линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций

1. Задачу об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой и мажорированных операторов можно поставить более общим образом, чем в § 3. Именно одно из пространств можно считать абстрактным банаховым пространством и искать представление оператора при помощи вектор-функции.

Всюду далее E — банахово пространство, X — ИП на (T, Σ, μ), где (T, Σ, μ) — произвольное пространство с полной σ-конечной мерой. Функция $\overleftarrow{w}: T \to E^*$ называется *E-скалярно измеримой*, если для любого $e \in E$ измеримы функции $w_e(t) = \langle e, \overleftarrow{w}(t) \rangle$. При этом существует $v(\overleftarrow{w}) \overset{\text{def}}{=} \sup\{|w_e| : \|e\| \leqslant 1\} \in S(\mu)$ (отметим, что речь идет о супремуме в K-пространстве $S(\mu)$, а не о поточечном супремуме). Функции $\overleftarrow{w}_i: T \to E^*$ $(i=1, 2)$ называются *E-скалярно эквивалентными*, если при любом $e \in E$ имеем $\langle e, \overleftarrow{w}_1(t) \rangle = \langle e, \overleftarrow{w}_2(t) \rangle$ п. в.

Через $s(E)$-$X(E^*)$ обозначим пространство всех E-скалярно измеримых функций $\overleftarrow{w}: T \to E^*$ таких, что $v(\overleftarrow{w}) \in X$ (E-скалярно эквивалентные функции отождествляются). Если X — БИП, то $s(E)$-$X(E^*)$ — банахово пространство, если мы введем норму $\|\overleftarrow{w}\| = \|v(\overleftarrow{w})\|_X$.

Функция вида

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(t)\, e_k \left(e_k \in E,\ A_k \in \Sigma\right)$$

называется *конечнозначной*. Функция $\vec{z}: T \to E$ называется *измеримой*, если существует последовательность $\{\vec{z}_n\}$ конечнозначных функций такая, что $\|\vec{z}_n(t) - \vec{z}(t)\|_E \to 0$ п. в. Если $\vec{z}$ — измеримая функция и $\int \|\vec{z}(t)\|_E \, d\mu(t) < \infty$, то существует интеграл Бохнера $\int \vec{z}(t)\, d\mu(t) \in E$.

Через $X(E)$ обозначим пространство всех измеримых функций $\vec{z}: T \to E$ таких, что $\|\vec{z}(\cdot)\|_E \in X$. Если X — БИП, то $X(E)$ — банахово пространство, если мы введем норму

$$\|\vec{z}\| = \|\, \|\vec{z}(\cdot)\|_E \|_X.$$

Через $X(E)_n^\sim$ обозначим пространство всех линейных функционалов φ на $X(E)$ таких, что из $\|\vec{z}_n(t)\| \to 0$ п. в., $\|\vec{z}_n(\cdot)\| \leqslant x \in X$ $(\vec{z}_n \in X(E))$ следует $\varphi(\vec{z}_n) \to 0$.

Если X — БИП с условием (A), то $X(E^*) = X(E)_n^\sim$.

Следующая теорема полностью решает вопрос о представлении скалярно измеримыми вектор-функциями.

Теорема 4.1.1. 1) *Отображение P, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w}\in s(E)\text{-}X(E^*)$ оператор*

$$(P\overleftarrow{w})(e)=\langle e, \overleftarrow{w}\rangle \quad (e\in E), \tag{1}$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E)\text{-}X(E^*)$ на $L_A(E, X)$, причем $v(\overleftarrow{w})=|P\overleftarrow{\omega}|$.

2) *Отображение Q, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w}\in s(E)\text{-}X'(E^*)$ оператор $Q\overleftarrow{w}$ по формуле*

$$\langle (Q\overleftarrow{w})\,x, e\rangle = \int [x(t)\langle e, \overleftarrow{w}(t)\rangle\, d\mu(t) \quad (x\in X,\ e\in E), \tag{2}$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E)\text{-}X'(E^*)$ на $M_{X_n^\sim}(X, E^*)$, причем $v(\overleftarrow{w})=x'(Q\overleftarrow{w})$.

3) *Отображение R, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w}\in s(E)\text{-}X'(E_n)$ функционал $R\overleftarrow{w}$ по формуле*

$$(R\overleftarrow{w})(\vec{z}) = \int \langle \vec{z}(t), \overleftarrow{w}(t)\rangle\, d\mu(t) \quad (\vec{z}\in X(E)), \tag{3}$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E)\text{-}X'(E^*)$ на $X(E)_n^\sim$, причем, если X — БИП, то R — изометрия.

2. Рассмотрим теперь значительно более сложный вопрос, когда в формулах (1)—(3) функцию $\overleftarrow{w}: T\to E^*$ можно выбрать измеримой.

Оператор $U{:}E\to X$ называется *(r_X)-компактным*, если существует $r\in X_+$ такой, что U — компактный оператор из E в банахово пространство

$$X_r=\{x\in X{:}\,\|x\|_r=\inf\{\lambda>0{:}\,|x|\leqslant\lambda r\}<\infty\}.$$

Теорема 4.2.1. *Пусть X — БИП с условием (A) или $X=S(\mu)$, $U\in L_A(E, X)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует*

$$\overleftarrow{w}\in X(E^*): (Ue)(t)=\langle e, \overleftarrow{w}(t)\rangle \quad (e\in E);$$

2) *U — (r_X)-компактен.*

Теорема 4.2.2. *Если линейный оператор $U{:}L^1(\mu)\to E$ слабо компактен, то существует*

$$\vec{z}\in L^\infty(E): Ux=\int x(t)\vec{z}(t)\,d\mu(t), \quad (x\in L^1(\mu)),$$

причем $\|U\|=\operatorname{vraisup}_t\|\vec{z}(t)\|_E$.

Будем говорить, что банахово пространство E обладает *свойством Радона — Никодима* ($E\in(RN)$), если для любого (T, Σ, μ) и любой меры $\vec{m}:\Sigma\to E$ конечной вариации и абсолютно непрерывной относительно μ существует функция $\vec{z}\in L^1(\mu)(E)$ такая, что $\vec{m}(A)=\int_A \vec{z}(t)\,d\mu(t)$ $(A\in\Sigma)$.

Можно сказать, что $E^*\in(RN)$ тогда и только тогда, когда в каждом из представлений (1)—(3) функцию $\overleftarrow{w}$ всегда можно выбрать измеримой. Дадим внутренние характеристики пространств со свойством Радона—Никодима.

Теорема 4.2.3. *$E^*\in(RN)$ тогда и только тогда, когда E квазисепарабельно, т. е. любое сепарабельное подпространство в E имеет сепарабельное сопряженное.*

Отметим, что если E — БИП, то квазисепарабельность эквивалентна выполнению условия (A) в E и E^*. Из теоремы 4.2.3 вытекают классические теоремы о том, что рефлексивное пространство и сепарабельное сопряженное обладают свойством Радона—Никодима.

Будем говорить, что банахово пространство E обладает *свойством Крейна—Мильмана*, если любое ограниченное выпуклое замкнутое по норме множество есть замкнутая (по норме) выпуклая оболочка своих экстремальных точек.

Теорема 4.2.4. 1) *Если $E\in(RN)$, то E обладает свойством Крейна — Мильмана.* 2) *Если E — сопряженное пространство, то $E\in(RN)$ тогда и только тогда, когда E обладает свойством Крейна — Мильмана.*

§ 5. О строении банахова пространства, сопряженного к пространству Харди векторнозначных аналитических функций

1. Пусть E — комплексное банахово пространство. Для пространств $L^p(E)$ при естественной двойственности имеем

$$L^p(E)^* = s(E)-L^{p'}(E^*),\ 1\leqslant p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Если $E^*\in(RN)$, то $L^p(E)^* = L^{p'}(E^*)$ (см. § 4). Если мы естественным образом определим *пространство Харди* $H^p(E)$, то, по крайней мере, для сепарабельного рефлексивного E можно было бы ожидать, что $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)$ $(1<p<\infty)$. Однако это оказалось не так, причем при доказательстве этого неожиданно нашли применение теоремы об операторах в идеальных пространствах. Пусть далее L^p — это комплексное L^p на окружности с нормированной мерой Лебега.

Через $H^p(E)$ обозначим подпространство в $L^p(E)$, состоящее из всех $\vec{f}\in L^p(E)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vec{f}(t)\, e^{-int}\, dt = 0,\ n = -1,\ -2,\ \ldots$$

Через $H^p(E^*)_1$ обозначим подпространство в $s(E) = L^p(E^*)$, состоящее из всех $\overleftarrow{g}\in s(E)\text{-}L^p(E^*)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overleftarrow{g}(t)\, e^{-int} dt = 0,\ n = -1,\ -2,\ \ldots$$

Как и в скалярном случае, пространства $H^p(E)$ и $H^p(E^*)_1$ можно отождествить с пространствами аналитических функций в круге. Если $E^*\in(RN)$, то $H^p(E^*) = H^p(E^*)_1$.

2. Пусть $1<p<\infty$; $P: L^p\to H^p$ — канонический проектор; именно, если $f\in L^p$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

то Pf имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Пространства $H^p(E)$ и $H^p(E^*)_1$ находятся в естественной двойственности:

$$\langle \vec{f}, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \langle \vec{f}(t),\ \overleftarrow{g}(t)\rangle\, dt,\ (\vec{f}\in H^p(E),\ \overleftarrow{g}\in H^p(E^*)_1).$$

Будем писать, что $(E\in H^p_*)$, если $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)_1$. Пусть 1_E — тождественный оператор на E; $L^p\otimes E$ — линейная оболочка функций $(f\otimes e)(t) = f(t)e$, $(f\in L^p,\ e\in E)$ в $L^p(E)$ с нормой, индуцированной из $L^p(E)$. Оператор $P\otimes 1_E$ из $L^p\otimes E$ в себя определяется формулой

$$(P\otimes 1_E)(f\otimes e) = (Pf)\otimes e\ \ (f\in L^p,\ e\in E).$$

Теорема 5.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $P\otimes 1_E: L^p\otimes E\to L^p\otimes E$ *непрерывен;*

2) $E\in(H^p_*)$;

3) *некоторое (любое) нечетное сопряженное E входит в* (H^p_*);

4) *некоторое (любое) четное сопряженное E входит в* $(H^{p'}_*)$.

Если $E\in(H^p_*)$ при любом p $(1<p<\infty)$, то пишем $E\in(H_\cdot)$.

Следствие 5.2.2. 1) *Условие* (H^p_*) *наследственно.*

2) *Если* $\exists p, 1<p<\infty: E\in(H^p_*)$, *то* $E\in H_\cdot$.

3) *Если E — подпространство в* $L^r(\mu)$, $1<r<\infty$, *то* $X\in(H_\cdot)$ (*более того,* $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)$).

3. Как отмечено в § 3.7, все понятия, связанные с операторами в вещественных идеальных пространствах, осмысленны и в комплексном случае. Здесь мы приведем один результат, характеризующий регулярные операторы в L^p.

Будем говорить, что *в E равномерно вкладываются пространства* l^1_n, если существует $c>0$ такое, что для любого натурального n найдется подпространство $Y_n\subset E$:

$$d(Y_n, l^1_n) = \inf\{\|U\|\cdot\|U^{-1}\| : U: l^1_n\to Y_n \text{ изоморфизм}\} < c.$$

Теорема 5.3.1. *Пусть в E равномерно вкладываются пространства l^1_n, $U: L^p\to L^p$ — линейный непрерывный оператор* $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. *Если оператор* $U\otimes 1_E: L^p\otimes E\to L^p\otimes E$ *непрерывен, то* $U\in L^\sim(L^p, L^p)$.

Так как проектор $P\notin L^\sim(L^p, S)$, то из теорем 5.2.1 и 5.3.1 получаем

Теорема 5.3.2. *Если* $(E\in H_\cdot)$, *то в E нельзя равномерно вложить пространства* l^1_n (*т. е.* E — *B-выпукло*).

Из теоремы 5.3.2 получаем, что если

$$E=\left(\sum_{n=1}^{\infty} l_n^1\right)_{l^r}=\Big\{(x_n)_{n=1}^{\infty}: x_n\in l_n^1,$$

$$\|(x_n)\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{l_n^1}^r\right)^{1/r}<\infty\Big\},\ 1<r<\infty,$$

то E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, но $E\notin(H.)$.

§ 6. О комплексном методе интерполяции в БИП

1. Для произвольной интерполяционной пары комплексных банаховых пространств (E_0, E_1) А. Кальдерон [55] построил два комплексных метода интерполяции, в результате которых получают интерполяционные между E_0 и E_1 с нормальным типом s пространства $[E_0, E_1]_s$ и $[E_0, E_1]^s$ $(0<s<1)$ (см. [31]). В том случае, когда E_0 и E_1 — БИП, А. Кальдероном была предложена конструкция построения БИП $E_0^{1-s}E_1^s$, тесно связанного с введенными им интерполяционными пространствами и значительно проще устроенного. Здесь мы приведем полученные недавно дальнейшие результаты о связи этих пространств.

2. Пусть далее X_0, X_1 суть комплексные БИП на (T, Σ, μ). Через $X(s)=X_0^{1-s}X_1^s$ обозначается БИП, состоящее из всех $x\in S$ таких, что $|x|\leqslant\lambda x_0^{1-s}x_1^s$ для некоторого $\lambda\geqslant 0$ и некоторых $0\leqslant x_j\in X_j$ с $\|x_j\|_{X_j}\leqslant 1$ $(j=0, 1)$. Для $x\in X(s)$ за норму $\|x\|_{X(s)}$ принимается инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. В [55] показано, что $[X_0, X_1]_s\subset X(s)\subset[X_0, X_1]^s$ и нормы операторов вложения $\leqslant 1$; однако, вообще говоря, эти три пространства различны.

3. Пространство $X(s)$ в отличие от $[X_0, X_1]_s$ и $[X_0, X_1]^s$ не является, вообще говоря, интерполяционным между X_0 и X_1, даже если нормы в X_0 и X_1 (o)-полунепрерывны [56]. В следующих двух теоремах осуществляется редукция комплексных методов к конструкции $X(s)$.

Теорема 6.3.1. *Норма в $[X_0, X_1]_s$ совпадает с нормой, индуцированной из $X(s)$, а само пространство $[X_0, X_1]_s$ является замыканием множества $X_0\cap X_1$ в $X(s)$.*

Если в X_0 и X_1 выполнены условия (B) и (C), то $X(s)=[X_0, X_1]^s$. В общем случае справедлива

Теорема 6.3.2. *Если в X_0 и X_1 выполнено условие (C), то замкнутый единичный шар пространства $[X_0, X_1]^s$ совпадает с замыканием единичного шара пространства $X(s)$ в банаховом пространстве X_0+X_1.*

При доказательстве этих теорем используется представление регулярных функционалов из § 2.

Библиографические указания

Список литературы не претендует на полноту. Если результат отражен в монографической литературе, то мы, как правило, делаем ссылку на книгу, а не на первоисточник.

§ 1. Общие вопросы см. в [12, 21, 24, 27, 31, 40, 41]. Теорему 1.3.1 (б, в) см. в [3], 1.4.1 — в [13], 1.4.3 (б) и 1.9.2 — в [35], 1.5.1 — в [24], 1.5.2 (а) $\Leftrightarrow$ (в) — в [1], 1.6.1 (1) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) — в [34 и 39], (1) $\Leftrightarrow$ (8) — в [33], 1.7.2 (1) $\Leftrightarrow$ (3) — в [44], (1) $\Leftrightarrow$ (4) — в [37], 1.9.1 (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) — в [46], 1.13.1 — в [25], 1.13.2 — в [38], 1.13.3 — в [2], 1.13.4 — в [4] и [38], 1.13.5 (а) — в [38]. Результаты п. 14 изложены в [11]. Отметим, что они допускают обобщение на случай пространств измеримых функций со значениями в рефлексивном банаховом пространстве. Теорема 1.13 (б), полученная Г. Я. Лозановским, излагается впервые. Теоремы 1.15.1 и 1.15.2 получены А. В. Бухваловым и излагаются впервые.

§ 2. Основные результаты этого параграфа изложены в [13, 36]. Теоремы 2.2.1, 2.2.2 и 2.6.1 получены Г. Я. Лозановским и излагаются впервые.

§ 3. Общие вопросы см. в [14, 20, 21, 26, 27, 30, 31]. Теоремы 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2 и предложение 3.3.3 доказаны в [8] (см. также [9, 32, 45]), следствие 3.2.2 — в [42] (см. также [8]). По поводу результатов п. 5 и 6 см. [6, 10, 16—18, 28, 29].

§ 4. Общие вопросы см. в [14, 19—23; 26, 27; 29—31; 43, 48—53]. Теорему 4.1.1 — см. в [5, 53], теорему 4.2.1 — в [7, 19], теоремы 4.2.3, 4.2.4 — в [48, 49].

§ 5. Результаты, изложенные в этом параграфе, получены А. В. Бухваловым и излагаются впервые. Теоремы, близкие к 5.3.1, излагаются в [54]. По поводу теории пространств см. [15].

§ 6. Конструкция $X(\varkappa)$ введена в [55] и изучалась, например, в [35, 36, 57]. Теорема 6.3.1 *доказана в* [58], а теорема 6.3.2 получена Г. Я. Лозановским и публикуется впервые.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамович Ю. А.** Некоторые теоремы о нормированных структурах.— «Вестн. ЛГУ», 1971, № 13, с. 5—11.
2. **Абрамович Ю. А., Лозановский Г. Я.** О некоторых числовых характеристиках *KN*-линеалов.— «Мат. заметки», 1973, т. 14, № 5, с. 723—732.
3. **Amemiya I.** On ordered topological linear spaces.— In: Proc. of Symp. on linear spaces. Jerusalem, 1960, p. 14—21.
4. **Ando T.** Linear functionals on Orlicz spaces.—„Niew Arch. Wiskunde", 1960, v. 8, N 1, p. 4—16.
5. **Бухвалов А. В.** Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 5, с. 1012—1015.
6. **Бухвалов А. В.** О пространствах со смешанной нормой.— «Вестн. ЛГУ», 1973, № 19, с. 5—12.
7. **Бухвалов А. В.** Аналитическое представление операторов при помощи измеримых вектор-функций.— «Вестн. ЛГУ», 1974, № 7, с. 157—158.
8. **Бухвалов А. В.** Об интегральном представлении линейных операторов.— В кн.: Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. Л., «Наука», 1974, т. 47, с. 5—14.
9. **Бухвалов А. В.** Критерий интегральной представимости линейных операторов.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, № 1, с. 51.
10. **Бухвалов А. В.** Интегральные операторы и представление вполне линейных функционалов на пространствах со смешанной нормой.— «Сиб. мат. журн.», 1975, т. 16, № 3, с. 483—493.
11. **Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я.** О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 6, с. 1273—1275.
12. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М. Физматгиз, 1961. 407 с.
13. **Вулих Б. З., Лозановский Г. Я.** О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.— «Мат. сб.», 1971, т. 84 (126), № 3, с. 331—352.
14. **Гельфанд И. М.** Abstrakte funktionen und lineare operatoren.— «Мат. сб.», т. 4 (46), 1938, 235—286.
15. **Гофман К.** Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963. 311 с.
16. **Грибанов Ю. И.** Линейные операторы в совершенных пространствах функций. III.— «Изв. вузов. Математика», 1970, № 9, с. 37—44.
17. **Грибанов Ю. И.** Об измеримости одной функции.— «Изв. вузов. Математика», 1970, № 3, с. 22—26.
18. **Грибанов Ю. И.** Об измеримости ядер интегральных операторов.— «Изв. вузов. Математика», 1972, № 7, с. 31—34.
19. **Grothendieck A.** Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires.—„Mem. Amer. Math. Soc.", 1955, v. 16, 140 p.
20. **Dunford N., Pettis B. J.** Linear operators on summable functions.—„Trans. Amer. Math. Soc.", 1940. v. 47, N 3, p. 323—392.
21. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962. 895 с.
22. **Dinculeanu N.** Vector measures. Berlin, 1966. 432 p.
23. **Diudonné J.** Sur le théorème de Lebesgue — Nnkodym. V.—„Canad. J. Math.", 1951, v. 3, p. 129—139.
24. **Забрейко П. П.** Идеальные пространства функций. I.— «Вестн. Яросл. ун-та», 1974, т. 8, с. 12—52.
25. **Yosida K., Hewitt E.** Finitely additive measures.—„Trans. Amer. Math. Soc.", 1952, v. 72, p. 46—66.
26. **Канторович Л. В., Вулих Б. З.** Sur la representation des opérations linéaries.—„Comp. Math.", 1937, v. 5, p. 119—165.
27. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.—Л., ГИТТЛ, 1950. 548 с.
28. **Коротков В. Б.** Интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими условиям Карлемана и Ахиезера. I.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12, № 5, с. 1041—1055.
29. **Коротков В. Б.** Интегральные представления линейных операторов.— «Сиб. мат. журн.», 1974, т. 15, № 3, с. 529—545.
30. **Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966. 499 с.
31. **Функциональный анализ.** Под ред. С. Г. Крейна. Изд. 2-е. М., «Наука», 1972. 544 с. (Справ. мат. б-ка.)
32. **Лозановский Г. Я.** О почти интегральных операторах в *K*-пространствах.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1966, № 7, с. 35—44.
33. **Лозановский Г. Я.** О проекторах в некоторых банаховых структурах.— «Мат. заметки», 1968, т. 4, № 1, с. 41—44.
34. **Лозановский Г. Я.** Об изоморфных банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 1, с. 93—98.
35. **Лозановский Г. Я.** О некоторых банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 3, с. 584—599.
36. **Лозановский Г. Я.** О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 188, № 3, с. 522—524.
37. **Лозановский Г. Я.** О нормированных структурах с полунепрерывной нормой.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12, № 1, с. 232—234.
38. **Лозановский Г. Я.** О локализованных функционалах в векторных структурах.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 19. Харьков, 1974, с. 66—80.
39. **Лозановский Г. Я., Меклер А. А.** Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах.— «Изв. вузов. Математика», 1967, № 11, с. 47—53.
40. **Luxemburg W. A. J.** Notes on Banach function spaces.—„Proc. Acad. Sci.", Amsterdam, 1965, A 68, p. 229—248, 415—446, 646—667.

4 Заказ № 404

41. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** Notes on Banach function spaces.— "Proc. Acad. Sci.", Amsterdam, 1963, A 66, p. 135—153.
42. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** The linear modulus of an order bounded linear transformation I, II.— "Proc. Acad. Sci.", Amsterdam, 1971, A 74, N 5, p. 422—447.
43. **Митягин Б. С., Шварц А. С.** Функторы в категориях банаховых пространств.— «Усп. мат. наук», 1964, т. 19, № 2, с. 65—130.
44. **Mori T., Amemiya I., Nakano H.** On the reflexivity of semicontinuous norms.—"Proc. Japan Acad.", 1955, v. 31, N 10, p. 684—685.
45. **Nakano H.** Product spaces of semi-ordered linear spaces.— "J. Faculty Sci. Hokkaido Univ. Sec. I", 1953, v. 12, N 3, p. 163—210.
46. **Седаев А. А.** Об одной задаче Г. Я. Лозановского.— В кн.: Труды НИИМ Воронежского государственного университета. Воронеж, 1974, вып. 14, с. 63—67.
47. **Семенов Е. М.** Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Автореф. докт. дис. Воронеж, 1968. 14 с.
48. **Uhl J. J. Tr.** A note on the Radon — Nicodym property for Banach spaces.— "Rev. roumaine math. pures et appl.", 1972, v. 17, N 1, p. 113—115.
49. **Phelps R. R.** Dentability and extreme points in Banach spaces.— "J. Functional Analysis", 1974, v. 16, N 1, p. 78—90.
50. **Chatterji S. D.** Martingale convergense and the Radon — Nikodym theorem in Banach spaces.—„Math. Scand.", 1968/69, v. 22, p. 21—44.
51. **Phillips R. S.** On weaxly compact subsets of a Banach spaces.— "Amer. J. Math.", 1943, v. 65, p. 108—136.
52. **Ellis H. W., Halperin I.** Function spaces determined by a levelling length function.—"Canad. J. Math.", 1953, v. 5, p. 576—592.
53. **Бухвалов А. В.** Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— «Изв. вузов. Математика», 1975, № 11, с. 1—12.
54. **Бухвалов А. В.** О двойственности функторов, порождаемых пространствами вектор-функций. — «Изв. АН СССР. Серия мат.», 1975, т. 39, № 6, с. 1284—1309.
55. **Calderon A. P.** Intermediate spaces and interpolation, the complex method.—"Studia math.", 1964, v. 24, N. 2, p. 113—190.
56. **Лозановский Г. Я.** Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона.— «Функциональный анализ и его приложения», 1972, т. 6, № 4, с. 89—90.
57. **Лозановский Г. Я.** О банаховых структурах. III.— «Сиб. мат. журн.», 1972, т. 13, № 6, с. 1304—1313.
58. **Шестаков В. А.** О комплексной интерполяции в банаховых пространствах измеримых функций.— «Вестн. ЛГУ», 1974, № 19, с. 64—68.

ТРУДЫ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ТОМ
34

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1977

УДК 513.88

О ЗАМКНУТЫХ ПО МЕРЕ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Бухвалов, $\boxed{\text{Г. Я. Лозановский}}$

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В работе показывается, что изучение ограниченных выпуклых множеств, замкнутых относительно сходимости по мере в «хороших» пространствах измеримых функций, может быть в определенном смысле сведено к изучению выпуклых компактных подмножеств в подходящих топологических векторных пространствах. Поясним основную идею работы для простейшего случая. Пусть $L = L^1[0, 1]$. Вложим канонически L во второе сопряженное L^{**}. Хорошо известно, что существует естественный оператор проектирования P из L^{**} на L (этот оператор дается, например, теоремой Иосиды — Хьюитта [1]). Пусть теперь V — ограниченное по норме выпуклое множество в L, W — его слабое* замыкание в L^{**}. Оказывается (см. теорему 1.1), что V замкнуто относительно сходимости по мере тогда и только тогда, когда $P(W) = V$.

Результаты работы, по-видимому, являются новыми даже для пространства $L^1[0, 1]$. Нам кажется, что они найдут применения в функциональном анализе, теории функций, и в особенности в выпуклом анализе [1].

Дадим краткий обзор содержания. В § 1 доказана основная теорема 1.1 и получен ряд результатов, показывающих, что свойство замкнутости по мере иногда может служить заменой свойства компактности. Приведем некоторые из этих результатов для простейшего случая.

[1] В. Л. Левин, ознакомившийся с нашей работой в рукописи, указал ряд подобных приложений.

Через π обозначим каноническое вложение $L^1[0, 1]$ в $(L^1[0, 1])^{**} = (L^\infty[0, 1])^*$, через Pr_{L^1} — каноническую проекцию из $(L^\infty[0, 1])^*$ на $\pi(L^1[0, 1]) = (L^1[0, 1])$. Для краткости здесь положим

$$L^1 = L^1[0, 1], \quad L^\infty = L^\infty[0, 1].$$

Теорема 1.1′. *Пусть V — непустое выпуклое подмножество в L^1, W — $\sigma((L^\infty)^*, L^1)$ — замыкание множества $\pi(V)$ в $(L^\infty)^*$. Тогда*

а) *если V замкнуто относительно сходимости по мере в L^1, то*

$$\mathrm{Pr}_{L^1} W = \pi(V); \tag{*}$$

б) *если V ограничено по норме в L^1 и удовлетворяет условию (*), то V замкнуто относительно сходимости по мере в L^1.*

Чтобы прояснить замысел доказательства общей теоремы 1.1, а также чтобы снабдить читателя, интересующегося только случаем L^1, независимым доказательством для этого случая, мы приведем сейчас краткое доказательство теоремы 1.1′. Нам понадобится следующая лемма.

1) Если $\{e_\alpha\} \subset L^1$ — направление такое, что $\pi e_\alpha \to w$ $(\sigma((L^\infty)^*, L^\infty))$ и $\mathrm{Pr}_{L^1} w = \pi e$ $(e \in L^1)$, то существует замкнутое подпространство F в L^∞, удовлетворяющее условиям:

(α) $e_\alpha \to e\ (\sigma(L^1, F))$;

(β) $(|e| \leqslant |g|,\ e \in L^\infty,\ g \in F) \Rightarrow (e \in F)$;

(γ) существует функция $f \in F$ такая, что $f(t) > 0$ для почти всех (п. в.) $t \in [0, 1]$.

Рассмотрим $z = w - \pi(e)$. Тогда по теореме Иосиды — Хьюитта [1] (см. <4> ниже) множество $F = \{e' \in L^\infty : |z|(|e'|) = 0\}$ удовлетворяет (β) и (γ) (где $|z|$ — вариация чисто конечно-аддитивной меры z). Так как для любого $e' \in F$ имеем

$$\int e_\alpha e' dt = (\pi e_\alpha)(e') \to \langle e', w\rangle = (\pi e)(e') + \langle e', z\rangle = \int ee' dt,$$

то $e_\alpha \to e\ (\sigma(L^1, F))$.

2) Докажем утверждение а). Пусть V замкнуто относительно сходимости по мере в L^1. Очевидно, что $\pi(V) \subset \mathrm{Pr}_{L^1} W$. Пусть $\pi e = \mathrm{Pr}_{L^1} w$, где $w \in W$. Тогда существует направление $\{e_\alpha\} \subset V$ такое, что $\pi e_\alpha \to w$ $(\sigma((L^\infty)^*, L^\infty))$. В силу 1) существует подпространство $F \subset L^\infty$, удовлетворяющее (α), (β), (γ). Введем меру $\nu: d\nu = f dt$. Тогда $L^1 \subset L^1(\nu)$, $[L^1(\nu)]^* \subset F$. Отсюда $e_\alpha \to e$ слабо в $L^1(\nu)$. Следовательно, по известной лемме Банаха — Мазура выпуклые комбинации $\{e_\alpha\}$ сходятся к e по норме, откуда $e \in V$ в силу свойств V.

3) Докажем утверждение б). Достаточно доказать, что из $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset V$, $e_n \to e$ п. в. следует $e \in V$. Так как $e_n \to e$ п. в., то существует измеримая функция g такая, что $|e_n| \leqslant g$ $(n \geqslant 1)$. В силу $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$-компактности W, леммы 1) и условия (*) существует поднаправление $\{e_\alpha\}$ в $\{e_n\}$, $e_0 \in V$ и F, удовлетворяющее (α), (β), (γ) такие, что $e_\alpha \to e_0$ $(\sigma(L^1,$

F)). Очевидно, что $|e_\alpha| \leq g$ и $e_\alpha \to e$ по мере. В силу (γ) F разделяет точки на L^1, а в силу (β) можно считать, что $g \in L^1$. Тогда из теоремы Лебега о мажорированной сходимости получаем $e = e_0 \in V$.

Теорема 1.2′. *Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся, замкнутые по мере множества в $L^1[0, 1]$, причем V_1 ограничено по норме. Тогда V_1 и V_2 строго отделимы непрерывным функционалом.*

Теорема 1.3′. *Всякая центрированная система выпуклых, ограниченных по норме, замкнутых по мере подмножеств в $L^1[0, 1]$ имеет непустое пересечение.*

Теорема 1.3′ наводит на мысль, что замкнутый единичный шар B пространства $L^1[0, 1]$ обладает некоторыми свойствами близкими к компактности, несмотря на то, что он не компактен относительно сходимости по мере, так как легко построить последовательность $\{e_n\} \subset B$: $\forall n_1 < n_2 < \ldots$ имеем $\sup e_{n_k}(t) = +\infty$ при почти всех $t \in [0, 1]$. Однако из теоремы 1.3 вытекает следующий суррогат компактности, который мы сформулируем на языке теории функций.

Следствие[1]. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$, *то существуют последовательность* $1 = n_1 < n_2 < \ldots$, *числа* $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ *и функция* $e \in B$ *такие, что* $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \lambda_i = 1\ (\forall k)$ и $g_k(t) = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \lambda_i e_i(t) \to e(t)$ *при почти всех* $t \in [0, 1]$.

Легко видеть, что в формулировке следствия сходимость почти всюду нельзя, вообще говоря, заменить на сходимость по норме (и даже слабую сходимость) в $L^1[0, 1]$.

Теорема 1.4′. *Пусть V_1 и V_2 выпуклые, ограниченные по норме, замкнутые по мере подмножества в $L^1[0, 1]$. Тогда $V = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ замкнуто по мере.*

Теорема 1.5′. *Пусть V — непусто, выпукло, ограничено по норме и замкнуто по мере в $L^1[0, 1]$. Для любого измеримого $A \subset [0, 1]$ множество $\{v\chi_A : v \in V\}$*[2] *замкнуто по мере.*

Теорема 1.6′. *Пусть V_1, V_2 — непустые, выпуклые, замкнутые по мере множества в $L^1[0, 1]$, причем V_1 ограничено по норме. Тогда существуют $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ такие, что*

$$\|v_1 - v_2\| = \inf \{\|e_1 - e_2\| : e_1 \in V_1,\ e_2 \in V_2\}.$$

В этом же параграфе имеется один результат об экстремальных точках единичного шара пространства сопряженного к банаховой решетке (теорема 1.7).

В § 2 даны приложения теоремы 1.1. Сформулируем некоторые из полученных результатов для простейшего случая.

Теорема 2.1′. *Пусть $\{V_\xi\}$ — центрированная система выпуклых ограниченных, замкнутых подмножеств пространства $S[0, 1]$, причем каждое V_ξ состоит из неотрицательных функций. Тогда $\bigcap V_\xi$ не пусто.*

---

[1] Этот результат вытекает и из теоремы 1а работы [25].

[2] Через χ_A обозначается характеристическая функция множества A.

Из теоремы 2.1′, очевидно, можно получить утверждение, аналогичное следствию из теоремы 1.3′.

Теорема 2.4′. *Пусть X есть банахово пространство, непрерывно вложенное в $L^1[0, 1]$, причем замкнутый единичный шар пространства X замкнут по мере в $L^1[0, 1]$. Тогда существует проектор единичной нормы из X^{**} на X.*

При доказательстве ключевой теоремы 1.1 важную роль играла обобщенная теорема Иосиды — Хьюитта (см. <4> ниже), позволяющая разложить функционал на пространстве измеримых функций на «хорошую» компоненту, допускающую интегральное представление, и «плохую» сингулярную компоненту. При этом сингулярная компонента имеет удобное для приложений описание, позволяющее в ряде важных задач доказывать, что эта «плохая» компонента равна нулю [2]. Эта теорема имеет приложения к выпуклому анализу и теории оптимального управления [3]. Цель § 3 получить аналог обобщенной теоремы Иосиды — Хьюитта для пространств вектор-функций. В случае векторнозначного L^∞ мы получаем результат Левина [4], который он применил к выпуклому анализу. Полученный нами результат (теорема 3.2) является новым уже для векторнозначных пространств Орлича, порожденных N-функцией без Δ_2-условия [5] и пространств Марцинкевича.

В начале § 4 доказывается несколько вспомогательных предложений о двойственности в пространствах измеримых вектор-функций. Затем, при помощи теоремы 3.2 мы получаем обобщение результатов § 1 на векторнозначный случай. Результаты § 1 анонсированы в [24].

Нумерация определений и предложений автономная внутри каждого параграфа. При ссылках на теоремы из другого параграфа указывается двойной номер, первая часть которого означает номер параграфа, вторая — номер теоремы в этом параграфе.

Обозначения и терминология

В терминологии из теории полуупорядоченных пространств мы следуем монографии Б. З. Вулиха [6], а из теории меры и банаховых пространств — Н. Данфорда и Дж. Шварца [7]. Приведем некоторые определения и обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

<1> Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара векторных пространств (все двойственности в работе предполагаются отделимыми). Через $\sigma(X, Y)$ обозначается слабая топология, $\beta(X, Y)$ — сильная топология на X [8]. Через π обозначаем каноническое вложение X в пространство линейных функционалов на Y. *Через X всегда обозначается банахово пространство, через X^* — его сопряженное* (последнее обозначение сохраняется и в локально выпуклом случае).

<2> Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, т. е. T — множество, Σ—σ-алгебра его подмножеств, μ — неотрицательная счетно-аддитивная мера на Σ. Через $\Sigma(\mu)$ обозначается кольцо всех множеств из Σ, имеющих конечную меру; через $S=S(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных, измеримых, почти всюду (п. в.) конечных функций с отождествлением эквивалентных ($e\sim 0$ означает $e(t)=0$ п. в.) и обычным упорядочением ($e\geqslant 0$, если $e(t)\geqslant 0$ п. в.). *Всюду далее будем считать, что выполнены следующие условия:*

а) если $A\subset B\in\Sigma$ и $\mu(B)=0$, то $A\in\Sigma$ (полнота меры);

b) если для фиксированного $A \subset T$ и любого $B \in \Sigma(\mu)$ имеем $B \cap A \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$;

c) для любого $A \in \Sigma$ имеем $\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma(\mu),\ B \subset A\}$;

d) $S(T, \Sigma, \mu)$ — K-пространство (условно полная векторная решетка).

Напомним, что если μ σ-конечна, то условия b), c), d) выполнены автоматически.

Будем говорить, что направление $\{x_\alpha\} \subset S(T, \Sigma, \mu)$ μ*—сходится* к $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ ($x_\alpha \to x(\mu)$), если $x_\alpha \to x$ по мере на любом множестве $A \in \Sigma(\mu)$. Топология (μ) — сходимости, которую мы обозначим через $\tau(S)$, превращает S в линейное топологическое пространство.

Напомним, что базис окрестностей нуля этой топологии состоит из множеств вида $U(A, \varepsilon) = \left\{e \in S : \int\limits_A \frac{|e|}{1+|e|}\, d\mu < \varepsilon\right\}$, где $A \in \Sigma(\mu)$ и число $\varepsilon > 0$ — произвольны (см. [9], гл. IV, § 6, п. 5, упр. 11).

<3> Пусть E — векторная решетка (K-линеал [6]). Подмножество M в E называется *нормальным*, если из $|e_1| \leqslant |e_2|$, $e_1 \in E$, $e_2 \in M$ следует $e_1 \in M$. Для произвольного $M \subset E$ определяем его нормальную оболочку $N(M) \overset{\text{def}}{=} \{e \in E : \exists e_1 \in M$ такой, что $|e| \leqslant |e_1|\}$. Для любого $M \subset E$ полагаем $M^d = \{e \in E : |e| \wedge |g| = 0\ \forall\ g \in M\}$. Линейное нормальное подмножество в E называется *идеалом*. Идеал G в E называется *фундаментом*, если $G^d = \{0\}$. Идеал G в E называется *компонентой*, если $G = (G^d)^d$. Если E есть K-пространство (условно полная векторная решетка), G — компонента в E, то через Pr_G обозначается *оператор проектирования* E на G (см. [6], гл. IV, § 3).

<4> Пусть E — векторная решетка. Линейный функционал f на E называется 1) *регулярным* ($f \in \tilde{E}$), если он представим в виде разности линейных положительных функционалов; 2) *вполне линейным* ($f \in \bar{E}$), если из того, что направление $e_\alpha \xrightarrow{(0)} 0$ ([6], опр. II.6.3), следует $f(e_\alpha) \longrightarrow 0$; 3) *сингулярным* (или *анормальным*) ($f \in \tilde{E}_s$), если $f \in \tilde{E}$ и существует фундамент $G \subset E$ такой, что $f(e) = 0$ при любом $e \in G$. Хорошо известно, что $\tilde{E}$ — K-пространство (если упорядочение вводится при помощи конуса положительных функционалов) и $\bar{E}$ — компонента в $\tilde{E}$ ([6], теоремы VIII.2.1 и VIII.4.3). Отметим, что если E — K-пространство, то в $(\bar{E}, \sigma(\bar{E}, E))$ любое ограниченное множество относительно компактно ([10], A4).

Если $\bar{E}$ тотально на E, то $\tilde{E}_s$ — компонента в $\tilde{E}$, являющаяся дизъюнктным дополнением к компоненте $\bar{E}$, таким образом $\tilde{E} = \bar{E} \oplus \tilde{E}_s$ ([11], теорема 50.4). В случае $E = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ это известная теорема Иосиды — Хьюитта [1], поэтому сформулированное утверждение мы будем называть обобщенной теоремой Иосиды—Хьюитта.

<5> Любое K-пространство E с тотальным $\bar{E}$ (т. е. $\bar{E}$ разделяет точки на E) реализуется в виде фундамента в некотором пространстве $S(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) удовлетворяет a)—d). Пусть теперь E — фундамент в $S(T, \Sigma, \mu)$ с произвольной мерой μ, удовлетворяющей a)—d), и $\bar{E}$ тотально на E (обозначение $E \in \mathfrak{A}$). Положим

$$E' = \{e' \in S : \int |ee'|\, d\mu < \infty \text{ для любого } e \in E\}.$$

Тогда E' изоморфно $\overline{E}$ при отображении: $e' \in E' \to f_{e'} \in \overline{E}$, действующем по формуле $f_{e'}(e) = \int ee'd\mu$ $(e \in E)$ [12]. Далее мы часто отождествляем $\overline{E}$ с E'. Условие тотальности $\overline{E}$ на E означает, что E' фундамент в S.

Пусть π оператор канонического вложения E в пространство $\overline{\overline{E}}$ всех регулярных функционалов на $\overline{E}$ ([6], гл. IX, § 5). Фундамент $E \in \mathfrak{A}$ в S называется *рефлексивным по Накано* (обозначение $E \in \mathfrak{R}$), если $E = E''$, или, что то же самое, $\pi(E) = \overline{\overline{E}}$. Таким образом, если $E \in \mathfrak{R}$, то $\pi(E)$ — компонента в $\overline{\overline{E}}$ ([6], теорема VIII. 4.3), и поэтому имеет смысл оператор проектирования $\mathrm{Pr}_{\pi(E)}: \overline{\overline{E}} \to \pi(E)$ (см. <3>). Если $M \subset S$, то через $\tau(M)$ обозначается топология на M, индуцированная топологией $\tau(S)$.

<6> Пусть E — векторная решетка, F — идеал в $\tilde{E}$, тотальный на E. Через $o(E, F)$ обозначается локально выпуклая топология на E, задаваемая набором полунорм: $p_f(e) = f(|e|)$ $(e \in E)$, где f пробегает F_+. Хорошо известно, что топология $o(E, F)$ согласуется с двойственностью $\langle E, F \rangle$ и что решеточные операции $o(E, F)$ непрерывны.

<7> Векторная решетка (соотв. — K-пространство) E, одновременно являющаяся банаховым пространством с монотонной нормой (т. е. $(|e_1| \leqslant |e_2|) \Rightarrow (\|e_1\| \leqslant \|e_2\|)$), называется *банаховой решеткой* (соотв.—*банаховым KN-пространством*). Для любой банаховой решетки E справедливо $\tilde{E} = E^*$. Будем говорить, что норма в банаховом KN-пространстве E удовлетворяет условию

(A), если из $0 \leqslant e_n \downarrow 0$ следует $\|e_n\| \to 0$;

(B), если из $0 \leqslant e_n \uparrow$, $\{e_n\} \subset E$ и $\|e_n\| \leqslant C < \infty$ $(n \geqslant 1)$ следует, что существует $\sup e_n \in E$;

(C), если из $0 \leqslant e_n \uparrow e \in E$ следует $\sup \|e_n\| = \|e\|$.

Заменив в (B) и (C) последовательности направлениями, получим условия (B') и (C') соответственно. Если мера μ σ—конечна, то $(B) \Leftrightarrow (B')$, $(C) \Leftrightarrow (C')$. Отметим, что, если E — банахово KN-пространство и фундамент в S, то $E \in \mathfrak{A}$.

Пусть E — банахово KN-пространство. Тогда:

1) в E выполнено (A) тогда и только тогда, когда $\overline{E} = E^*$ ([6], теорема IX.4.4);

2) если $E \in \mathfrak{A}$, то в E выполнено (B') тогда и только тогда, когда $E \in \mathfrak{R}$ [13];

3) если $E \in \mathfrak{A}$, то в E выполнено (C') тогда и только тогда, когда $\|e\|_E = \sup\{|f(e)| : f \in \overline{E},\ \|f\| \leqslant 1\}$ $(e \in E)$ [14].

Из 3) вытекает, что если в банаховом KN-пространстве $E \in \mathfrak{A}$ выполнено (C'), то вложение $\pi: E \to (\overline{E})^* (= \overline{\overline{E}})$ является изометрией.

§ 1. Замкнутые по мере множества. Случай фундамента в S(T, Σ, μ)

Всюду в этом параграфе $E \in \mathfrak{A}$.

Лемма 1. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$, множество $M \subset E$ ограничено в слабой топологии $\sigma(E, \overline{E})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M замкнуто в $(S, \tau(S))$;*

2) *M замкнуто в $(E, \tau(E))$.*

Замечание. Для справедливости 2) $\Rightarrow$1) условие $E \in \mathfrak{N}$ и необходимо.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Очевидно. 2)$\Rightarrow$1). Так как M $\sigma(E, \overline{E})$ ограничено, то оно $o(E, \overline{E})$ ограничено $<6>$. Пусть $\{e_\alpha\} \subset M$, $e \in S$, $e_\alpha \to e\,(\mu)$, докажем, что $e \in E$. Для этого достаточно доказать, что для любого $e' \in \overline{E}$ имеем $\int |ee'|\,d\mu < \infty$, но это очевидно из леммы Фату.

Лемма 2. *Пусть F — фундамент в $\overline{E}$, направление $\{e_\alpha\} \subset E$, $e \in E$, $e_0 \in E$. Если существует $g \in S$ такой, что $|e_\alpha| \leqslant g$ при любом α, $e_\alpha \to e\,(\mu)$ и $e_\alpha \to e_0\,(\sigma(E, F))$, то $e = e_0$.*

Замечание. Если опустить $|e_\alpha| \leqslant g$, то заключение леммы 2 не выполнено уже в $L^1[0, 1]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что мера μ конечна и $g \in E$. Если $e' \in F$, то существует последовательность $\{e_{\alpha_n}\}$ такая, что $\left|\int e'(e_{\alpha_n} - e_0)\,d\mu\right| < n^{-1}$, $e_{\alpha_n} \to e$ по мере. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем, что $\int e'(e - e_0)\,d\mu = 0$ при любом $e' \in F$, откуда $e_0 = e$.

Лемма 3. *Пусть F — фундамент в $\overline{E}$. Если направление $e_\alpha \to 0\,(\sigma(E, F))$, то выпуклая замкнутая в $(S, \tau(S))$ оболочка множества $\{e_\alpha\}$ содержит 0.*

Доказательство. Так как сопряженное к $(E, o(E, F))$ есть F (см. $<6>$), то существует направление $g_\beta \to 0$ $(o(E, F))$, где g_β — выпуклые комбинации $\{e_\alpha\}$. Тогда по лемме 1 [15] $g_\beta \to 0\,(\mu)$.

Пусть, далее, в этом параграфе $\pi: E \to \overline{\overline{E}}$, F — некоторый фундамент в $\overline{E}$. Тогда $H_1 = \{w \in \overline{\overline{E}} : w(f) = 0$ при любом $f \in F\}$ — компонента в $\overline{\overline{E}}$. Положим $H = H_1^d$ в $\overline{\overline{E}}$. Тогда двойственность $<F, H>$ отделима и $\overline{\overline{E}} \supset H \supset \overline{\overline{\overline{E}}}$. Если $F = \overline{E}$, то $H = \overline{\overline{E}}$.

Лемма 4. *Пусть $E \in \mathfrak{N}$, F — некоторый фундамент в $\overline{E}$. Если $\{e_\alpha\} \subset E$, $\pi e_\alpha \to w\,(\sigma(H, F))$ и $\mathrm{Pr}_e w = \pi e$, то существует фундамент F_0 в F такой, что $e_\alpha \to e\,(\sigma(E, F_0))$.*

Доказательство. Если $z = w - \pi(e)$, то $z \in (\overline{\overline{E}})^d$. Тогда в силу $<4>$ z сингулярен, т. е. множество $F_0 = \{e' \in F : |z|(|e'|) = 0\}$, является фундаментом в F. Следовательно, для любого $e' \in F_0$ имеем:

$$\int e_\alpha e'\,d\mu = (\pi e_\alpha)(e') \to <e', w> = (\pi e)(e') + <e', z> =$$
$$= \int ee'\,d\mu, \text{ т. е. } e_\alpha \to e\,(\sigma(E, F_0)).$$

На следующей теореме основано доказательство большинства остальных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть $E \in \mathfrak{N}$, F — некоторый фундамент в $\overline{E}$, V — непустое выпуклое подмножество в E, W — $\sigma(H, F)$-замыкание множества $\pi(V)$ в H. Тогда*

а) *если V замкнуто в $(E, \tau(E))$, то*

$$\mathrm{Pr}_{\pi(E)} W = \pi(V); \qquad (*)$$

б) если V $\sigma(E, \bar{E})$ — ограничено и удовлетворяет условию $(*)$, то V замкнуто в $(E, \tau(E))$.

Доказательство. а) Пусть V замкнуто в $(E, \tau(E))$. Очевидно, что $\pi(V) \subset \mathrm{Pr}_{\pi(E)} W$. Пусть $\pi e = \mathrm{Pr}_{\pi(E)} w$, где $w \in W$. Тогда существует направление $\{e_\alpha\} \subset V$ такое, что $\pi e_\alpha \to w\,(\sigma(H, F))$. В силу леммы 4 существует фундамент F_0 в F, такой что $e_\alpha \to e\,(\sigma(E, F_0))$. Тогда по лемме 3 e принадлежит замыканию в топологии $\tau(E)$ выпуклой оболочки $\{e_\alpha\}$, а так как V — выпукло и (μ)-замкнуто, то $e \in V$ и $\pi(e) \in \pi(V)$.

б) В силу <4> множество $\pi(V)$ $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$ — относительно компактно. Так как оператор $\mathrm{Pr}_\pi : (\bar{\bar{E}}, \sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})) \to (H, \sigma(H, F))$ непрерывен, то можно считать, что W есть $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$ — замыкание $\pi(V)$. Если M — произвольное подмножество в S, $A \in \Sigma$, то $M_A = \{e\chi_A : e \in M\}$. Через $W^{(A)}$ обозначим $\sigma(\bar{\bar{E}}_A, \bar{E}_A)$ — замыкание множества $\pi(V_A)$ в $\bar{\bar{E}}_A$.

1) Докажем, что для любого $A \in \Sigma$ имеем $\mathrm{Pr}_{\pi(E_A)} W^{(A)} = V_A$. Включение $V_A \subset \mathrm{Pr}_{\pi(E_A)} W^{(A)}$ очевидно. Пусть $\pi e = \mathrm{Pr}_{\pi(E_A)} w$, $w \in W^{(A)}$, $e \in E_A$. Тогда существует направление $\{e_\alpha\} \subset V_A$: $\pi e_\alpha \to w\,(\sigma(\bar{\bar{E}}_A, \bar{E}_A))$. Пусть $\tilde{e}_\alpha \in V : \tilde{e}_\alpha \chi_A = e_\alpha$. Так как множество $\pi(V)$ относительно компактно, то существует поднаправление $\pi\tilde{e}_\beta \to z\,(\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E}))$. Тогда $z \in W$ и в силу условия $(*)$ $\mathrm{Pr}_{\pi(E)} z = \pi e_0 \in \pi(V)$. Следовательно, $e_0\chi_A \in V_A$ и нам осталось показать, что $e_0\chi_A = e$.

Так как $\pi e_\beta \to w\,(\sigma(\bar{\bar{E}}_A, \bar{E}_A))$, то по лемме 4 существует фундамент F_1 в $\bar{E}_A$ такой, что $e_\beta \to e\,(\sigma(E_A, F_1))$. С другой стороны, по той же лемме 4 существует фундамент F_2 в $\bar{E}$, такой, что $\tilde{e}_\beta \to e_0\,(\sigma(E, F_2))$, откуда $e_\beta = \tilde{e}_\beta\chi_A \to e_0\chi_A\,(\sigma(E_A, F_2))$. Так как $F_1 \cap F_2$ — фундамент в $\bar{E}_A$, $e_\beta \to e$ и $e_\beta \to e_0\chi_A\,(\sigma(E_A, F_1 \cap F_2))$, то $e = e_0\chi_A$.

2) Пусть для любого $A \in \Sigma(\mu)$ доказано, что V_A замкнуто в $(E_A, \tau(E_A))$, а тогда и в $(E, \tau(E))$. Докажем, что V замкнуто в $(E, \tau(E))$. Пусть направление $\{e_\alpha\} \subset V$, $e \in E$, $e_\alpha \to e\,(\mu)$. Тогда для любого $A \in \Sigma(\mu)$ имеем $V_A \ni e_\alpha\chi_A \to e\chi_A\,(\mu)$, откуда $e\chi_A \in V_A$. Поэтому для любого $A \in \Sigma(\mu)$ найдется $e_A \in V : e_A\chi_A = e\chi_A$. Будем рассматривать $\Sigma(\mu)$ как направление, упорядоченное по включению. Тогда в $\{e_A\}$ $(A \in \Sigma(\mu))$ найдется поднаправление $\{e_\beta\}$ $(\beta \in \mathrm{B})$ такое, что $\pi e_\beta \to w\,(\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E}))$. Следовательно, $w \in W$ и существует $e_0 \in V$ такой, что $\pi e_0 = \mathrm{Pr}_{\pi(E)} w$. Отсюда по лемме 4 существует фундамент F_0 в $\bar{E}$ такой, что $e_\beta \to e_0\,(\sigma(E, F_0))$.

Теперь достаточно показать, что $e = e_0$. Пусть $A_0 \in \Sigma(\mu)$. Тогда (по определению поднаправления) по A_0 найдется $\beta_0 \in \mathrm{B}$ такое, что из $\beta \geqslant \beta_0$ в B следует, что $e_\beta = e_A$ при некотором $A \supset A_0$, $A \in \Sigma(\mu)$. Отсюда при любом $\beta \geqslant \beta_0$ имеем $e_\beta\chi_{A_0} = e_A\chi_{A_0} = (e_A\chi_A)\chi_{A_0} = (e\chi_A)\chi_{A_0} = e\chi_{A_0}$. Поскольку же $e_\beta \to e_0(\sigma(E, F_0))$, то, очевидно, $e_\beta\chi_{A_0} \to e_0\chi_{A_0}(\sigma(E, F_0))$ и, следовательно, $e_0\chi_{A_0} = e\chi_{A_0}$. Так как A_0 — произвольно, то $e_0 = e \in V$.

3) В силу доказанного в 1) и 2) можно считать, что μ конечна. Тогда достаточно доказать, что из $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$, $e_n \to e$ п. в. следует $e \in V$. Так как $e_n \to e$ п. в., то существует $g \in S$: $|e_n| \leqslant g\ (n \geqslant 1)$. В силу $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$ — компактности W, леммы 4 и условия (✻) существуют поднаправление $\{e_\alpha\}$ в $\{e_n\}$, $e_0 \in V$ и фундамент F_0 в $\bar{E}$, такие что $e_\alpha \to e_0(\sigma(E, F_0))$. Очевидно, что $|e_\alpha| \leqslant g$ и, так как $e_n \to e(\mu)$, то $e_\alpha \to e(\mu)$. Отсюда по лемме 2 получаем $e = e_0 \in V$.

Замечание. В теореме 1(б) условие ограниченности опустить нельзя. Например, возьмем в качестве V замкнутую гиперплоскость в $L^2[0, 1]$. Для нее, очевидно, выполнено условие (✻), но она плотна по мере в $L^2[0, 1]$.

Теорема 2. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$, F — фундамент в $\bar{E}$. Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в E, замкнутые в $(E, \tau(E))$. Если хотя бы одно из них $\sigma(E, \bar{E})$ — ограничено, то они строго отделимы функционалом из F, т. е. существует $f \in F$, такой что $\sup\{f(e): e \in V_1\} < \inf\{f(e): e \in V_2\}$.*

Доказательство. Пусть W_i $\sigma(H, F)$ — замыкание множества $\pi(V_i)\ (i = 1, 2)$. Тогда в силу (*) $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, а если, скажем, V_1 $\sigma(E, \bar{E})$-ограничено, то в силу $<4>$ W_1 $\sigma(H, F)$-компактно. Теперь применяем обычную теорему отделимости (см. [8], II. 9. 2).

Теорема 3. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$, $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — центрированная система выпуклых, $\sigma(E, \bar{E})$ — ограниченных, замкнутых в $(E, \tau(E))$ подмножеств пространства E. Тогда $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi$ не пусто.*

Доказательство. Пусть W_ξ — $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$-замыкание $\pi(V_\xi)$. Так как W_ξ $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$ — компактно, то $\bigcap W_\xi$ не пусто. Тогда по теореме 1(а) $\bigcap V_\xi$ не пусто.

Замечание Условие выпуклости V_ξ в теореме 3 существенно.

Теорема 4. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$, V_1 и V_2 — выпуклые, $\sigma(E, \bar{E})$ — ограниченные, замкнутые в $(E, \tau(E))$ подмножества пространства E. Тогда $V = V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$ замкнуто в $(E, \tau(E))$.*

Доказательство. Пусть W_i — $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$—замыкание $\pi(V_i)\ (i = 1, 2)$. Тогда W_1, W_2 $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$-компактны, откуда $W = W_1 + W_2$ $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$-компактно. Тогда $\mathrm{Pr}_{\pi(E)} W = \mathrm{Pr}_{\pi(E)} W_1 + \mathrm{Pr}_{\pi(E)} W_2 = \pi(V_1) + \pi(V_2) = \pi(V)$ в силу теоремы 1(а). Так как W есть, очевидно, $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$ — замыкание V, то из теоремы 1(б) получаем, что $V(\mu)$ — замкнуто.

Теорема 5. *Пусть $E \in \mathfrak{R}$, V — непустое, выпуклое, $\sigma(E, \bar{E})$ — ограниченное множество в E, замкнутое в $(E, \tau(E))$. При любом $A \in \Sigma$ множество $V_A = \{e\chi_A : e \in V\}$ замкнуто в $(E, \tau(E))$.*

Доказательство. В силу теоремы 1(а) выполнено равенство (*). Отсюда по доказанному в пункте 1) доказательства теоремы 1(б) следует, что (*) выполнено для V_A. Тогда из теоремы 1(б) получаем, что V_A замкнуто в $(E, \tau(E))$.

Замечание. Условие рефлексивности по Накано пространства в формулировках теорем 2—5 является существенным. Хорошо известно, что аналоги теорем 2 и 3 верны для замкнутых по норме множеств в банаховом пространстве E тогда и только тогда, когда E рефлексивно.

Теорема 6. *Пусть E — банахово KN-пространство, норма в котором удовлетворяет (C') и (B'). Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые множества в E, замкнутые в $(E, \tau(E))$. Если хотя бы одно из них ограничено по норме в E, то существуют $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ такие, что*

$$\|v_1 - v_2\|_E = \inf\{\|e_1 - e_2\|_E : e_1 \in V_1,\ e_2 \in V_2\}.$$

Доказательство. Пусть V_1 ограничено по норме. Так как в E выполнено (C'), то, взяв пересечение с шаром достаточно большого радиуса, получаем, что V_2 можно тоже считать ограниченным по норме. Пусть W_i — $\sigma((\overline{E})^*, \overline{E})$ — замыкание $\pi(V_i)$ $(i = 1, 2)$. Так как W_i слабо* компактны, то существуют $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ такие, что $\|w_1 - w_2\|_{(\overline{E})^*} = \inf\{\|z_1 - z_2\|_{(\overline{E})^*} : z_1 \in W_1,\ z_2 \in W_2\}$. Так как $\pi: E \to (\overline{E})^*$ изометрия $<7>$, то легко видеть, что элементы $v_i = \mathrm{Pr}_{\pi(E)} w_i$, принадлежащие V_i по теореме 1(а) $(i = 1, 2)$, искомые.

В заключение параграфа приведем одну теорему, дополняющую в несепарабельном случае результат С. Бессаги и А. Пелчинского об экстремальных точках выпуклых множеств в сопряженном пространстве [16].

Лемма 5. *Пусть $\overline{E}$ тотально на E, F — фундамент в $\overline{E}$, V — непустое, выпуклое, $\sigma(E, F)$ — компактное множество в E. Тогда V есть $\tau(E)$ — замкнутая выпуклая оболочка своих экстремальных точек.*

Этот результат есть немедленное следствие теоремы Крейна — Мильмана [8] и леммы 3.

Теорема 7. *Пусть E — банахово KN-пространство такое, что норма в E и E^* удовлетворяет (A). Тогда замкнутый единичный шар B^* пространства E^* является замкнутой по норме выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.*

Доказательство. 1) Если e' — экстремальная точка B^*, $g' \in E^*$ и $|e'| = |g'|$, то g' — экстремальная точка.

2) Пусть M — замкнутая по норме выпуклая оболочка экстремальных точек шара B^*. Тогда множество M нормально.

3) Нам осталось показать, что $M = B^*$. По лемме 5 для любого $e' \in B^*$ существует направление $\{e'_\alpha\} \subset M$ такое, что $e'_\alpha \to e'(\mu)$. Тогда $|e'_\alpha| \to |e'|(\mu)$ и $|e'_\alpha| \wedge |e'| \to |e'|(\mu)$. Так как в E^* выполнено (A), то $|e'_\alpha| \wedge |e'| \to |e'|$ по норме. Так как M нормально, то $|e'_\alpha| \wedge |e'| \in M$ и, следовательно, $|e'| \in M$, а тогда и $e' \in M$, чем и доказана теорема.

§ 2. Некоторые приложения

1°. В этом параграфе будут даны приложения результатов § 1 к некоторым банаховым пространствам, непрерывно вложенным в $S(T, \Sigma, \mu)$. Множество $M \subset S(T, \Sigma, \mu)$ называется ограниченным в $(S, \tau(S))$, если M ограничено в линейном топологическом пространстве $(S, \tau(S))$. В случае конечной меры μ это эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$: $\mu\{t : |e(t)| \geqslant R\} < \varepsilon$ $(\forall e \in M)$. Отметим, что если M содержится в $E \in \mathfrak{A}$ и $\sigma(E, \bar{E})$ ограничено, то в силу леммы 1 [15] оно ограничено в $(S, \tau(S))$.

Теорема 1.3 наводит на мысль, что пересечение любой центрированной системы выпуклых, ограниченных, замкнутых подмножеств пространства $(S, \tau(S))$ не пусто. Однако С. В. Кисляков заметил, что это не так, в силу того, что, как хорошо известно, в $(S[0, 1], \tau(S))$ линейно и гомеоморфно вкладывается банахово пространство l^1. Теорема 1.3 позволяет доказать следующий частичный результат.

Теорема 1. *Пусть $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — центрированная система выпуклых ограниченных, замкнутых подмножеств пространства $(S, \tau(S))$, причем $V_\xi \subset S_+ = \{e \in S : e \geqslant 0\}$ $(\xi \in \Xi)$. Тогда $\bigcap V_\xi$ не пусто.*

Доказательство. Можно считать, что все $V_\xi \subset V \subset S_+$, где V выпукло, ограничено и замкнуто в $(S, \tau((S))$. Без труда проверяется, что множество $N(V)$ выпукло и ограничено в $(S, \tau(S))$. Пусть B есть замыкание $N(V)$ в $(S, \tau(S))$, E — линейная оболочка B, $\|\cdot\|_E$ — функционал Минковского множества B. Тогда в E выполнены условия (B') и (C'), следовательно, $E \in \mathfrak{N}$. Каждое V_ξ ограничено в E по норме. Остается применить теорему 1.3.

Замечание. Из результатов работы [17] вытекает следующее: Пусть пространство с мерой (T, Σ, μ) — неатомическое. Тогда существует такое выпуклое ограниченное множество V в $(S, \tau(S))$, что выпуклая оболочка множества $N(V)$ не является ограниченным множеством в $(S, \tau(S))$. Однако если вдобавок $V \subset S_+$, то множество $N(V)$ — выпукло и ограничено, чем мы и воспользовались при доказательстве теоремы 1.

2°. До конца этого параграфа пусть X есть произвольное банахово пространство, являющееся векторным подпространством[1] в S, $B = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$, через D обозначаем $\tau(S)$-замкнутую выпуклую оболочку множества $N(B)$ в S. До конца этого параграфа будем предполагать, что множество D ограничено в $(S, \tau(S))$. Отметим, что это предположение существенно для справедливости последующих утверждений. Через E обозначаем линейную оболочку множества D, $\|\cdot\|_E$ — функционал Минковского множества D. Ясно, что E есть банахово KN-пространство и в E выполнены условия (B') и (C').

Теорема 2. *Если X замкнуто в $(S, \tau(S))$, то X рефлексивно (термин «рефлексивность» понимается здесь, разумеется, в смысле теории линейных топологических пространств).*

Доказательство. Из теоремы о замкнутом графике следует, что топология $\tau(X)$ совпадает с нормированной топологией пространства X. Пусть V — произвольное ограниченное замкнутое подмножество в X. Тогда V $\sigma(E, \bar{E})$ — ограничено и $\tau(E)$-замкнуто. Из сказанного

[1] Подчеркнем, что мы не требуем, чтобы X было идеалом в S.

следует, что любая центрированная система ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств в X имеет непустое пересечение. Отсюда вытекает, что X рефлексивно.

Теорема 3. *Пусть мера μ σ-конечна и Y есть произвольное замкнутое подпространство в $L^1 = L^1(T, \Sigma, \mu)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *Y — рефлексивно;*

б) *если $y_n \in Y\,(n=1, 2, \ldots)$, $y_n \to 0\,(\mu)$, $\sup\|y_n\| < \infty$, то $\|y_n\| \to 0$.*

Доказательство. Справедливость а)$\Rightarrow$б) следует из того, что если $y_n \to 0\,(\mu)$ и $y_n \to 0$ слабо в L^1, то $\|y_n\| \to 0$ (см. [7], теорема IV. 8. 12). Импликация б)$\Rightarrow$а) доказывается так же, как теорема 2.

До конца параграфа будем предполагать дополнительно, что шар B замкнут в $(S, \tau(S))$. Введем также следующие обозначения:

если $M \subset S$, то M^τ есть замыкание M в $(S, \tau(S))$;

$\pi_1 : X \longrightarrow X^{**}$ — оператор канонического вложения;

$\pi_2 : E \longrightarrow \overline{\overline{E}}$ — оператор канонического вложения;

$\beta : \overline{E} \longrightarrow X^*$ — оператор сужения, т. е. $\beta f = f|_X$ для $f \in \overline{E}$;

$\beta^* : X^{**} \longrightarrow \overline{\overline{E}}$ — оператор сопряженный к β;

для $x^{**} \in X^{**}$ через $R(x^{**})$ обозначаем совокупность всех ограниченных по норме выпуклых множеств M в X таких, что $\sigma(X^{**}, X^*)$ — замыкание множества $\pi_1(M)$ содержит x^{**}.

Следующая теорема является обобщением такого известного факта: пусть Z есть банахово KN-пространство с тотальным $\overline{Z}$, удовлетворяющее условиям (B') и (C'), тогда (после естественного вложения Z в Z^{**}) существует проектор нормы 1 из Z^{**} на Z.

Теорема 4.

а) *Для любого $x^{**} \in X^{**}$ справедливо*

$$\pi_2^{-1}(\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}(\beta^* x^{**})) \in X.$$

б) *Для $x^{**} \in X^{**}$ положим*

$$P(x^{**}) = \pi_1(\pi_2^{-1}(\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}(\beta^* x^{**}))).$$

Тогда P есть проектор из X^{**} на $\pi_1(X)$, причем $\|P\| = 1$.

в) *Для P справедливо также следующее представление:*

$$\{\pi_1^{-1}(Px^{**})\} = \bigcap \{M^\tau : M \in R(x^{**})\}, \quad x^{**} \in X^{**}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольный $x^{**} \in X^{**}$ с $\|x^{**}\|_{X^{**}} \leqslant 1$. Пусть направление $\{x_\alpha\} \subset B$ таково, что $\pi_1(x_\alpha) \to x^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Тогда для любого $f \in \overline{E}$ имеем $(\pi_2(x_\alpha))(f) = f(x_\alpha) = (\beta f)(x_\alpha) \to x^{**}(\beta f) = (\beta^* x^{**})(f)$, тем самым $\pi_2(x_\alpha) \to \beta^* x^{**}$ в топологии $\sigma(\overline{\overline{E}}, \overline{E})$. Так как B выпукло и замкнуто в $(S, \tau(S))$, то $\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}(\beta^* x^{**}) \in \pi_2(B)$ по теореме 1.1. Утверждение а) доказано, более того, установлено, что P есть линейный оператор из X^{**} в $\pi_1(X)$, причем $\|P\| \leqslant 1$. Заметим, что $\beta^*(\pi_1 x) = \beta(x)$ для любого $x \in X$, ибо $(\beta^*(\pi_1 x))(f) = (\pi_1 x)(\beta(f)) = (\beta(f))(x) = f(x) = (\pi_2 e)(f)$ для любого $f \in \overline{E}$. Следовательно, для любого $x \in X$

имеем $P(\pi_1 x)=\pi_1(\pi_2^{-1}(\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}(\beta^*(\pi_1 x))))=\pi_1(\pi_2^{-1}(\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}\pi_2(x)))=\pi_1(\pi_2^{-1}(\pi_2 x))=$ $=\pi_1(x)$. Итак, а) и б) доказаны. Доказываем в). Можно считать, что $P(x^{**})=0$, ибо иначе вместо x^{**} мы стали бы рассматривать $x^{**}-P(x^{**})$. Можно также считать, что $\|x^{**}\|_{X^{**}}\leqslant 1$. Возьмем произвольное $M\in R(x^{**})$. Пусть направление $\{x_\alpha\}\subset M$ таково, что $\pi_1(x_\alpha)\to x^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Тогда, как уже отмечалось, $\pi_2(x_\alpha)\to\beta^* x^{**}$ в топологии $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$. Заметим, что $\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}(\beta^* x^{**})=0$ в силу б). Из теоремы 1.1 следует, что $0=$ $=\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}(\beta^* x^{**})\in\pi_2(M^\tau)$, откуда $0\in M^\tau$. Так как $\beta^* x^{**}$ — сингулярный функционал на $\bar{E}$, то найдется фундамент F в $\bar{E}$, такой что $\beta^* x^{**}|_F=0$. Пусть направление $\{x_\alpha\}\subset B$ таково, что $\pi_1(x_\alpha)\to x^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Тогда $\pi_2(x_\alpha)\to\beta^* x^{**}$ в топологии $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$, следовательно $x_\alpha\to 0$ в топологии $\sigma(E, F)$. Так как топология $\sigma(E, F)$ совместима с двойственностью между E и F, то для каждого индекса α и каждой $\sigma(E, F)$ — окрестности V точки 0 найдется элемент $x_{\alpha, V}\in V$, являющийся выпуклой комбинацией элементов $x_{\alpha'}$, с $\alpha'\geqslant\alpha$. Положим $\rho=(\alpha, V)$ и для $\rho_1=(\alpha_1, V_1)$, $\rho_2=(\alpha_2, V_2)$ пусть $(\rho_1\leqslant\rho_2)\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}(\alpha_2\geqslant\alpha_1$ и $V_2\subset V_1)$. Ясно, что $x_\rho\to 0$ в топологии $\sigma(E, F)$ и $\pi_1(x_\rho)\to x^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Для каждого $f\in F_+$ и каждого числа $\varepsilon>0$ положим $A(f, \varepsilon)=\{x\in B: |f|(|x|)\leqslant\varepsilon\}$. Ясно, что $A(f, \varepsilon)\in R(x^{**})$ и что $A(f, \varepsilon)$ замкнуто в $(S, \tau(S))$. Остается заметить, что $\bigcap\{A(f, \varepsilon): f\in F_+, \varepsilon>0\}=\{0\}$ тривиальным образом.

Следующая теорема является существенным дополнением к теореме 1.1..

Теорема 5. *Пусть V — непустое, выпуклое, ограниченное по норме подмножество в X, W — $\sigma(X^{**}, X^*)$ — замыкание множества $\pi_1(V)$ в X^{**}. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *V замкнуто в $(X, \tau(X))$ или, что то же самое, замкнуто в $(S, \tau(S))$;*

б) *$P(W)=\pi_1(V)$, где P — проектор из теоремы 4.*

Доказательство. Пусть U есть замыкание множества $\pi_2(V)$ в $\bar{\bar{E}}$ в топологии $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$. Пусть $x^{**}\in W$. Тогда существует направление $\{x_\alpha\}\subset V$ такое, что $\pi_1(x_\alpha)\to x^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Тогда $\pi_2(x_\alpha)\to$ $\to\beta^* x^{**}$ в топологии $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$, следовательно $\beta^* x^{**}\in U$. Итак, $\beta^*(W)\subset U$. Но $\beta^*\pi_1=\pi_2$. Теперь из $W\supset\pi_1(V)$ получаем $\beta^*(W)\supset\beta^*\pi_1(V)=\pi_2(V)$, таким образом $U\supset\beta^*(W)\supset\pi_2(V)$. Но оператор β^* слабо* непрерывен, поэтому множество $\beta^*(W)$ компактно в топологии $\sigma(\bar{\bar{E}}, \bar{E})$. Из $U\supset\beta^*(W)\supset$ $\supset\pi_2(V)$ заключаем, что $U=\beta^*(W)$. Теперь имеем $(P(W)=\pi_1(V))\Longleftrightarrow$ $(\pi_1^{-1}P(W)=V)\Longleftrightarrow(\pi_2^{-1}(\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}U)=V)\Longleftrightarrow(\mathrm{Pr}_{\pi_2(E)}U=\pi_2(V))$.
Остается применить теорему 1.1.

Замечание. *Пусть E есть произвольное банахово KN-пространство, являющееся идеалом в S.* Хорошо известно, что единичный шар $\{e \in E : \|e\|_E \leqslant 1\}$ замкнут в $(S, \tau(S))$ тогда и только тогда, когда в E выполнены условия (B') и (C'). Поэтому, в частности, теоремы 4 и 5 применимы к любому банахову KN-пространству X, являющемуся идеалом в S и удовлетворяющему условиям (B') и (C'). Заметим, однако, что даже для этого сугубо частного случая теоремы 4 и 5 нам не удалось найти в литературе.

§ 3. Представление функционалов на пространствах вектор-функций — обобщенная теорема Иосиды—Хьюитта

1°. В этом параграфе мы получим аналог обобщенной теоремы Иосиды — Хьюитта <4> для пространств вектор-функций. В случае векторнозначного L^∞ это было сделано В. Л. Левиным [4]. Его доказательство на наш, более общий случай не переносится. В § 4 результаты § 3 используются для обобщения теорем § 1 на пространства вектор-функций.

Напомним некоторые определения и результаты.

Пусть E — векторная решетка, F — идеал в $\tilde{E}$, X — банахово пространство. Линейный оператор $U: E \to X$ называется *мажорированным* ($U \in M(E \to X)$), если для любого $e \in E_+$ имеем $[U](e) = \sup \{\Sigma \|Ue_k\|_X : e_1, \ldots, e_n \in E_+, e = \Sigma e_k\} < \infty$. Легко видеть, что в этом случае $[U]$ продолжается до положительного функционала на всем E, для которого мы сохраним то же обозначение. Множество $U \in M(E \longrightarrow X)$ таких, что $[U] \in F$ обозначается через $M_F(E \longrightarrow X)$ [18].

Если E — K-пространство, то через $H_A(X \to E)$ обозначается пространство операторов $U: X \to E$ *с абстрактной нормой*: $\mathbf{|}U\mathbf{|} = \sup \{|Ux| : \|x\| \leqslant 1\} \in E$. Легко показать [18], что $M(E \to X^*)$ изоморфно $H_A(X \to \tilde{E})$ при отображении $U \in M(E \to X^*) \to U^*|_X$, причем $[U] = \mathbf{|}U^*|_X\mathbf{|}$.

Лемма 1. *Пусть E — векторная решетка с тотальным $\tilde{E}$. Тогда $M(E \to X^*) = M_{\overline{E}}(E \to X^*) \oplus M_{\tilde{E}_s}(E \to X^*)$, причем, если $U = U_l + U_s$, где $U_l \in M_{\overline{E}}(E \to X^*)$, $U_s \in M_{\tilde{E}_s}(E \to X^*)$, то $[U] = [U_l] + [U_s]$.*

Доказательство. Пусть $U \in M(E \to X^*)$. Если $V = U^*|_X$, то $V \in H_A(X \to \tilde{E})$ и $[U] = \mathbf{|}V\mathbf{|}$ в силу вышеизложенного. Положим $V_l(x) = \mathrm{Pr}_{\overline{E}}(Vx)$, $V_s(x) = \mathrm{Pr}_{\tilde{E}_s}(Vx)$ $(x \in X)$. Тогда $V = V_l + V_s$ и $\mathbf{|}V\mathbf{|} = \mathbf{|}V_l\mathbf{|} + \mathbf{|}V_s\mathbf{|}$. Если $U_l = V_l^*|_E$, $U_s = V_s^*|_E$, то опять-таки в силу вышеизложенного $U = U_l + U_s$, $[U] = \mathbf{|}V\mathbf{|} = \mathbf{|}V_l\mathbf{|} + \mathbf{|}V_s\mathbf{|} = [U_l] + [U_s]$ и $[U_l] = \mathbf{|}V_l\mathbf{|} \in \overline{E}$, $[U_s] = \mathbf{|}V_s\mathbf{|} \in \tilde{E}_s$.

2°. *Сначала мы получим представление линейных функционалов на тензорном произведении. При помощи этого представления мы получим описание функционалов на пространствах вектор-функций.*

В этом пункте E (r)-полная векторная решетка [1].

Предложение 1. *Пусть* $z=\sum_{k=1}^{n} e_k\otimes x_k\in E\otimes X\,(e_k\in E,\ x_k\in X)$, p — *монотонная полунорма на* $E\,(|e_1|\leqslant|e_2|\Rightarrow p(e_1)\leqslant p(e_2))$.
Тогда:

1) *существует* $v(z)=\sup\{|\Sigma e_k<x_k,\ x^*>|:x^*\in X^*,\ \|x^*\|\leqslant 1\}\in E$;

2) $p(v(z))=\inf p(\Sigma|e_k|\,\|x_k\|)$, *где* inf *берется по всем представлениям* $z=\Sigma e_k\otimes x_k$ (см. [15], § 3 и [19], стр. 1298—1299).

Определение 1. Линейный функционал ψ на $E\otimes X$ называется: 1) *регулярным* $(\psi\in(E\otimes X)^{\sim})$, если для любого $e\in E_+$ имеем $\psi'(e)=$ $=\sup\{|\psi(z)|:z\in E\otimes X,\ v(z)\leqslant e\}<\infty$;

2) *интегральным* $(\psi\in(E\otimes X)^{x})$, если из того, что направление $\{z_\alpha\}\subset$ $\subset E\otimes X$, $v(z_\alpha)\xrightarrow{(0)}0$ в E, следует $\psi(z_\alpha)\to 0$; 3) *сингулярным* $(\psi\in(E\otimes$ $\otimes X)^{\sim}_{s})$, если $\psi\in(E\otimes X)^{\sim}$ и существует фундамент G в E такой, что из $z\in E\otimes X$, $v(z)\in G$ следует $\psi(z)=0$.

Если в определении 1 положить $X=R^1$, то мы получим обычные определения регулярных, вполне линейных и сингулярных функционалов <4>. Установим соответствие между регулярными функционалами на $E\otimes X$ и мажорированными операторами.

Лемма 2. *Отображение* Q, *сопоставляющее каждому* $\psi\in(E\otimes$ $\otimes X)^{\sim}$ *оператор* $Q\psi$: $<(Q\psi)(e),\ x>=\psi(e\otimes x)$ $(e\in E,\ x\in X)$, *является алгебраическим изоморфизмом* $(E\otimes X)^{\sim}$ *на* $M(E\to X^*)$, *причем* $\psi'=[Q\psi]$.

Доказательство. Если $\psi\in(E\otimes X)^{\sim}$, то $\|(Q\psi)(e)\|_{X^*}=$ $=\sup\{|\psi(e\otimes x)|:\|x\|\leqslant 1\}\leqslant\psi'(|e|)$, откуда $[Q\psi]\leqslant\psi'$ и $Q\psi\in M(E\to X^*)$. Пусть $U\in M(E\to X^*)$. Если $z=\Sigma e_k\otimes x_k\in E\otimes X$, то $\psi(z)=(Q^{-1}U)(z)=$ $=\Sigma<Ue_k,\ x_k>$. Далее, $|\psi(z)|\leqslant\Sigma|<Ue_k,\ x_k>|\leqslant[U](\Sigma|e_k|\,\|x_k\|)$. Из пункта 2) предложения 1 получаем $|\psi(z)|\leqslant[U](v(z))$, откуда $\psi'\leqslant[U]$ и $\psi\in(E\otimes X)^{\sim}$.

Таким образом, ψ' распространяется до линейного положительного функционала на E, причем $|\psi(z)|\leqslant\psi'(v(z))$. Если E — банахова решетка, то $E\otimes X$ рассматривается с нормой, введенной в [20]. Через $E\tilde{\otimes}X$ обозначается пополнение $E\otimes X$ по этой норме. Из теоремы 3 [20], леммы 2 и предложения 1 (пункт 2) получается

Лемма 3. *Если* E — *банахова решетка, то* $(E\tilde{\otimes}X)^*=(E\otimes X)^{\sim}$, *причем* $\|\psi\|_{(E\tilde{\otimes}X)^*}=\|\psi'\|_{E^*}$.

Лемма 4. *Если* $\psi\in(E\otimes X)^{x}$, *то* $\psi\in(E\otimes X)^{\sim}$.

Доказательство. Фиксируем $e\in E_+$, E_e — KB — линеал ограниченных элементов, порожденный e ([6], гл. VII, § 4). Так как $\psi\in$

---

[1] (r)-полнота E означает, что если для $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E\ \exists r\in E_+$ такое, что для $\forall\varepsilon>0\ \exists N:n,\ m\geqslant N$ имеем $|e_n-e_m|\leqslant\varepsilon r$, то $\exists e\in E:e_n\xrightarrow{(r)}e$. Любая банахова решетка и любое K-пространство (r)-полны ([6], л. V.3.1). Таким образом, читатель, интересующийся только пространствами измеримых функций, может считать, что $E\in\mathfrak{A}$

$\in (E\otimes X)^X$, то $\psi\in(E_e\otimes X)^X$, откуда $\psi\in(E_e\otimes X)^*$. Тогда по лемме 3 $\psi\in(E_e\otimes X)^\sim$. В силу произвольности e получаем $\psi\in(E\otimes X)^\sim$.

Лемма 5. $(\psi\in(E\otimes X)^X)\Longleftrightarrow(Q\psi\in M_{\overline{E}}(E\to X^*))\Longleftrightarrow(\psi'\in\overline{E})$.

Доказательство. Вторую эквивалентность получаем из леммы 2; $(\psi'\in\overline{E})\Rightarrow(\psi\in(E\otimes X)^X)$ очевидно. Пусть $\psi\in(E\otimes X)^X$. Покажем, что из $e_\alpha\downarrow 0$ следует $\psi'(e_\alpha)\to 0$. Для любого $\varepsilon>0$ и любого α найдутся $z_\alpha\in E\otimes X:\psi'(e_\alpha)<\varepsilon+|\psi(z_\alpha)|$ и $v(z_\alpha)\leqslant e_\alpha$. Тогда $v(z_\alpha)\xrightarrow{(0)}0$ и, следовательно, $\overline{\lim}\,\psi'(e_\alpha)\leqslant\varepsilon$. В силу производительности ε получаем $\psi'(e_\alpha)\to 0$.

Лемма 6. $(\psi\in(E\otimes X)_s^\sim)\Longleftrightarrow(Q\psi\in M_{\widetilde{E}_s}(E\to X^*))\Longleftrightarrow(\psi'\in\widetilde{E}_s)$.

Доказательство. Вторую эквивалентность получаем из леммы 2 первая — очевидна из определений.

Теорема 1. *Пусть E — (r)-полная векторная решетка с тотальным $\overline{E}$. Тогда $(E\otimes X)^\sim=(E\otimes X)^X\oplus(E\otimes X)_s^\sim$, причем, если $\psi=\psi_i+\psi_s$, где $\psi_i\in(E\otimes X)^X$, $\psi_s\in(E\otimes X)_s^\sim$, то $\psi'=\psi'_i+\psi'_s$.*

Доказательство. Пусть $\psi\in(E\otimes X)^\sim$. Тогда по лемме 2 $Q\psi\in M(E\to X^*)$, и по лемме 1 получаем, что $Q\psi=U_i+U_s$, где $U_i\in M_{\overline{E}}(E\to X^*)$, $U_s\in M_{\widetilde{E}_s}(E\to X^*)$. Положим $\psi_i=Q^{-1}U_i$, $\psi_s=Q^{-1}U_s$. Тогда в силу лемм 1 и 2 $\psi=\psi_i+\psi_s$ и $\psi'=\psi'_i+\psi'_s$, причем $\psi_i\in(E\otimes X)^X$, $\psi_s\in(E\otimes X)_s^\sim$ (леммы 5, 6). Легко видеть, что $(E\otimes X)^X\cap(E\otimes X)_s^\sim=\{0\}$, чем и закончено доказательство. Отметим, что, если E — банахова решетка, то в силу леммы 3 теорему 1 можно рассматривать как теорему о строении $(E\widetilde{\otimes}X)^*$.

3°. Пусть E — фундамент в $S(T,\ \Sigma,\ \mu)$. Через $E(X)$ обозначается пространство всех измеримых функций $\vec{z}:T\to X$ таких, что если $v(\vec{z})(t)=\|\vec{z}(t)\|_X$, то $v(\vec{z})\in E$. Отметим, что $E\otimes X$ естественно вкладывается в $E(X)$, причем элементы, обозначенные через $v(\vec{z})$ здесь и в п. 2°, совпадают. Если E — банахово KN-пространство, то $E(X)$ банахово пространство с нормой: $\|\vec{z}\|=\|v(\vec{z})\|_E$. Далее в этом пункте $E\in\mathfrak{A}$. Кроме того, *далее до конца работы будем предполагать, что вместо условия d) из $<2>$ выполнено более сильное.*

d') существует набор дизъюнктных множеств $\{T_\xi\}\subset\Sigma(\mu)$ такой, что для любого $A\in\Sigma$ имеем $\mu(A)=\Sigma\mu(A\cap T_\xi)$. Из условия d') вытекает, в частности, существование лифтинга $L^\infty(T,\ \Sigma,\ \mu)$ [21] и независимость пространства $E(X)$ от реализации E в виде фундамента в $S(T,\ \Sigma,\ \mu)$, где $(T,\ \Sigma,\ \mu)$ удовлетворяет $<2>$ и d') [15].

Определение 2. Функционал φ на $E(X)$ называется 1) *регулярным* $(\varphi\in E(X)^\sim)$, если для любого $e\in E_+$ имеем $\varphi''(e)=\sup\{|\varphi(\vec{z})|:\vec{z}\in E(X),\ v(\vec{z})\leqslant e\}<\infty$; 2) *интегральным* $(\varphi\in E(X)^x)$, если из того, что направление $\{\vec{z}_\alpha\}\subset E(X)$, $v(\vec{z}_\alpha)\xrightarrow{(0)}0$ в E следует $\varphi(\vec{z}_\alpha)\to 0$;

3) *сингулярным* ($\varphi \in E(X)_s^{\sim}$), если $\varphi \in E(X)^{\sim}$ и существует фундамент G в E такой, что из $\vec{z} \in E(X)$, $v(\vec{z}) \in G$ (т. е. $\vec{z} \in G(X)$) следует $\varphi(\vec{z}) = 0$.

Лемма 7. *Если $\varphi \in E(X)^{\sim}$, то φ'' — распространяется до линейного положительного функционала на E.*

Доказательство. Если мы покажем, что φ'' аддитивен на E_+, то φ'' по линейности можно распространить на все E ([6], л. VIII. 1. 1). Пусть $e = e_1 + e_2$; $e_1, e_2 \geqslant 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существуют $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in E(X): v(\vec{z}_1) \leqslant e_1$, $v(\vec{z}_2) \leqslant e_2$ и $\varphi''(e_1) + \varphi''(e_2) < 2\varepsilon + |\varphi(\vec{z}_1)| + |\varphi(\vec{z}_2)|$. Если $\vec{\eta}_i(t) = [\operatorname{sign} \varphi(\vec{z}_i)] \vec{z}_i(t)$ $(t \in T)$ $(i = 1, 2)$, то $v(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) \leqslant v(\vec{\eta}_1) + v(\vec{\eta}_2) = e_1 + e_2 = e$ и $\varphi''(e_1) + \varphi''(e_2) < 2\varepsilon + \varphi(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) \leqslant 2\varepsilon + \varphi''(e)$, откуда $\varphi''(e_1) + \varphi''(e_2) \leqslant \varphi''(e)$.

Обратно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\vec{z} \in E(X)$: $v(\vec{z}) \leqslant e = e_1 + e_2$, $\varphi''(e) < \varepsilon + \varphi(\vec{z})$. Без ограничения общности можно считать, что $e(t) > 0$ при любом $t \in T$. Положим $\vec{z}_i(t) = \vec{z}(t) e_i(t) [e(t)]^{-1}$ $(i = 1, 2)$. Тогда $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ и $v(\vec{z}_i) \leqslant e_i$ $(i = 1, 2)$, откуда $\varphi''(e) < \varepsilon + \varphi(\vec{z}_1) + \varphi(\vec{z}_2) \leqslant \varepsilon + \varphi''(e_1) + \varphi''(e_2)$. В силу ([21], гл. II, § 6, теорема 2), если $\mu(T) < \infty$, то для любого $\vec{z} \in E(X)$ существует последовательность конечнозначных вектор-функций $\{\vec{z}_n\}: \vec{z}_n(t) \to \vec{z}(t)$ п. в. и $v(\vec{z}_n) \leqslant v(\vec{z})$. Отсюда легко получается

Лемма 8. *Пусть G — фундамент в E. Тогда для любого $\vec{z} \in E(X)$ существует направление $\{\vec{z}_\alpha\} \subset E \otimes X$ такое, что $v(\vec{z}_\alpha) \in G$, $v(\vec{z}_\alpha - \vec{z}) \xrightarrow{(0)} 0$ в E и $v(\vec{z}_\alpha) \leqslant v(\vec{z})$.*

Наша цель свести изучение функционалов на $E(X)$ к рассмотрению функционалов на $E \otimes X$. В связи с этим определим оператор $j: E(X)^{\sim} \to (E \otimes X)^{\sim}$, сопоставляющий каждому $\varphi \in E(X)^{\sim}$ его сужение на $E \otimes X$.

Лемма 9. *Если $\varphi \in E(X)^{x}$, то $\varphi \in E(X)^{\sim}$ и $\varphi'' = (j\varphi)'$.*

Доказательство. Если $\varphi \in E(X)^{x}$, то $j\varphi \in (E \otimes X)^{x}$, откуда $j\varphi \in (E \otimes X)^{\sim}$ по лемме 4. Из леммы 8 выводим, что $\varphi'' = (j\varphi)'$.

Лемма 10. *Если $j\varphi = 0$, то $\varphi \in E(X)_s^{\sim}$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что $\varphi'' \in \widetilde{E}_s$. Пусть $\varphi'' = f_l + f_s$, где $f_l \in \overline{E}$, $f_s \in \widetilde{E}_s$; $G = \{e \in E : f_s(|e|) = 0\}$ — фундамент в E. Покажем, что $\varphi''|_G = 0$. Пусть $e \in G$ и $\vec{z} \in E(X): v(\vec{z}) \leqslant e$. По лемме 8 существует направление $\{\vec{z}_\alpha\} \subset E \otimes X: v(\vec{z} - \vec{z}_\alpha) \xrightarrow{(0)} 0$, $v(\vec{z}_\alpha) \leqslant v(\vec{z}) \leqslant e$. Тогда $|\varphi(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)| \leqslant \varphi''(v(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)) = f_l(v(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)) + f_s(v(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)) = f_l(v(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)) \to 0$. Так как $\varphi(\vec{z}_\alpha) = 0$, то $|\varphi(\vec{z})| \leqslant |\varphi(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)| + |\varphi(\vec{z}_\alpha)| \leqslant f_l(v(\vec{z} - \vec{z}_\alpha)) \to 0$, откуда $\varphi''(e) = 0$.

Лемма 11. *Пусть* $0 \leqslant f \in \overline{E}$, $0 \leqslant h \in \widetilde{E}_s$, $0 \leqslant e \in E$, $\varepsilon > 0$; $G = \{e \in E : h(|e|) = 0\}$. *Если* $(f \vee h)(e) < \varepsilon + f(e_1) + h(e_2)$, *где* $e = e_1 + e_2$, $e_1 \geqslant 0$, $e_2 \geqslant 0$, *то существует* $\widetilde{e}_1 \in G$, $\widetilde{e}_2 \in E$:

1) $0 \leqslant \widetilde{e}_1 \leqslant e_1, 0 \leqslant \widetilde{e}_2 \leqslant e_2$; 2) $(f \vee h)(e) < f(e_1) + h(e_2) + \varepsilon < f(\widetilde{e}_1) + h(\widetilde{e}_2) + 2\varepsilon$; 3) $f(\widetilde{e}_2) < \varepsilon$.

Доказательство. Так как G — фундамент в E, то существует $\widetilde{e}_1 \in G : 0 \leqslant \widetilde{e}_1 \leqslant e_1$ и $f(e_1 - \widetilde{e}_1) < \varepsilon$. По той же причине найдется $g \in G$: $0 \leqslant g \leqslant e_2$, $f(e_2 - g) < \varepsilon$. Положим $\widetilde{e}_2 = e_2 - g$. Тогда $f(\widetilde{e}_2) = f(e_2 - g) < \varepsilon$ и $f(e_1) + h(e_2) < \varepsilon + f(\widetilde{e}_1) + h(\widetilde{e}_2)$.

Определим оператор P продолжения функционалов с $E \otimes X$ на $E(X)$ (a priori этот оператор не обязан быть линейным; в случае $E = L^\infty(T, \mu)$ В. Л. Левину удалось построить линейный оператор P).

Если $\psi \in (E \otimes X)^\times$, то в силу лемм 8 и 9 существует единственное продолжение $\widetilde{\psi} \in E(X)^\times$. Если $\psi \in (E \otimes X)^\sim_s$, то в силу того, что $|\psi(\vec{z})| \leqslant \psi'(v(\vec{z}))$ $(\vec{z} \in E \otimes X)$ по теореме Хана—Банаха существует линейный функционал $\widetilde{\psi}$ на $E(X)$: $j\widetilde{\psi} = \psi$ и $|\widetilde{\psi}(\vec{z})| \leqslant \psi'(v(\vec{z}))$ для любого $\vec{z} \in E(X)$. Если $\psi \in (E \otimes X)^\sim$, то по теореме 1 имеем единственное разложение $\psi = \psi_i + \psi_s$. Положим $P\psi = \widetilde{\psi}_i + \widetilde{\psi}_s$. Очевидно, что $j(P\psi) = \psi$; $P\psi = E(X)^\sim$ причем в силу теоремы 1 $(P\psi)'' = \psi'$; $(P\psi \in E(X)^\times \Longleftrightarrow \psi \in (E \otimes X)^\times)$; $(P\psi \in E(X)^\sim_s \Longleftrightarrow \psi \in (E \otimes X)^\sim_s)$.

Докажем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть E — фундамент в $S(T, \Sigma, \mu)$ с тотальным $\overline{E}$. Тогда* $E(X)^\sim = E(X)^\times \oplus E(X)^\sim_s$, *причем, если* $\varphi = \varphi_i + \varphi_s$, *где* $\varphi_i \in E(X)^\times$, $\varphi_s \in E(X)^\sim_s$, *то* $\varphi'' = \varphi''_i + \varphi''_s$.

Доказательство. 1) Из сделанных замечаний очевидно, что $(\varphi \in E(X)^\times \Longleftrightarrow \varphi'' \in \overline{E})$ и $(\varphi \in E(X)^\sim_s \Longleftrightarrow \varphi'' \in \widetilde{E}_s)$. В силу леммы 8 $E(X)^\times \cap E(X)^\sim_s = \{0\}$. Пусть $\varphi \in E(X)^\sim$. Тогда по теореме 1 $j\varphi = (j\varphi)_i + (j\varphi)_s$, где $(j\varphi)_i \in (E \otimes X)^\times$, $(j\varphi)_s \in (E \otimes X)^\sim_s$. Положим $\varphi_i = P[(j\varphi)_i]$, $\varphi_s = \varphi - \varphi_i$. Тогда $\varphi = \varphi_i + \varphi_s$ и $\varphi_i \in E(X)^\times$. Далее, $\varphi_s = \varphi - \varphi_i = \varphi - (P(j\varphi) - P[(j\varphi)_s]) = (\varphi - P(j\varphi)) + P[(j\varphi)_s]$. В силу леммы 10 $(\varphi - P(j\varphi)) \in E(X)^\sim_s$ и, как уже отмечалось, $P[(j\varphi)_s] \in E(X)^\sim_s$. Следовательно, $\varphi_s \in E(X)^\sim_s$.

2) Осталось доказать, что $\varphi'' = \varphi''_i + \varphi''_s$. Очевидно, что $\varphi'' \leqslant \varphi''_i + \varphi''_s$. Докажем обратное. Так как $\varphi''_i \wedge \varphi''_s = 0$, то $\varphi''_i + \varphi''_s = \varphi''_i \vee \varphi''_s$. Если $e \in E_+$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существуют $e_1, e_2 \in E_+$: $e = e_1 + e_2$ и $(\varphi''_i \vee \varphi''_s)(e) < \varphi''_i(e_1) + \varphi''_s(e_2) + \varepsilon$. Пусть $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ — элементы, удовлет-

воряющие условиям леммы 11. Тогда $(\varphi''_i \vee \varphi''_s)(e) < \varphi''_i(\tilde{e}_1) + \varphi''_s(\tilde{e}_2) + \varepsilon$. Очевидно, что существуют $\vec{z}_k \in E(X)$ $(k=1,2)$: $v(\vec{z}_k) \leqslant \tilde{e}_k$ и $(\varphi''_i \vee \varphi''_s)(e) < \varphi_i(\vec{z}_1) + \varphi_s(\vec{z}_2) + 3\varepsilon$. Так как $|\varphi_s(\vec{z}_1)| \leqslant \varphi''_s(v(\vec{z}_1)) \leqslant \varphi''_s(\tilde{e}_1) = 0$ и $|\varphi_i(\vec{z}_2)| \leqslant \varphi''_i(\tilde{e}_2) < \varepsilon$ по определению $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$, то окончательно получаем

$$(\varphi''_i \vee \varphi''_s)(e) < \varphi_i(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) - \varphi_i(\vec{z}_2) + \varphi_s(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + 3\varepsilon < \varphi_i(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) +$$
$$+ \varphi_s(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + 4\varepsilon = \varphi(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) + 4\varepsilon \leqslant \varphi''(e) + 4\varepsilon,$$

в силу того, что $v(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) \leqslant v(\vec{z}_1) + v(\vec{z}_2) \leqslant e$.

Очевидно, имеет место

Лемма 12. *Если $E \in \mathfrak{A}$ — банахово KN-пространство, то $E(X)^* = E(X)^\sim$, причем $\|\varphi\|_{E(X)^*} = \|\varphi''\|_{E^*}$.*

Пусть $E \in \mathfrak{A}$ — банахово KN-пространство, удовлетворяющее следующему условию: $((f = f_i + f_s, f_i \in \overline{E}, f_s \in \tilde{E}_s) \Rightarrow (\|f\| = \|f_i\| + \|f_s\|))$. Оно выполнено, например, если $E = L^\infty$ или $E = L_M$ — пространству Орлича, когда M не удовлетворяет Δ_2 — условию [22]. В силу теоремы 2 любой $\varphi \in E(X)^*$ представим в виде $\varphi = \varphi_i + \varphi_s$, причем $\varphi'' = \varphi''_i + \varphi''_s$. По лемме 12 получаем: $\|\varphi\| = \|\varphi_i\| + \|\varphi_s\|$.

Если $E \in \mathfrak{A}$, F — фундамент в $\overline{E}$, то через $s(X)\cdot F(X^*)$ обозначим пространство всех функций $\overleftarrow{w}: T \to X^*$ таких, что функции $t \to \langle x, \overleftarrow{w}(t)\rangle$ μ — измеримы при любом $x \in X$ и $v(\overleftarrow{w}) \overset{\text{def}}{=} \sup\{|\langle x, \overleftarrow{w}(\cdot)\rangle| : \|x\| \leqslant 1\} \in F$.

Теорема 3. ([18], теорема 4.1). *Отображение R, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w} \in s(X)\cdot\overline{E}(X^*)$ функционал $(R\overleftarrow{w})(\vec{z}) = \int \langle \vec{z}(t), \overleftarrow{w}(t)\rangle d\mu(t)$ $(\vec{z} \in E(X))$, является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(X)\cdot\overline{E}(X^*)$ на $E(X)^\times$, причем $(R\overleftarrow{w})''(e) = \int e\, v(\overleftarrow{w}) d\mu (e \in E)$.*

Теоремой 3 и оправдывается название интегральные функционалы для элементов $E(X)^\times$. Таким образом, получен полный аналог представления функционалов в скалярном случае <4,5>.

§ 4. Замкнутые по мере множества. Случай пространств измеримых вектор-функций

В предыдущем параграфе мы получили в векторнозначном случае аналог представления функционалов, которым мы пользовались при доказательстве теоремы 1.1. Чтобы получить обобщение теоремы 1.1 в этом направлении, мы получим еще ряд утверждений о двойственности в пространствах вектор-функций.

Пусть $E \in \mathfrak{A}$. Множество вида $I_f = \{\varphi \in E(X)^\sim : \varphi'' \leqslant f\}$ $(f \in \tilde{F}_+)$ называется интервалом в $E(X)^\sim$. *Пусть F идеал в $\tilde{E}$.* Тогда $E(X)^\sim_F = \{\varphi \in E(X)^\sim : \varphi'' \in F\}$ — линейное пространство; интервалом в $E(X)^\sim_F$ называется $I_f\,(f \in F_+)$. В силу результатов § 3 имеем $E(X)^{\sim}_{\tilde{E}} = E(X)^{\sim}$, $E(X)^{\sim}_{\overline{E}} = E(X)^{x}$, $E(X)^{\sim}_{\tilde{E}_s} = E(X)^{\sim}_{s}$. Пусть F тотально на E. Тогда через $o(E(X), E(X)^{\sim}_{F})$ обозначим топологию в $E(X)$ равномерной сходимости на интервалах $I_f\,(f \in F_+)$, через $(E, o(E, F))(X)$ обозначим пространство $E(X)$ с локально выпуклой топологией, порождаемой полунормами $p_f(\vec{z}) = f(v(\vec{z}))\,(f \in F_+)$. Очевидно, что $p_{I_f}(\vec{z}) = \sup\{|\varphi(\vec{z})| : \varphi \in I_f\} \leqslant f(v(\vec{z}))$. Из теоремы 3.3 выводим, что если $F \subset \overline{E}$, то в последней формуле имеет место равенство. В общем же случае

Предложение 1. $(E(X), o(E(X); E(X)^{\sim}_{F}))^{*} = (E, o(E, F))(X)^{*} = E(X)^{\sim}_{F}$.

Доказательство. Включение первого пространства во второе и третьего в первое очевидны. Пусть $\varphi \in (E, o(E, F))(X)^{*}$. Покажем, что $\varphi'' \in F$. В силу <6> достаточно проверить, что из $e_\alpha \to 0\,(o(E, F))$ следует $\varphi''(e_\alpha) \to 0$, но это тривиально.

Следствие. 1) *Интервалы* $\sigma(E(X)^{\sim}_{F}, E(X))$ — *компактны.* 2) *Если* X — *рефлексивно, то интервалы* $I_e = \{\vec{z} \in E(X) : v(\vec{z}) \leqslant e\}$ $(e \in E)$ $\sigma(E(X), E(X)^{x})$ — *компактны.*

Предложение 2. *В пространстве* $(E(X)^{\sim}, \sigma(E(X)^{\sim}, E(X))$ *любое ограниченное множество относительно компактно; более того* $(E(X), \beta(E(X), E(X)^{\sim}))$ — *бочечное и борнологическое пространство.*

Доказательство. Пусть M $\sigma(E(X)^{\sim}, E(X))$ — ограниченное множество. Покажем, что $M'' = \{\varphi'' : \varphi \in M\}$ $\sigma(\tilde{E}, E)$-ограничено. Пусть $e \in E_+$, E_e — банахово KN-пространство ограниченных элементов [6]. Так как $E_e(X)$ — банахово пространство, то по теореме Банаха — Штейнгауза $\sup\{\varphi''(e) : \varphi \in M\} < \infty$ и, следовательно, M'' $\sigma(\tilde{E}, E)$-ограничено. Тогда интервалы I_e в $E(X)$ сильно ограничены, откуда $(E(X), \beta)^{*} \subset E(X)^{\sim}$. Обратное включение очевидно, откуда и следует бочечность. Проверка борнологичности тривиальна.

Замечание. Отметим, что в большинстве результатов § 3 и 4, где не шла речь об интегральных функционалах, условие $E \in \mathfrak{A}$ излишне. Соответствующие результаты верны для любого K-пространства E, если пользоваться общим определением $E(X)$ из [15].

Перейдем теперь к основной задаче параграфа — перенесению результатов § 1 на пространства $E(X)$. Будем говорить, что направление $\{\vec{z}_\alpha\} \subset S(T, \Sigma, \mu)(X)$ (μ)-сходится к $\vec{z} \in S(X)$, если $v(\vec{z}_\alpha - \vec{z}) \to 0\,(\mu)$. Топологию (μ)-сходимости по аналогии со скалярным случаем будем обозначать $\tau(S(X))$, $\tau(E(X))$. Сформулируем аналоги лемм 1.1 — 1.4.

Лемма 1. *Пусть* $E \in \mathfrak{A}$, *множество* M $\sigma(E(X), E(X)^{x})$-*ограничено. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) M *замкнуто в* $(S(X), \tau(S(X)))$;

2) M *замкнуто в* $(E(X), \tau(E(X)))$.

Доказательство аналогично лемме 1.1 с последующим применением теоремы 1.1 [18].

Лемма 2. *Пусть F — фундамент в $\overline{E}$, $\{\vec{z}_\alpha\} \subset E(X)$; $\vec{z}, \vec{z}_0 \in E(X)$. Если существует $g \in S$, такой что $v(\vec{z}_\alpha) \leqslant g$ при любом α, $\vec{z}_\alpha \to \vec{z}(\mu)$ и $\vec{z}_\alpha \to \vec{z}_0\,(\sigma(E(X), F(X^*))$, то $\vec{z} = \vec{z}_0$.*

Доказательство аналогично лемме 1.2, если учесть, что $F(X^*)$ тотально на $E(X)$ [18].

Лемма 3. *Пусть F — фундамент в $\overline{E}$. Если направление $\vec{z}_\alpha \to 0\,(\sigma(E(X), s(X), F(X^*)))$, то выпуклая замкнутая в $(E(X), \tau(E(X)))$ оболочка множества $\{\vec{z}_\alpha\}$ содержит 0.*

Доказательство аналогично лемме 1.3 с использованием предложения 1.

Пусть, далее, $E \in \mathfrak{N}$ и X — рефлексивно, $\pi: E(X) \to \overline{E}(X^*)^\sim$. По теореме 3.2 $\overline{E}(X^*)^\sim = \overline{E}(X^*)^x \oplus \overline{E}(X^*)^\sim_s$. Так как X рефлексивно, то $\overline{E}(X^*)^* = \overline{\overline{E}}(X^{**}) = E(X)$ (см. теорему 8, (1)$\Longleftrightarrow$(3) [23] и теорему 3.3). Обозначим через Pr проектор из $\overline{E}(X^*)^\sim$ на $E(X)$. Аналогично лемме 1.4 получаем лемму 4.

Лемма 4. *Пусть $E \in \mathfrak{A}$, X — рефлексивно. Если $\{\vec{z}_\alpha\} \subset E(X)$, $\pi\vec{z}_\alpha \to \varphi\,(\sigma(\overline{E}(X^*), \sim\overline{E}(X^*))$ и $\pi\vec{z} = \Pr\varphi$, то существует фундамент F в $\overline{E}$ такой, что $\vec{z}_\alpha \to \vec{z}\,(\sigma(E(X), F(X^*)))$.*

Из лемм 1—4 и предложения 2 аналогично тому, как это было сделано в § 1, получаем теорему 1.

Теорема 1. *Пусть $E \in \mathfrak{N}$, X — рефлексивное банахово пространство. Пусть V — непустое выпуклое подмножество в $E(X)$, W — $\sigma(\overline{E}(X^*)^\sim, \overline{E}(X^*))$ — замыкание множества $\pi(V)$ в $\overline{E}(X^*)^\sim$. Тогда*

а) *если V замкнуто в $(E(X), \tau(E(X)))$, то*

$$\Pr W = \pi(V); \tag{$*$}$$

б) *если V $\sigma(E(X), \overline{E}(X^*))$-ограничено и удовлетворяет условию ($*$), то V замкнуто в $(E(X), \tau(E(X)))$.*

Из теоремы 1 получаем обобщения теорем 1.2—1.6 на случай пространств $E(X)$, где X рефлексивно (в их формулировках E надо заменить на $E(X)$, F — на $F(X^*)$, $\overline{E}$ — на $\overline{E}(X^*)$; для доказательства аналога теоремы 1.2 достаточно заметить, что в F существует рефлексивный по Накано фундамент). Отметим, что предположение о рефлексивности X существенно для справедливости этих теорем.

Теоремы 1.1—1.6 были получены вторым автором для случая банахова KN-пространства и конечной меры; на общий случай они были обобщены первым автором. Теорема 1.7 и результаты § 2 получены вторым автором, а результаты § 3—4 — первым.

Поступило 7.XII.1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Josida K., Hewitt E., Finitely additive measures, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 46—66.
2. Хавин В. П., Слабая полнота пространства L^1/H^1_0, Вестник ЛГУ, № 13 (1973), 77—81.

3. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства, *ЖВМ и МФ* 8, № 4 (1968), 725—779.
4. Левин В. Л., Субдифференциалы выпуклых интегральных функционалов и лифтинги, тождественные на подпространствах L^∞, ДАН 211, № 5 (1973), 1046—1049.
5. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1958.
6. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы. Общая теория*, М., ИЛ, 1962.
8. Шефер Х., Топологические векторные пространства, М., «Мир», 1971.
9. Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., «Наука», 1967.
10. Amemiya I., On ordered topological linear spaces, Proc. of Symp. on linear spaces, Ierusalem (1960), 14—21.
11. Luxemburg W. A. I., Notes on Banach Function Spaces XVa, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A68 (1965), 415—429.
12. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я., О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах, Мат. сб. 84 (126): 3 (1971), 331—352.
13. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C., Notes on Banach Function Spaces XIII, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A67 (1964), 530—543.
14. Mori T., Amemiya I., Nakano H., On the reflexivity of semicontinuous norms, Proc. Japan Acad., 31 (1955), 684—685.
15. Бухвалов А. В., Пространства вектор-функций и тензорные произведения, Сиб. мат. ж. 13, № 6 (1972), 1229—1238.
16. Bessaga C., Pelczyński A., On extreme points in separable conjugate spaces, Israel J. Math., 4, № 4 (1966), 262—264.
17. Pryce J. D., An unpleasant set in a non-locally convex vector lattice, Proc. Edinburgh Math. Soc 18, № 3 (1973), 229—233.
18. *Бухвалов А. В., Об аналитическом представлении операторов с абстрактной* нормой, Изв. вузов, Матем. № 11 (1975), 21—32.
19. Левин В. Л., Субдифференциалы выпуклых отображений и сложных функций, Сиб. мат. ж. 13, № 6 (1973), 1295—1303.
20. Левин В. Л., Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые КВ-линеалами, Труды Моск. матем. о-ва, 20 (1969), 43—82.
21. Dinculeanu N., *Vector measures, Berlin, 1966.*
22. Ando T. Linear functionals on Orlicz spaces, Nieuw. Archief voor Wiskunde, (3) 8, № 1 (1960), 1—16.
23. Бухвалов А. В., Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой, ДАН 208, № 5 (1973), 1012—1015.
24. Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я., О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций, ДАН 212, № 6 (1973), 1273—1275.
25. Komlós J.; *A generalization of a psoblem of Steinhaus, Acta Math. Acad. Sci.* Hung., 18, № 1—2 (1967), 217—229.

8. З а с л а в с к и й А.Я. Внутренняя характеристика опорных множеств.– В сб.: Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1978, с.36–41.

9. Л е в а ш о в В.А. Полутопологические векторные пространства.– В сб.: Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1977, с. 92–102.

УДК 513.88

Г.Я. ЛОЗАНОВСКИЙ
(Ленинград)

О ПОРЯДКОВОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ К-ПРОСТРАНСТВ

Используется терминология из [1], [2]. Пусть X – векторная решётка (ВР). Напомним, что последовательность $\{x_n\}\subset X$ порядково сходится ($o\sigma$-сходится) к элементу $x\in X$, если существует $\{u_n\}\subset X$, такая, что $|x-x_n|\leq u_n\downarrow 0$. С помощью $o\sigma$-сходимости в X вводится секвенциальная порядковая топология (коротко $o\sigma$-топология), в которой замкнуты (по определению) те и только те множества, которые содержат пределы своих $o\sigma$-сходящихся последовательностей. Напомним, что $o\sigma$-сходимость не является топологической сходимостью и для подмножества $D\subset X$ его $o\sigma$-замыкание, обозначаемое $cl\,D$, вообще говоря, не получается присоединением к D всех $o\sigma$-пределов последовательностей из D.

Определение. ВР X называется $o\sigma$-сепарабельной, если в X найдётся такое счётное множество D, для которого $cl\,D=X$.

Напомним, что положительный элемент $e\in X$ называется единицей, если $e\wedge|x|>0$ для любого $x\neq 0$.

Через $X^{\sim}$ (соотв. $X^{\sim}_n$) обозначается множество всех регулярных (соотв. порядково непрерывных) функционалов на X.

Через $S[0,1]$ обозначается, как обычно, К-пространство всех (классов эквивалентности) измеримых почти всюду конечных функций на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега.

К-пространство всех последовательностей обозначаем через s.

Целью настоящей статьи является доказательство следую -
щей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть X — К-пространство с *единицей и тоталь -*
ным множеством порядково непрерывных функционалов. Тогда
равносильны следующие три утверждения:

1) X изоморфно идеалу в $S[0,1] \times S$;

2) в $X^{\sim}$ существует счётная система функционалов, тоталь-
ная на X ;

3) X $o\sigma$ -сепарабельно.

При этом мы умеем выводить 1) или 2) из 3) только в пред-
положении, что $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$. Существенно ли это предположение
нам неизвестно.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Достаточно рассмотреть случай,
когда X есть идеал в $S[0,1]$. Представим X в виде со-
единения счётного числа попарно дизъюнктных полос X_n ($n =$
$= 1, 2, \ldots$) на каждой из которых имеется существенно положи-
тельный порядково непрерывный функционал. (Т.к. $X_n^{\sim}$ тотально,
то подобные полосы существуют). Каждая из этих полос погру -
жается в КВ-пространство с аддитивной нормой, или, иначе го-
воря, в пространство изоморфное $L^1[0,1]$. На пространстве же
$L^1[0,1]$, а тем самым и на X , существует счётная тотальная
система регулярных (даже порядково непрерывных) функционалов.

2)$\Rightarrow$1). Можно считать, что X есть К-пространство огра-
ниченных элементов с естественной нормой.

Пусть $\{f_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ - счётная, тотальная система регуляр-
ных функционалов на X , причём $\|f_n\| = 1$. По теореме Иоси-
да-Хьюитта, каждый функционал f_n представим в виде $f_n = \varphi_n + \psi_n$,
где $\varphi_n \in X_n^{\sim}$, а ψ_n - сингулярный (т.е. равный нулю на некотором
фундаменте) функционал. Положим $\psi = \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} |\psi_n|$. Тогда ψ син-

гулярен и значит $Y = \{x \in X : \psi(|x|) = 0\}$ есть фундамент в X .
Следовательно, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ тотально на Y . Но, тогда мно -
жество $\{\varphi_n^+ : n=1,2,\ldots\} \cup \{\varphi_n^- : n=1,2,\ldots\}$ тотально на X . Итак, на X име-
ется счётная тотальная система порядково непрерывных функ-
ционалов. Рассмотрим $Z = X_n^{\sim}$. Тогда Z есть КВ-пространст-
во с аддитивной нормой, причём $Z^* = X$. Из наличия в Z
счётного тотального на Z^* множества немедленно следует, что
Z сепарабельно в топологии $\sigma(Z, Z^*)$, а значит Z се-
парабельно и в нормированной топологии. Поскольку Z , бу-
дучи КВ-пространством с аддитивной нормой, реализуется (по
теореме Какутани) в виде пространства $L^1(\mu)$ по некоторой ме-
ре и поскольку Z сепарабельно, то отсюда следует (см. [3]
§ 41, теор.3), что $Z = L^1(\mu)$ изоморфно идеалу в $S[0,1] \times S$.
Но тогда и $X = Z^*$ изоморфно идеалу в $S[0,1] \times S$.

1)$\Rightarrow$3) Ясно, что не умаляя общности, можно ограничиться
случаем, когда X есть фундамент в $S[0,1]$ и при этом функ-
ция 1, тождественно равная 1, входит в X . Пусть D -ли-
нейная оболочка над полем рациональных чисел множества ха -
рактеристических функций интервалов из [0,1] , имеющих ра-
циональные концы. D счётно и легко видеть, что $o\sigma$ -замы-
кание совпадает с X .

3)$\Rightarrow$1) ($2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$). Прежде всего покажем, что из 3) вы-
текает счётность типа пространства X (только в этом месте
мы и используем предположение $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$). Допустим против-
ное. Тогда в X найдётся порядково ограниченное множество
$A = \{x_i : i \in I\}$, такое, что $card\, I = \aleph_1$ и $x_{i_1} \wedge x_{i_2} = 0$ при
$i_1 \neq i_2$.

Отсюда очевидно следует, что $card\, X \geq 2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$.
С другой стороны, по условию $X = cl\, D$ для некоторого счётного

Следовательно, $card X \le 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ поскольку $cl D$ получается за ω_1 шагов последовательными присоединениями пределов $o\delta$ -сходящихся последовательностей. Полученное противоречие и доказывает счётность типа пространства X .

Итак, X счётного типа. Следовательно (см., например,[4]), X реализуется в виде фундамента в пространстве $S(T,\Sigma,\mu)$, где мера μ конечна. Из $o\delta$- сепарабельности X , очевидно, вытекает $o\delta$ -сепарабельность пространства $S(T,\Sigma,\mu)$. Но тогда, как легко видеть, пространство $S(T,\Sigma,\mu)$ сепарабельно и в топологии сходимости по мере. Отсюда следует (опять по уже упоминавшейся теореме из [3]), что $S(T,\Sigma,\mu)$ изоморфно $S_{[0,1]\times S}$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Предположение о наличии в X единицы существенно для справедливости импликации 2)$\Rightarrow$1), а следовательно, и 2)$\Rightarrow$3). Действительно, пусть $X = \ell^1(\Gamma)$, где $\Gamma = [0,1]$. Тогда X не может быть вложено как идеал в $S_{[0,1]\times S}$, но в X^* существует счётная тотальная система, например, система функционалов, порождённых обычными многочленами с рациональными коэффициентами.

В заключение отметим, что настоящая заметка была подготовлена к печати А.И.Векслером на основе архива Г.Я.Лозановского. Было бы интересно получить ответ на следующий вопрос : не будут ли утверждения 1)-3) теоремы равносильны следующему утверждению 3'): в X существует такое счётное подмножество $D = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для всякого $x \in X$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, порядково сходящаяся к x .

Ясно, что $3') \Rightarrow 3)$. Справедливость обратной импликации $3) \Rightarrow 3')$ нам неизвестна. Отметим, что для случая банахова K - пространства в черновиках Г.Я.Лозановского было без доказательства упомянуто , что 2) и 3') равносильны, однако, установить справедливость этого утверждения не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1) В у л и х Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., 1961.

2) К а н т о р о в и ч Л.В, А к и л о в Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.

3) Х а л м о ш П. Теория меры. М., 1963.

4) В у л и х Б.З., Л о з а н о в с к и й Г.Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.- Мат.сб. , 1971,т.84, №3, с.331-352.

МИНИСТЕРСТО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАЧЕСТВЕННЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЯРОСЛАВЛЬ 1977

УДК 517.511

Г.Я. Лозановский

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В некоторых вопросах анализа и его приложений часто используется то обстоятельство, что многие важные функции (экспонента, косинус, гамма-функция и др.) могут быть охарактеризованы как решения соответствующих функциональных уравнений. Иногда, однако, требуется характеризация функций как решений функциональных неравенств, ибо с оценками приходится иметь дело чаще, чем с точными равенствами. В настоящей заметке степенная функция на промежутке $(0, +\infty)$ характеризуется через простые функциональные неравенства.

Всюду далее f есть вещественная функция, определенная и неотрицательная на $(0, +\infty)$ и такая, что $f(1) = 1$.

Т е о р е м а I. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $f(x) > 0$ и

$$\frac{f(\alpha x)}{f(x)} + \frac{f((2-\alpha)y)}{f(y)} \le 2$$

при всех $\alpha \in (0, 1)$, $x, y \in (0, +\infty)$;

б)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad f(x)f(y) \ge f(xy)$$

при всех $x, y \in (0, +\infty)$;

в) существует $p \in [0, 1]$ такое, что $f(x) = x^p$ на $(0, +\infty)$.

Т е о р е м а 2. Пусть f измерима на $(0, +\infty)$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $f(x) > 0$ и

$$\frac{f(\alpha x)}{f(x)} + \frac{f((2-\alpha)y)}{f(y)} \ge 2$$

при всех $\alpha \in (0, 1)$, $x, y \in (0, +\infty)$;

б)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad f(x)f(y) \le f(xy)$$

при всех $x, y \in (0, +\infty)$;

в) существует $p \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ такое, что $f(x) = x^p$ на $(0, +\infty)$.

Заметим, что в теореме I измеримость f заранее не предполагается. Нам не известно, существенно ли предположение об измеримости f для эквивалентности утверждений а), б), в) теоремы 2.

Простые примеры показывают, что в теореме I неравенство $f(x)f(y) \ge f(xy)$ нельзя заменить неравенством $f(x)f(y) \le f(xy)$, а в теореме 2 неравенство $f(x)f(y) \le f(xy)$ нельзя заменить неравенством $f(x)f(y) \ge f(xy)$.

Доказательство теоремы I. Импликации в) $\Rightarrow$ б) и в) $\Rightarrow$ а) проверяются без труда. Докажем, что б) $\Rightarrow$ в). Из [1] (с. 68, упр. 10) следует, что f вогнута на $(0, +\infty)$, где термин "вогнутая функция" используется в смысле [1] (с. 58). Следовательно, f абсолютно непрерывна в каждом $[a, b] \subset (0, +\infty)$, и в каждой точке $x \in (0, +\infty)$ существуют конечные односторонние производные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, причем $f'_+(x) \le f'_-(x)$. Покажем, что существует $f'(1)$. Достаточно проверить, что $f'_+(1) \ge f'_-(1)$. Имеем

$$f(1+h) = 1 + f'_+(1)h + o(h)$$

и

$$f\left(\frac{1}{1+h}\right) = 1 - f'_-(1)h + o(h)$$

при $h \to 0+$, откуда

$$1 = f(1) \le f(1+h)\, f\left(\frac{1}{1+h}\right) = 1 + (f'_+(1) - f'_-(1))h + o(h)$$

при $h \to 0+$, следовательно, $f'_+(1) - f'_-(1) \ge 0$, т.е. $f'_+(1) = f'_-(1)$. Итак, существует $f'(1)$. Обозначим $f'(1)$ через ρ . Фиксируем произвольную точку $x \in (0, +\infty)$, в которой существует $f'(x)$. Рассмотрим функцию

$$F(t) = f(t) \cdot f\left(\frac{x}{t}\right) \qquad (t \in (0, +\infty))$$

Ясно, что $F(t) \ge f(x)$ при всех $t \in (0, +\infty)$ и $F(1) = f(x)$. Следовательно, $F'(1) = 0$, т.е. $\rho f(x) - x f'(x) = 0$. Итак, $\rho f(x) - x f'(x) = 0$ почти всюду на $(0, +\infty)$. Теперь уже нетрудно убедиться, что $f(x) = x^{\rho}$ на $(0, +\infty)$.

Докажем теперь, что а) $\Rightarrow$ в). Пусть $u, v \in (0, +\infty)$. Положим

$$x = y = \frac{u+v}{2}, \qquad \alpha = \frac{2u}{u+v} .$$

Тогда из неравенства

$$\frac{f(\alpha x)}{f(x)} + \frac{f((2-\alpha)y)}{f(y)} \le 2$$

получаем, что

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \ge \frac{f(u) + f(v)}{2} .$$

Теперь, как и ранее, видим, что f вогнута на $(0, +\infty)$. Пусть T есть множество всех $t \in (0, +\infty)$, в которых существует $f'(t)$. Фиксируем любые $x, y \in T$ и рассмотрим функцию

$$G(\alpha) = \frac{f(\alpha x)}{f(x)} + \frac{f((2-\alpha)y)}{f(y)} \qquad (\alpha \in (0, 2))$$

Так как $G(\alpha) \le 2$ при всех $\alpha \in (0, 2)$ и $G(1) = 2$, то $G'(1) = 0$, т.е. $x f^{-1}(x) f'(x) - y f^{-1}(y) f'(y) = 0$. Тем самым функция $x f^{-1}(x) f'(x)$ постоянна на T . Отсюда легко вытекает требуемое.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы I, только вместо [I] (с. 68, упр. I0) нужно использовать следующее хорошо известное утверждение: если f измерима на $(0, +\infty)$ и

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

при всех $x, y \in (0, +\infty)$, то f выпукла на $(0, +\infty)$.

Автор благодарит профессора С.М.Лозинского за проверку доказетльств и полезные советы.

Литература

I. Бурбаки Н. Функции действительного переменного, элементарная теория . М., Физматгиз, I965.

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ИМ. И. Н. УЛЬЯНОВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Выпуск 6

Межвузовский сборник

Ульяновск—1976

Г.Я. Лозановский

ОБ ЭЛЕМЕНТАХ С ПОРЯДКОВО НЕПРЕРЫВНОЙ НОРМОЙ В БАНАХОВЫХ РЕШЁТКАХ

В теории банаховых решёток и её приложениях особую роль играет свойство порядковой непрерывности нормы. Пространство, обладающее этим свойством, во многом сходно с пространством с безусловным базисом, оно сравнительно "просто" устроено, функционалы на нём допускают удобное интегральное представление и т.д. Произвольная банахова решётка X не обладает, вообще говоря, указанным свойством, но в X существует наибольший идеал $X_{(A)}$, на котором норма порядково непрерывна. Для многих важных конкретных пространств /например, пространств Орлича и Марцинкевича/ типичен случай, когда $X \neq X_{(A)}$, но $X_{(A)}$ порядково плотен в X; последнее обстоятельство весьма существенно при изучении X. Сказанное делает понятным интерес к $X_{(A)}$ как подпространству в X. Некоторым вопросам такого рода посвящена настоящая заметка.

1. Терминология и обозначения

Пусть X - векторная решётка. Элемент x называется осколком элемента y, если $y-x$ дизъюнктен x. Подмножество $V \subset X$ называется солидным, если $(x \in X, v \in V, |x| \le |v|) \Rightarrow (x \in V)$. Идеалом в X называется солидное векторное подпространство. Идеал Y в X называется фундаментом, если из того, что некоторый $x \in X$ дизъюнктен всем $y \in Y$ следует, что $x=0$. Через $X_n^{\sim}$ обозначается множество всех порядково непрерывных линейных функционалов на X, то есть таких f на X, что $(x_\alpha \downarrow 0) \Rightarrow (f(x_\alpha) \to 0)$. Норма $\|\cdot\|$ на X называется монотонной, если $(|x| \le |y|) \Rightarrow (\|x\| \le \|y\|)$. K- пространством (K_σ- пространством) называется векторная решётка, в которой всякое (всякое счётное) ограниченное сверху множество имеет супремум.

Пусть теперь X есть произвольная банахова решётка, то есть

векторная решётка, снабжённая монотонной банаховой нормой. X^* означает банахово сопряжённое пространство к X. Полагаем $X_n^* = X_n^{\sim}$ [illegible]. Говорят, что норма в X порядково непрерывна, или, что в X выполнено условие (A), если для любого направления $x_\alpha \in X$ справедливо $(x_\alpha \downarrow 0) \Rightarrow (\|x_\alpha\| \to 0)$. Говорят, что норма в X секвенциально порядково непрерывна, или, что в X выполнено условие (A_σ), если для любой последовательности $x_n \in X$ справедливо $(x_n \downarrow 0) \Rightarrow (\|x_n\| \to 0)$. Говорят, что норма в X порядково полунепрерывна, или, что в X выполнено условие (C), если для любого направления $x_\alpha \in X$ справедливо $(0 \le x_\alpha \uparrow x \in X) \Rightarrow (\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|)$. Через $X_{(A)}$ обозначаем множество всех $x \in X$, удовлетворяющих условию: если направление $x_\alpha \in X$ таково, что $|x| \ge x_\alpha \downarrow 0$, то $\|x_\alpha\| \to 0$. Иными словами $X_{(A)}$ есть наибольший идеал в X, на котором норма порядково непрерывна. Напомним, что всегда $X_{(A)}$ замкнут по норме в X и $X_{(A)}$ есть K-пространство. Банаховым K-пространством (банаховым K_σ- пространством) называется банахова решётка, являющаяся K-пространством (K_σ- пространством).

2. О совпадении $X_{(A)}$ с $((X_n^*)_n^*)_{(A)}$. В этом пункте пусть X есть произвольная банахова решётка такая, что X_n^* разделяет точки из X. На X_n^* рассматриваем норму индуцированную из X^*, на $(X_n^*)_n^*$ - норму из $(X_n^*)^*$. Для краткости $(X_n^*)_n^*$ будем обозначать через Y. Пусть $\pi: X \to Y$ есть оператор канонического вложения. Хорошо известно, что $\|\pi(x)\|_Y \le \|x\|_X$, $x \in X$, причём равенства может не быть (в [1] показано, что равенство $\|\pi(x)\|_Y = \|x\|_X$ для любого $x \in X$ эквивалентно полунепрерывности нормы на X). Тем не менее справедлива следующая теорема, обобщающая некоторые результаты из [2] и [3].

Т е о р е м а 1. Для любой банаховой решётки X с тотальным X_n^* справедливо $\pi(X_{(A)}) = Y_{(A)}$, причём $\|\pi(x)\|_Y = \|x\|_X$ для любого $x \in X_{(A)}$.

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что X есть K-пространство (иначе вместо X мы будем рассматривать его пополнение по Дедекинду). Отождествим X с $\pi(X)$. Ясно, что $X_{(A)} \subset Y_{(A)}$, поэтому можно считать, что $Y_{(A)}$ есть фундамент в Y. Положим $H = X \cap Y_{(A)}$. Так как H является фундаментом в X и в $Y_{(A)}$, то естественным образом считаем, что $X_n^* \subset H_n^\sim$, $(Y_{(A)})^* \subset H_n^\sim$ (мы использовали здесь следующий хорошо известный факт: если E есть K-пространство, Z – фундамент в E, $f \in Z_n^\sim$, то существует не более одного $g \in E_n^\sim$ такого, что сужение $g|_Z = f$. Заметим, что H есть банахово K-пространство, если на нём ввести норму $\|x\|_H = \max\{\|x\|_X, \|x\|_{Y_{(A)}}\} = \|x\|_X$, $x \in H$. Таким образом, H есть замкнутый фундамент в X, откуда $H_n^* = X_n^*$. Положим $B = \{f \in X_n^* : \|f\|_{X^*} \le 1\}$. Так как $X_n^* = (Y_{(A)})^*$, то B компактен в топологии $\sigma(X_n^*, (Y_{(A)})^*)$, а, значит, компактен и в более слабой топологии $\sigma(X_n^*, H)$. Но, очевидно, $B = \{f \in H_n^* : \|f\|_{H^*} \le 1\}$. Из сказанного в силу теоремы Крейна-Шмульяна следует, что H_n^* замкнуто в H^* в топологии $\sigma(H^*, H)$, тем самым $H_n^* = H^*$, а, значит, в H выполнено условие (A). Так как H есть замкнутый фундамент в X и в H выполнено условие (A), то $H = X_{(A)}$. Теперь ясно, что $X_{(A)}$ есть фундамент в X. Но очевидно, что $\|x\|_X = \|x\|_Y$ для любого $x \in X_{(A)}$. Поэтому $X_{(A)}$ есть замкнутый фундамент в Y, откуда $X_{(A)} = Y_{(A)}$.

3. О строении пространства $X_{(A)}$. В работе [4] была доказана следующая лемма.

Лемма I (см. [4]). Пусть W – выпуклое, симметричное, ограниченное подмножество в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Для $n = 1, \dots$ пусть $\|\cdot\|_n$ есть функционал Минковского множества $U_n = 2^n W + 2^{-n} B_X$, где $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

Для $x \in X$ полагаем $|||x||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и пусть $Y = \{x \in X : |||x||| < \infty\}$. Тогда $(Y, |||\cdot|||)$ есть банахово пространство, причём Y рефлексивно тогда и только тогда, когда W слабо относительно компактно.

Из этого замечательного результата почти мгновенно вытекает несколько полезных утверждений о банаховых решётках, которые мы приведём в этом пункте. Прежде всего заметим следующее: если в условиях леммы I $(X, \|\cdot\|)$ есть банахова решётка и множество W – солидное, то Y есть идеал в X и норма $|||\cdot|||$ монотонна на Y.

Теорема 2. Пусть X – произвольная банахова решётка. Обозначим через $R(X)$ совокупность всех идеалов Y в X, удовлетворяющих условию: на Y существует монотонная норма $\|\cdot\|_Y$ такая, что $(Y, \|\cdot\|_Y)$ есть рефлексивное банахово пространство. Тогда справедливо равенство $X_{(A)} = \bigcup\{Y : Y \in R(X)\}$.

Доказательство. Пусть $0 \le y \in Y \in R(X)$. Тогда $\Delta = \{x \in X : |x| \le y\}$ компактно в топологии $\sigma(Y, Y^*)$, а, значит, компактно и в топологии $\sigma(X, X^*)$. Из последнего следует, что $y \in X_{(A)}$. Доказываем обратное включение. Пусть $0 \le y \in X_{(A)}$. Положим $W = \{x \in X : |x| \le y\}$. Тогда W солидно и слабо компактно. Остаётся применить лемму I.

Теперь мы рассмотрим один специальный класс банаховых решёток – банаховы идеальные пространства. Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с неотрицательной счётно-аддитивной вполне σ-конечной мерой, $S = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ – K-пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нём (эквивалентные функции, как обычно, отождествляются). Банаховым идеальным пространством на (Ω, Σ, μ) (сокращённо БИП) называется банахово пространство X, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: $(x \in X, y \in S, |y| \le |x|) \Rightarrow (y \in X$ и $\|y\|_X \le \|x\|_X)$. Мы далее будем предполагать, что носитель каждого БИП, о которых пойдёт речь, есть всё Ω, то есть, что каждое из рассматриваемых БИП есть фундамент в S. Если X есть БИП, то дуальное к нему БИП X' состоит из всех $y \in S$ таких, что $\|y\|_{X'} = \sup\{\int_\Omega |xy|d\mu : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty$.

П р е д л о ж е н и е I. Для любого БИП X следующие утверждения эквивалентны: I) $X_{(A)}$ есть фундамент в X; 2) существует рефлексивное БИП Z такое, что $Z \supset X'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) $\Longrightarrow$ 2) Фиксируем $y \in X_{(A)}$ такой, что $y(\omega) > 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Положим $W = \{x \in X : |x| \leq y\}$ и применим лемму I. Получим рефлексивное БИП Y, являющееся фундаментом в X. Так как $Y \subset X$, то $Y' \supset X'$ и можно принять $Z = Y'$.
2) $\Longrightarrow$ I) Так как $X' \subset Z$, то $X'' \supset Z''$. Но Z' рефлексивно и является фундаментом в X''. Тогда $(X'')_{(A)} \supset Z'$ по теореме 2. Остаётся заметить, что $(X'')_{(A)} = X_{(A)}$ по теореме I.

С л е д с т в и е. Для любого БИП X следующие утверждения эквивалентны: I) $(X')_{(A)}$ есть фундамент в X'; 2) Существует рефлексивное БИП Z такое, что $X \subset Z$.

З а м е ч а н и е I. Пусть теперь (Ω, Σ, μ) есть отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега. БИП X на $[0,1]$ называется симметричным пространством (см. [5]), если из равноизмеримости функций $x \in X$, $y \in S$ следует, что $y \in X$ и $\|x\| = \|y\|$. Из результатов этого пункта легко вытекает следующий факт, отмеченный в [6]: пусть X есть симметричное пространство на $[0,1]$, причём $X \neq L^1$, $X \neq L^\infty$, тогда существуют рефлексивные симметричные пространства Y и Z такие, что $Y \subset X \subset Z$. Дело в том, что для всякого такого X справедливы включения $X_{(A)} \supset L^\infty$, $(X')_{(A)} \supset L^\infty$.

З а м е ч а н и е 2. В [7] построено БИП X такое, что $X_{(A)} = \{0\}$ и $(X')_{(A)} = \{0\}$. Такое X не содержит никакого ненулевого рефлексивного БИП и не содержится в рефлексивном БИП.

4. О строении факторпространства $X/X_{(A)}$. В этом пункте X есть произвольное банахово K_σ- пространство. Через Y будем обозначать факторпространство $X/X_{(A)}$, $\gamma : X \to Y$ - канонический гомоморфизм.

Л е м м а 2. Пусть $u \in X_+$, $u \notin X_{(A)}$. Тогда найдётся двойная последовательность u_{ij} $(i,j = 1,2,\dots)$ попарно дизъюнктных осколков элемента u такая, что $\inf_{i,j} \|u_{ij}\| > 0$. При этом, если $X_{(A)}$ есть фундамент в X, то можно считать, что $u_{ij} \in X_{(A)}$ при всех i, j.

Несложное доказательство этой леммы, подобное доказательству леммы I из [8], мы опускаем.

Т е о р е м а 3. $Y_{(A)} = \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in X_+$, $\gamma(u) \in Y_{(A)}$. Нужно убедиться, что $\gamma(u) = 0$, то есть что $u \in X_{(A)}$. Допустим противное. Пусть (u_{ij}) из леммы 2, причём $\tau = \inf_{i,j} \|u_{ij}\| > 0$. Для $i = 1,2,\dots$ положим $x_i = \sup_j u_{ij}$. Тогда $\gamma(x_i)$ попарно дизъюнктны. $0 \leq \gamma(x_i) \leq \gamma(u)$, $\|\gamma(x_i)\| \geq \tau$. Это противоречит тому, что $\gamma(u) \in Y_{(A)}$.

До конца этого пункта будем считать, что $X_{(A)}$ есть фундамент в X причём $X \neq X_{(A)}$.

Т е о р е м а 4. а) Никакой ненулевой идеал в Y не является K_σ -пространством; б) в каждом ненулевом идеале в Y имеется континуальная порядково ограниченная система, состоящая из ненулевых попарно дизъюнктных элементов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Φ -произвольный ненулевой идеал в Y. Фиксируем $u \in X_+$, такой что $\gamma(u) \in \Phi$, $\gamma(u) \neq 0$. Тогда $u \notin X_{(A)}$. Найдём последовательность u_{ij} из леммы 2, причём $u_{ij} \in X_{(A)}$ при всех i, j. Для $i = 1,\dots$ положим $x_i = \sup_j u_{ij}$. Тогда множество $\{\gamma(x_i) : i = 1,\dots\}$ порядково ограничено в Φ, но не имеет, как легко видеть, супремума в Φ. Наконец, справедливость б) без труда получается с помощью известной теоремы Серпинского о разбиении натурального ряда на континуум почти дизъюнктных счётных подмножеств.

З а м е ч а н и е. Для произвольной банаховой решётки X, не являющейся K_σ-пространством, теоремы 3 и 4 теряют силу. Достаточно рассмотреть пример $X = c$, где c есть пространство всех сходящихся последовательностей вещественных чисел; в этом примере $X_{(A)} = c_0$ и Y есть вещественная прямая.

О п р е д е л е н и е. Для $x \in X$ положим $q(x) = \sup\{\|y\| : y \in X_{(A)}, 0 \le y \le |x|\}$. Будем говорить, что в X выполнено условие $(*)$, если для любой последовательности $x_n \in X_+$ $(n = 1, \dots)$ справедливо

$$(x_n \downarrow 0,\ q(x_n) \to 0) \Longrightarrow (\|x_n\| \to 0).$$

Следующая теорема показывает, что в Y условие (A_σ) (в отличие от условия (A)) выполняется довольно часто.

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы в Y было выполнено условие (A_σ) необходимо и достаточно, чтобы в X было выполнено условие $(*)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $x_n \downarrow 0$ в X и $q(x_n) \to 0$. Покажем, что $\gamma(x_n) \downarrow 0$ в Y. Допустим противное. Тогда найдётся $x \in X_+$, $x \notin X_{(A)}$ такой, что $\gamma(x_n) \ge \gamma(x)$, то есть $x - x_n \wedge x \in X_{(A)}$ при всех n. Положим $y_n = x - x_n \wedge x$. Имеем $q(x - y_n) = q(x_n \wedge x) \le q(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Но $y_n \in X_{(A)}$, поэтому $\|y_m - y_n\| = q(y_m - y_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Отсюда ясно, что $x \in X_{(A)}$ и $\|x - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $x_n \in X_+$ такова, что $\gamma(x_n) \downarrow 0$ в Y. Нужно убедиться что $\|\gamma(x_n)\| \to 0$. Так как γ есть решёточный гомоморфизм, то можно считать, что $x_n \downarrow 0$ в X. Теперь в силу условия $(*)$ достаточно лишь убедиться, что $q(x_n) \to 0$. Допустим, что $r = \inf q(x_n) > 0$. Нетрудно построить последовательность

v_n $(n = 1, \dots)$, удовлетворяющую условиям: а) v_n есть осколок x_n; б) $v_n \in X_{(A)}$; в) $q(v_n) \ge \frac{r}{2}$; г) $v_i \wedge v_j = 0$ при $i \ne j$. Положим $v = \sup\limits_n v_n$. Ясно, что $v \notin X_{(A)}$, поэтому $\gamma(v) > 0$. Но, очевидно, $\gamma(v) \le \gamma(x_n)$ при всех n, что невозможно, ибо $\inf\limits_n \gamma(x_n) = 0$.

С л е д с т в и е. Если норма в X полунепрерывна, то в Y выполнено условие (A_σ). Действительно, если норма в X полунепрерывна, то $q = \|\cdot\|_X$ и в X выполнено условие $(*)$.

П р и м е р. Для $n = 1, \dots$ через Z_n обозначим пространство ℓ^∞, но с нормой $\|x\|_{Z_n} = \|x\|_{\ell^\infty} + n \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |\xi_k|$, где $x = (\xi_k) \in Z_n$. Положим $X_1 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus Z_n\right)_{\ell^1}$. Нетрудно показать, что в X_1 выполнено условие $(*)$, но норма в X_1 даже не эквивалентна полунепрерывной.

Рассмотрим теперь пространство $X_2 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus Z_n\right)_{\ell^\infty}$. Нетрудно показать, что в X_2 условие $(*)$ не выполнено. Таким образом, условие $(*)$ выполнено не всегда и существенно слабее условия полунепрерывности нормы.

З а м е ч а н и е. Из наших теорем 3,4,5 сразу вытекают некоторые известные факты о строении пространства $C(\beta\mathcal{D} \setminus \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ – дискретное пространство, ибо $C(\beta\mathcal{D} \setminus \mathcal{D})$ совпадает с фактор-пространством $\ell^\infty(\mathcal{D}) / c_0(\mathcal{D})$, см. [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Mori, I. Amemiya, H. Nakano, On the reflexivity of semicontinuous norms, Proc. Japan Acad., 31 (1955), 684–685.

2. T. Shimogaki, On the continuity and the monotonousness of norms, J. Fac. sci. Hokkaido univ., ser. I, 16, (1962), 225–237.

3. Г.Я. Л о з а н о в с к и й, О втором сопряжённом по Накано пространстве к банаховой структуре, Сб.тр.Ин-т мат.Сиб.отд. АН СССР, 1973, вып. 12 (29), 90-92.

4. W.T. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, A. Pelczynski, Factoring weakly compact operators, J. of functional analysis, 17, № 3 (1974), 311-327.

5. Е.М. С е м ё н о в, Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций, Докл. АН СССР, 156, № 6 (1964), 1292-1295.

6. С.Г. К р е й н, Ю.И. П е т у н и н, Е.М. С е м ё н о в, Теоремы вложения и интерполяция линейных операторов, Сб. "Теоремы вложения и их приложения" (Труды Симпозиума по теоремам вложения, Баку, 1966 год), М., 1969, 127-131.

7. G.L. Seever, A peculiar Banach function space, Proc. Amer. Math. Soc., 16, № 4 (1965), 662-664.

8. Г.Я. Л о з а н о в с к и й, О проекторах в некоторых банаховых структурах, Мат.Заметки, 4, № 1 (1968), 41-44.

9. А.И. В е к с л е р, P' - точки, P' -множества, P' - пространства. Новый класс порядково-непрерывных мер и функционалов, Докл. АН СССР, 212, № 4 (1973), 789-792.

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 20
ВЫПУСК 5
НОЯБРЬ
1976

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 20, № 5 (1976), 733—739

УДК 513.8

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕР..ЫХ ФУНКЦИЙ

М. Ш. Браверман, Г. Я. Лозановский

В заметке изучается вопрос об операторе продолжения линейных функционалов с подпространства на все пространство. Доказано, что при некоторых условиях на банахову решетку измеримых функций и ее подпространство существует единственный линейный оператор продолжения. Библ. 3 назв.

Вопрос о существовании и свойствах линейного оператора продолжения функционалов с подпространства заданного пространства на все это пространство нередко возникает в анализе (см., например, [1]). Настоящая заметка посвящена изучению этого вопроса для случая банаховых решеток измеримых функций.

1. Терминология и обозначения. Сопряженное к нормированному пространству E обозначается E^*. Всюду далее (T, Σ, μ) есть пространство с вполне σ-конечной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (эквивалентные функции и множества отождествляются). Банаховым функциональным пространством (б.ф.п.) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство E, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: $(x \in E,\ y \in S, |y| \leqslant |x|) \Rightarrow (y \in E, \|y\| \leqslant \|x\|)$. Через E_0 обозначается подпространство в E, состоящее из всех $x \in E$ таких, что $(|x| \geqslant x_n \downarrow 0) \Rightarrow (\|x_n\| \to 0)$. Носителем E (обозначение: $\operatorname{supp} E$) называется наименьшее $e \in \Sigma$ такое, что $\forall x \in E$ эквивалентен нулю на $T \setminus e$. Всюду далее будем предполагать, что $\operatorname{supp} E = T$. Дуальное (или двойственное) пространство E'

и E состоит из всех $y \in S$ таких, что

$$\|y\|_{E'} = \sup\left\{\int_T |xy|\,d\mu :\ x \in E,\ \|x\|_E \leqslant 1\right\} < \infty.$$

E называется максимальным, если $E = E''$ (по набору элементов и по норме). Всюду далее будем предполагать, что $\operatorname{supp} E_0 = T$. Напомним, что в этом случае $(E_0)' = E'$ (по набору элементов и по норме), причем это пространство можно естественным образом отождествить с $(E_0)^*$. Всюду далее пусть $I: E' \to E^*$ есть оператор естественного вложения, а $I_0: (E_0)' \to (E_0)^*$ — оператор естественного отождествления.

2. Основной результат. Определение. Пусть X — банахово пространство, Y — его замкнутое подпространство. Непрерывный оператор A (не обязательно линейный), отображающий Y^* в X^* и такой, что $\|Af\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ и $Af|_Y = f$ для $\forall f \in Y^*$, будем называть оператором продолжения с Y на X.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть E есть б. ф. п. на (T, Σ, μ), удовлетворяющее условиям:* а) $\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} E_0 = T$; б) *$E$ максимально;* в) $(E')_0 = E'$. *Пусть $R: (E_0)^* \to E^*$ есть линейный оператор продолжения с E_0 на E. Тогда*

$$R = II_0^{-1}. \tag{1}$$

Таким образом, в условиях теоремы 1 не существует линейного оператора продолжения с E_0 на E, отличного от естественного оператора продолжения II_0^{-1}. Доказательство теоремы будет приведено ниже. Мы покажем также, что нелинейный оператор продолжения, однако, может существовать даже в том случае, когда E есть симметричное пространство на $[0, 1]$ (определение симметричного пространства см. в [2]).

3. Об изометриях нормированных решеток. В этом пункте будут приведены два результата о нормированных решетках, которые понадобятся при доказательстве теоремы 1, но, возможно, имеют и самостоятельный интерес. В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы следуем [3].

Напомним, что компонентой в векторной решетке Z называется всякое множество H такое, что $H^{dd} = H$, где $H^d = \{z \in Z : z \wedge |h| = 0$ для $\forall h \in H\}$. Фундаментом в Z называется всякий идеал Φ такой, что $\Phi^d = \{0\}$.

Предложение 1. *Пусть Z — нормированная решетка (KN-линеал), Z_1 и Z_2 — дополнительные друг к другу компоненты в Z (т. е. $Z_1^d = Z_2$, $Z_2^d = Z_1$) и пусть существуют операторы проектирования $\Pr_{Z_1}$ и $\Pr_{Z_2}$. Пусть A есть линейная изометрия E на E, причем $A(Z_1) = Z_1$. Тогда $A(Z_2) = Z_2$.*

Доказательство. Для $x \in Z$ положим $c(x) = \Pr_{Z_1}x$,

$$\rho(x) = \inf\{\|x - y\| :\ y \in Z_1\},$$
$$V(x) = \{y \in Z_1 :\ \|x - y\| = \rho(x)\}.$$

Ясно, что $V(x)$ есть замкнутое ограниченное по норме выпуклое множество. Покажем, что $V(x)$ симметрично относительно точки $c(x)$. Пусть $y \in V(x)$; покажем, что $2c(x) - y \in V(x)$. Имеем $\|x - 2c(x) + y\| = \|\Pr_{Z_2}x - \Pr_{Z_1}x + y\| = \|\Pr_{Z_2}x + \Pr_{Z_1}x - y\| = \|x - y\|$, ибо $\Pr_{Z_2}x\, d\, (\Pr_{Z_1}x - y)$; отсюда $2c(x) - y \in V(x)$. Так как $A(Z_1) = Z_1$, то из сказанного следует, что $\rho(Ax) = \rho(x)$, $V(Ax) = AV(x)$, а значит, $c(Ax) = Ac(x)$ для $\forall x \in Z$. Остается заметить, что $x \in Z_2$ тогда и только тогда, когда $c(x) = 0$.

Предложение 2. *Пусть X — KN-линеал, Y — его фундамент, U — линейная изометрия X на X такая, что $Uy = y$ для $\forall y \in Y$. Тогда $Ux = x$ для $\forall x \in X$.*

Доказательство. Положим $Z_1 = \{f \in X^* :\ f|_Y = 0\}$, $Z_2 = Z_1^d$. Нетрудно показать, что Z_2 состоит из всех $f \in X^*$, удовлетворяющих условию $|f|(x) = \sup\{|f|(y) :\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ y \in Y\}$ для $\forall x \in X_+$. Покажем, что $U^*f|_Y = f|_Y$ для $\forall f \in X^*$. Действительно, $(U^*f)(y) = f(Uy) = f(y)$ для $\forall y \in Y$, откуда вытекает требуемое. Теперь имеем $(U^*f \in Z_1) \Leftrightarrow (U^*f|_Y = 0) \Leftrightarrow (f|_Y = 0) \Leftrightarrow (f \in Z_1)$, откуда $U^*(Z_1) = Z_1$. Далее, в силу предложения 1 находим $U^*(Z_2) = Z_2$. Так как $U^*f|_Y = f|_Y$ для $\forall f \in X^*$, то $U^*f = f$ для $\forall f \in Z_2$. Фиксируем $\forall x \in X$. Имеем $f(Ux) = (U^*f)(x) = f(x)$ для $\forall f \in Z_2$, и так как Z_2 тотально на X, получаем $Ux = x$.

Доказательство теоремы 1. Напомним, что $E^* = \bar{E} \oplus E^*_{\text{ан}}$, где $\bar{E} = I(E')$ есть компонента вполне линейных, а $E^*_{\text{ан}} = \{f \in E^* :\ f|_{E_0} = 0\}$ есть компонента анормальных функционалов в E^*. Поэтому теорема 1 эквивалентна следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1'. *Пусть* $B\colon E \to E^*$ — *линейный непрерывный оператор, удовлетворяющий условиям:*

$$B(E) \subset E^*_{\text{ап}}, \tag{2}$$

$$\| f + Bf \| = \| f \| \quad \text{для} \quad \forall f \in E. \tag{3}$$

Тогда $B = 0$.

Итак, доказываем теорему 1'. Пусть $\alpha\colon \bar{E} \to E^*$, $\beta\colon E \to E^{**}$, $\gamma\colon E \to \bar{\bar{E}}$ — операторы естественных вложений, $I\colon E \to E$ — тождественный оператор.

Фиксируем $\forall \lambda \in E\,[-1, 1]$ и положим $A_\lambda = \alpha + \lambda B$. Из (2) и (3) следует, что

$$\| A_\lambda f \| = \| f \| \quad \text{для} \quad \forall f \in E. \tag{4}$$

Так как $(E')_0 = E'$, то $(\bar{E})^* = \bar{\bar{E}}$. Поэтому можно образовать оператор $\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta\colon E \to E$. Для $\forall x \in E$ имеем

$$\| \gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x \|_E = \| \gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x \|_{\bar{\bar{E}}} = \| A^*_\lambda \beta x \|_{\bar{E}^*} =$$
$$= \sup \{ (A^*_\lambda \beta x)(f)\colon f \in \bar{E}, \| f \| \leqslant 1 \} =$$
$$= \sup \{ (\beta x)(A_\lambda f)\colon f \in \bar{E}, \| f \| \leqslant 1 \} \leqslant$$
$$\leqslant \sup \{ (\beta x)(g)\colon g \in E^*, \| g \| \leqslant 1 \} =$$
$$= \sup \{ g(x)\colon g \in E^*, \| g \| \leqslant 1 \} = \| x \|.$$

Итак,

$$\| \gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x \| \leqslant \| x \| \text{ для } \forall x \in E. \tag{5}$$

Заменив в (5) λ на $-\lambda$, получим

$$\| \gamma^{-1} A^*_{-\lambda} \beta x \| \leqslant \| x \| \quad \text{для} \quad \forall x \in E. \tag{6}$$

Но $A^*_\lambda + A^*_{-\lambda} = 2\alpha^*$, откуда $\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x + \gamma^{-1} A^*_{-\lambda} \beta x = 2x$. Теперь имеем

$$\| 2x \| = \| \gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x + \gamma^{-1} A^*_{-\lambda} \beta x \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x \| + \| \gamma^{-1} A^*_{-\lambda} \beta x \| \text{ для } \forall x \in E. \tag{7}$$

Из (5) — (7) следует:

$$\| \gamma^{-1} A^*_\lambda \beta x \| = \| x \| \quad \text{для} \quad \forall x \in E. \tag{8}$$

Таким образом, $\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta$ есть изометрия E в E. Но $\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta = \gamma^{-1} (\alpha^* + \lambda B^*) \beta = I + \lambda \gamma^{-1} B^* \beta$. Пусть, далее, $\lambda \neq 0$ настолько мало́, что $\| \lambda \gamma^{-1} B^* \beta \| < 1$. Тогда оператор $\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta$ обратим и, следовательно, он является изометрией E на E. Покажем теперь, что

$$\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta y = y \quad \text{для} \quad \forall y \in E_0. \tag{9}$$

Действительно, для $\forall f \in \bar{E}$ имеем $f(\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta y) = (A^*_\lambda \beta y)(f) = (\beta y)(A_\lambda f) = (A_\lambda f)(y) = (f + \lambda B)(y) = f(y) + \lambda (Bf)(y) = f(y)$, ибо $Bf \in E^*_{\text{ап}}$. Итак, (9) установлено. Теперь в силу предложения 2 заключаем, что $\gamma^{-1} A^*_\lambda \beta = I$, откуда $B^* = 0$, а значит, и $B = 0$. Теорема 1 доказана.

4. **Пример нелинейного оператора продолжения.** Далее пусть (T, Σ, μ) есть отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. Мы построим симметричное пространство E на $[0, 1]$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, для которого существует нелинейный оператор продолжения с E_0 на E, отличный от естественного оператора продолжения Π_0^{-1}.

Пусть ψ есть непрерывная, возрастающая, вогнутая функция на $[0, 1]$ такая, что $\psi(1) = 1$ и $\lim\limits_{t \to 0} t/\psi(t) = 0$. Рассмотрим обычные пространства $\Lambda(\psi)$ и $M(\psi)$, состоящие из всех $x \in S([0, 1])$, для которых

$$\| x \|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^* d\mu < \infty,$$

и, соответственно,

$$\| x \|_{M(\psi)} = \sup_{0 < h \leqslant 1} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^* d\mu < \infty$$

(здесь x^* означает невозрастающую перестановку функции $|x|$).

Пусть E по составу элементов совпадает с $M(\psi)$ и для $x \in E$ положим

$$\| x \|_E = \inf \{ \| x_1 \|_{M(\psi)} + 1/2 \| x_2 \|_{L_\infty}\colon x_1 \in M(\psi),\ x_2 \in L_\infty,\ x_1 + x_2 = x \}.$$

Ясно, что $\| \cdot \|_E$ эквивалентна $\| \cdot \|_{M(\psi)}$. Пространство E' совпадает по составу элементов с $\Lambda(\psi)$ и для $y \in E'$ справедливо

$$\| y \|_{E'} = \max \{ \| y \|_{\Lambda(\psi)}, 2 \| y \|_{L_1} \}. \tag{10}$$

Фиксируем $F \in (l_\infty)^*$ такой, что

$$\| F \|_{(l_\infty)^*} = 1, \tag{11}$$

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in c_0, \tag{12}$$

$$F((1, 1, \ldots, 1, \ldots)) = 1. \tag{13}$$

Обозначим

$$z_n = \frac{1}{\psi(1/n)} \varkappa_{(0,1/n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varkappa_e$ — характеристическая функция множества e.

Положим

$$G(x) = F\left(\left\{\int_0^1 x z_n d\mu\right\}_{n=1}^\infty\right). \tag{14}$$

Ясно, что $G \in E^*_{\text{ап}}$. Заметим, что $\varphi = \frac{d\psi}{dt} \in E$ и $\int_0^1 \varphi z_n d\mu = 1 \quad \forall n$, поэтому $G(\varphi) = 1$ и тем самым $G \neq 0$.

Положим

$$\theta(y) = \max\{0, 2\| y \|_{L_1} - \| y \|_{\Lambda(\psi)}\}. \tag{15}$$

Так как $\theta(\varkappa_{[0,1]}) = 1$, то $\theta \not\equiv 0$. Положим теперь

$$Rf = II_0^{-1} f + \theta(I_0^{-1} f) G, \; f \in (E_0)^*. \tag{16}$$

Из сказанного ясно, что $R \neq II_0^{-1}$.

Предложение 3. *Оператор R является оператором продолжения с E_0 на E.*

Доказательство. Ясно, что R непрерывен и

$$Rf|_{E_0} = f, \; f \in (E_0)^*, \tag{17}$$

ибо $G \in E^*_{\text{ап}}$, в силу чего $G|_{E_0} = 0$. Осталось показать, что

$$\|Rf\|_{E^*} = \| f \|_{(E_0)^*} \quad \text{для} \quad \forall f \in (E_0)^*. \tag{18}$$

Так как $G \in E^*_{\text{ап}}$, то очевидно, что

$$\| Rf \|_{E^*} \geqslant \| f \|_{(E_0)^*}, \quad f \in (E_0)^*. \tag{19}$$

Легко проверить, что для $\forall y \in E'$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \| y + \theta(y) z_n \|_{\Lambda(\psi)} = \| y \|_{\Lambda(\psi)} + \theta(y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \| y + \theta(y) z_n \|_{L_1} = \| y \|_{L_1},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \| y + \theta(y) z_n \|_E = \max\{\| y \|_{\Lambda(\psi)} + \theta(y), \; \| y \|_{L_1}\} = \| y \|_E,$$

в силу (15). Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \| y + \theta(y) z_n \|_{E'} = \| y \|_{E'}, \qquad y \in E'. \tag{20}$$

Фиксируем $\forall f \in (E_0)^*$ и обозначим $y = (I_0)^{-1} f$. Для $\forall x \in E$ и для $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(Rf)(x) = (Iy + \theta(y) G)(x) =$$

$$= (Iy)(x) + \theta(y) F\left(\left\{\int_0^1 x z_n d\mu\right\}_{n=1}^\infty\right) =$$

$$= F(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \int_0^1 (y + \theta(y) z_n) x \, d\mu, \int_0^1 (y + \theta(y) z_{n+1}) x \, d\mu \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k \geqslant n} \left| \int_0^1 (y + \theta(y) z_k) x \, d\mu \right| \leqslant \sup_{k \geqslant n} \| y + \theta(y) z_k \|_{E'} \| x \|_E.$$

Отсюда и из (20) получаем $|(Rf)(x)| \leqslant \| y \|_{E'} \| x \|_E$, т. е. $\| Rf \|_{E^*} \leqslant \| f \|_{(E_0)^*}$. Теперь с учетом (19) заключаем, что справедливо (18). Предложение 3 доказано.

Авторы благодарят Е. М. Семенова за постановку задачи и внимание к работе.

Поступило
2.XII.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Митягин Б. С., Хенкин Г. М., Линейные задачи комплексного анализа, Успехи матем. наук, 26, № 4 (1971), 93—152.

[2] Семенов Е. М., Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций, Докл. АН СССР, 157, № 6 (1964), 1292—1295.

[3] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1976

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 226, № 1

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О КОМПЛЕКСНОМ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 23 VII 1975)

Цель заметки — сведение второго комплексного метода Кальдерона в случае банаховых идеальных пространств с полунепрерывными нормами к вещественной конструкции Кальдерона.

Обозначения. Если E — банахово пространство, то $B(E)=\{x\in E: \|x\|\leqslant 1\}$. $\Pi=\{z: 0<\operatorname{Re} z<1\}$, $\overline{\Pi}=\{z: 0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1\}$. (T, Σ, μ) — пространство с вполне σ-конечной мерой, $S=S(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех комплексных измеримых функций на нем (μ — эквивалентные функции и множества, как обычно, отождествляются). Всюду далее s есть фиксированное число такое, что $0<s<1$.

1. В ([1]) построены следующие два комплексных метода интерполяции (см. также ([2]), гл. III, § 4). Пусть E_0, E_1 суть комплексные банаховы пространства, непрерывно вложенные в некоторое топологическое векторное пространство. На пространстве E_0+E_1 рассматриваем обычную норму, превращающую его в банахово пространство.

Первый метод. Рассматривается пространство $\mathscr{A}(E_0, E_1)$ всех функций $\varphi(z)$ $(z\in\overline{\Pi})$ со значениями в E_0+E_1, голоморфных в Π, непрерывных и ограниченных в $\overline{\Pi}$ и таких, что функция $\varphi(j+i\tau)$, $-\infty<\tau<+\infty$ принимает значения из E_j и непрерывна и ограничена в E_j, $j=0, 1$. Пространство $\mathscr{A}(E_0, E_1)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mathscr{A}}=\max_{j=0,1}\{\sup_{-\infty<\tau<\infty}\|\varphi(j+i\tau)\|_{E_j}\}.$$

Через $[E_0, E_1]_s$ обозначается множество всех $x\in E_0+E_1$, представимых в виде $x=\varphi(s)$, где $\varphi\in\mathscr{A}(E_0, E_1)$. Пространство $[E_0, E_1]_s$ с нормой $\|x\|=\inf\limits_{x=\varphi(s)}\|\varphi\|_{\mathscr{A}}$ является банаховым пространством.

Второй метод. Рассматривается пространство $\overline{\mathscr{A}}(E_0, E_1)$ всех функций $\varphi(z)$ $(z\in\overline{\Pi})$ со значениями в E_0+E_1, голоморфных в Π, непрерывных в $\overline{\Pi}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\varphi(z)\|_{E_0+E_1}\leqslant c(1+|z|),\quad z\in\overline{\Pi}.$$

и таких, что $\varphi(j+i\tau_2)-\varphi(j+i\tau_1)\in E_j$ при $-\infty<\tau_1, \tau_2<+\infty$, $j=0, 1$, причем

$$\|\varphi\|_{\overline{\mathscr{A}}}=\max_{j=0,1}\left\{\sup_{-\infty<\tau_1<\tau_2<\infty}\left\|\frac{\varphi(j+i\tau_2)-\varphi(j+i\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}\right\|_{E_j}\right\}<\infty.$$

Факторизация $\overline{\mathscr{A}}(E_0, E_1)$ по подпространству констант приводит к банахову пространству, обозначаемому снова через $\overline{\mathscr{A}}(E_0, E_1)$. Через $[E_0, E_1]^s$ обозначается множество всех $x\in E_0+E_1$, представимых в виде $x=d\varphi(s)/dz$, где $\varphi\in\overline{\mathscr{A}}(E_0, E_1)$. Пространство $[E_0, E_1]^s$ с нормой $\|x\|=\inf\limits_{x=\varphi'(s)}\|\varphi\|_{\overline{\mathscr{A}}}$ является банаховым пространством.

Пространства $[E_0, E_1]_s$ и $[E_0, E_1]^s$ являются интерполяционными между E_0 и E_1 пространствами с нормальным типом s; эти и другие их свойства можно найти в ([1], [2]).

2. Банаховым идеальным пространством (сокращенно б.и.п.) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство X, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: если $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leqslant |x|$, то $y \in X$ и $\|y\| \leqslant \|x\|$. Норма в X называется полунепрерывной, если из $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X$ следует, что $\sup \|x_n\| = \|x\|$. Норма в X называется монотонно полной, если из $0 \leqslant x_n \uparrow$, $x_n \in X$, $\sup \|x_n\| < \infty$ следует, что $\sup x_n \in X$.

Пусть далее X_0, X_1 суть произвольные б.и.п. на (T, Σ, μ). Через $X(s) = X_0^{1-s} X_1^s$ обозначается б.и.п., состоящее из всех $x \in S$ таких, что $|x| \leqslant \lambda x_0^{1-s} x_1^s$ для некоторого числа $\lambda \geqslant 0$ и некоторых $0 \leqslant x_j \in X_j$ с $\|x_j\|_{X_j} \leqslant 1$, $j = 0, 1$. Для $x \in X(s)$ за норму $\|x\|_{X(s)}$ принимается инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. Эта конструкция введена в ([1]) и изучалась также в ([3-5]). В ([1]) показано, что $[X_0, X_1]_s \subset X(s) \subset [X_0, X_1]^s$ и нормы операторов вложения $\leqslant 1$; однако, вообще говоря, эти три пространства различны, даже если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны. Там же показано, что $X_0 \cap X_1$ плотно в $[X_0, X_1]_s$, но, вообще говоря, не плотно в $X(s)$ и $[X_0, X_1]^s$.

3. Пространство $X(s)$, в отличие от $[X_0, X_1]_s$ и $[X_0, X_1]^s$, не является, вообще говоря, интерполяционным между X_0 и X_1 даже если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны; соответствующий пример приведен в ([6]). Однако эта вещественная конструкция существенно проще обеих комплексных методов; исходя из конкретных X_0, X_1 построить $X(s)$ обычно бывает весьма несложно. В ([7]) осуществлена редукция первого комплексного метода к указанной вещественной конструкции и доказана следующая

Теорема (В. А. Шестаков). *Пространство $[X_0, X_1]_s$ совпадает с замыканием множества $X_0 \cap X_1$ в $X(s)$, причем норма в $[X_0, X_1]_s$ совпадает с нормой, индуцированной из $X(s)$.*

Нашей целью является подобная же редукция для второго комплексного метода. В ([1]) показано, что если шар $B(X(s))$ замкнут в $X_0 + X_1$, то пространства $X(s)$ и $[X_0, X_1]^s$ и их нормы совпадают. Из результатов ([3]) следует, что если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны и монотонно полны, то этими же свойствами обладает норма в $X(s)$, а, значит, шар $B(X(s))$ замкнут в $X_0 + X_1$. Из сказанного ясно, что если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны и монотонно полны, то пространства $X(s)$ и $[X_0, X_1]^s$ и их нормы совпадают.

Следующий результат является основным.

Теорема 1. *Если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны, то шар $B([X_0, X_1]^s)$ совпадает с замыканием шара $B(X(s))$ в пространстве $X_0 + X_1$.*

Нам неизвестно, существенно ли требование полунепрерывности норм для справедливости теоремы; заметим, впрочем, что в приложениях оно, как правило, выполняется.

Теорема 2. *Если одно из пространств X_0, X_1 есть $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, то заключение теоремы 1 справедливо без каких бы то ни было ограничений на второе пространство.*

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей лемме, в которой X_0, X_1 суть любые б.и.п. на (T, Σ, μ) (полунепрерывность норм не требуется).

Лемма. *Пусть:* а) *T_k есть возрастающая последовательность измеримых подмножеств из T, причем $\bigcup_k T_k = T$;* б) *$0 \leqslant y_j \in S$, причем $P_k y_j \in X_j$, где P_k есть оператор умножения на характеристическую функцию T_k, и $\sup_k \|P_k y_j\|_{X_j} < 1$, $j = 0, 1$;* в) *$x = y_0^{1-s} y_1^s \in X_0 + X_1$ и $\|x - P_k y_0^{1-s} y_1^s\|_{X_0 + X_1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.*

Тогда $x \in B([X_0, X_1]^s)$.

Наметим ее доказательство. Можно считать, что носитель x есть все T. Положим $w = r_1 P_1 y_0^{1-s} y_1^s + \sum_{k=2}^{\infty} r_k (P_k - P_{k-1}) y_0^{1-s} y_1^s$, где числа $r_k > 1$ подобраны так, что $r_k \uparrow +\infty$ и ряд сходится по норме в X_0+X_1. Тогда $w=w_0+w_1$, где $w_0 \in X_0$, $w_1 \in X_1$, $w_0 w_1=0$. Подберем теперь $\varepsilon>0$ так, что $\sup\limits_k \|P_k y_j + \varepsilon w_j\|_{X_j}<1$, $j=0, 1$. После этого найдем функции $x_j \in S$, $j=0, 1$ и числа $0<\lambda_k \uparrow +\infty$ такие, что: а) $0 \leqslant x_j \leqslant y_j+\varepsilon w_j$; б) $x_0^{1-s} x_1^s=x$; в) $\max\{x_0(t), x_1(t)\} \geqslant \lambda_k \min\{x_0(t), x_1(t)\}$ для почти всех $t \in T \setminus T_k$. Затем построим функцию φ: $\overline{\Pi} \to X_0+X_1$, положив для $z \in \overline{\Pi}$

$$\varphi(z)(t)=\int\limits_{0,5}^{z} x_0(t)^{1-z} x_1(t)^z dz, \qquad t \in T.$$

Оказывается, что $\varphi \in \mathscr{A}(X_0, X_1)$, $\|\varphi\|_{\mathscr{A}} \leqslant 1$, $\varphi'(s)=x$.

Дадим теперь краткую схему доказательства теоремы 1. Пусть U есть замыкание шара $B(X_0^{1-s} X_1^s)$ в X_0+X_1, R — линейная оболочка U, $\|\cdot\|_R$ — функционал Минковского множества U. Тогда $(R, \|\cdot\|_R)$ есть б.и.п. и $B([X_0, X_1]^s) \subset U$ (см. ([7])). Фиксируем произвольный $x \in R$ такой, что $\|x\|_R<1$. Достаточно лишь доказать, что $x \in B([X_0, X_1]^s)$. Можно считать, что $x \geqslant 0$ и носитель x есть все T. Найдется возрастающая последовательность измеримых множеств $T_k \subset T$ такая, что $\bigcup\limits_k T_k=T$, $P_k x \in B(X(s))$. $\|x-P_k x\|_{X_0+X_1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Так как норма в X_j полунепрерывна, то X_j является подпространством во втором дуальном пространстве X_j''. Кроме того, так как $(X_0^{1-s} X_1^s)''=(X_0'')^{1-s}(X_1'')^s$ (см. ([3])), то, используя сказанное перед теоремой 1, имеем $U \subset B((X_0'')^{1-s}(X_1'')^s)$. Теперь уже нетрудно построить соответствующие y_0 и y_1, после чего останется применить лемму.

При доказательстве теоремы 2, если $X_j=L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, то применяя лемму, за y_j нужно взять соответствующую константу.

Замечание. Из результатов ([7]) и нашей теоремы 1 следует, что в условиях теоремы 1 шар $B([X_0, X_1)^s]$ совпадает с замыканием шара $B([X_0, X_1]_s)$ в X_0+X_1. Нам неизвестно, всегда ли шар $B([E_0, E_1]^s)$ совпадает с замыканием шара $B([E_0, E_1]_s)$ в E_0+E_1 для произвольной интерполяционной пары E_0, E_1.

Ленинградский военный инженерный институт
им. А. Ф. Можайского

Поступило
18 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. P. Calderón*, Studia Math., v. 24, № 2, 113 (1964). [2] Функциональный анализ (СМБ), под ред. С. Г. Крейна, М., 1972. [3] *Г. Я. Лозановский*, Сибирск. матем. журн., т. 10, № 3, 584 (1969). [4] *Г. Я. Лозановский*, Там же, т. 13, № 6, 1304 (1972). [5] *С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов*, Тр. Московск. матем. о-ва, т. 17, 293 (1967). [6] *Г. Я. Лозановский*, Функциональный анализ и его приложения, т. 6, № 4, 89 (1972). [7] *В. А. Шестаков*, Вестн. ЛГУ, № 19, 64 (1974).

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 226, № 1

УДК 519.9+575.1

МАТЕМАТИКА

Ю. И. ЛЮБИЧ, Г. Д. МАЙСТРОВСКИЙ, Ю. Г. ОЛЬХОВСКИЙ

СХОДИМОСТЬ К РАВНОВЕСИЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОТБОРА В ОДНОЛОКУСНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 17 VI 1975)

Рассмотрим бесконечную аутосомную однолокусную (с любым числом $m\geqslant 2$ аллелей $A_1,\ldots, A_m$) популяцию, диплоидную на уровне зигот и гаплоидную на уровне гамет. Пусть на уровне зигот действует стационарный отбор с симметричной матрицей $\Lambda=(\lambda_{ik})^m_{i,k=1}$, а на уровне гамет отбор отсутствует. Пусть поколения не перекрываются и время дискретно.

Эта динамическая система описывается (на уровне гамет) уравнениями

$$p_i'=\frac{p_iw_i}{w},\qquad i=1,2,\ldots,m, \tag{S}$$

где p_i, p_i' — вероятность аллеля A_i в каком-нибудь и в следующем поколении.

$$w_i=\sum\lambda_{ik}p_k,\qquad w=\sum p_iw_i=\sum\lambda_{ik}p_ip_k,$$

w — средняя приспособленность популяции.

Системе (S) и ее аналогам посвящена обширная литература (см. ([1-3])). Сравнительно недавно ([4, 5]) на эту систему была распространена «фундаментальная теория Фишера об естественном отборе», согласно которой $w'\geqslant w$, т. е. средняя приспособленность не убывает со временем (и даже возрастает, если исходное состояние не равновесно). Этот факт, конечно, свидетельствует в пользу сходимости к равновесию, но полное доказательство сходимости до сих пор не проводилось даже, по-видимому, при $m=2$, хотя для этого случая достаточно элементарных средств (см. прим. ред. в ([1]), гл. III).

В настоящей работе сходимость к равновесию устанавливается для системы (S) при любом числе аллелей и любой (симметричной) матрице Λ. Одновременно оценивается скорость сходимости; она всегда оказывается не ниже степенной, а при определенных условиях — экспоненциальной. Наш подход основан на общей теории релаксационных процессов (р.п.), разработанной первоначально для задач численной минимизации ([6, 7]), но приложимой к процессу отбора благодаря теореме Фишера (р.п.— это любая траектория системы, на которой не возрастает некоторый заданный функционал).

Пусть I означает произвольное непустое подмножество множества $\{1, 2,\ldots, m\}$. Многообразие Σ_S равновесных состояний системы (S) определяется совокупностью систем уравнений

$$w_i=w,\ i\in I,\ p_i=0,\ i\notin I,$$

или, что равносильно

$$w_i-w_{\mu(I)}=0,\ i\in I,\ i>\mu(I)=\min\{j\mid j\in I\},\quad p_i=0,\ i\notin I,\ \sum p_i=1.$$

Последняя система линейна, ее детерминант $D_I(\Lambda)$ является полиномом от λ_{ik}. Если $D_I(\Lambda)\neq 0$ при всех I, то Σ_S конечно для данной системы и для

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 56

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРАМ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. VI

Сборник работ под редакцией
Н. К. НИКОЛЬСКОГО

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД 1976

Г.Я.Лозановский

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ "О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ВЕКТОРНЫХ СТРУКТУРАХ"

Пусть ψ – неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0,1]$ функция такая, что $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ при $t>0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\psi(t)}=0$. Через μ обозначаем меру Лебега на $[0,1]$, Σ – совокупность всех измеримых подмножеств из $[0,1]$, S – пространство всех конечных вещественных измеримых функций на $[0,1]$, (эквивалентные по мере μ множества и функции отождествляются). Символ χ_E означает характеристическую функцию множества E. Для $x\in S$ через x^* обозначается невозрастающая перестановка функции $|x|$.

Пространство Марцинкевича $M(\psi)$ состоит из всех $x\in S$, для которых $\|x\| = \sup\limits_{0<h\le 1}\frac{1}{\psi(h)}\cdot\int_0^h x^* d\mu<\infty$. Для $f\in M(\psi)^*$ ($M(\psi)^*$ – банахово сопряженное к $M(\psi)$) и $E\in\Sigma$ через f_E обозначается функционал на $M(\psi)$, действующий по формуле $f_E(x)=f(x\chi_E)$, $x\in M(\psi)$. Функционал $f\in M(\psi)^*$ называется *анормальным*, если $f(x)=0$, $\forall x\in L^\infty[0,1]$. Функционал $f\in M(\psi)^*$ называется *локализованным*, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists E\in\Sigma$, для которого $f=f_E$ и $\mu E<\varepsilon$. Всякий локализованный функционал анормален. В [I] в числе прочего была доказана следующая теорема (см. [I], теорему 4).

<u>Теорема</u>. 1. Если $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1$, то всякий анормальный функционал f, $f\in M(\psi)^*$, является локализованным.

2. Если $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1$, то на $M(\psi)$ существуют анормальные не локализованные функционалы. Более того, в этом случае существует анормальный f, $f\in M(\psi)^*_+$, такой, что $\|f_E\|=1$, $\forall E\in\Sigma$ с $\mu E>0$.

Второе утверждение этой теоремы было доказано в [I] лишь в предположении справедливости континуум – гипотезы. Мы приведем здесь другое доказательство того же факта, не зависящее от континуум гипотезы. Итак, пусть выполнено условие $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1$.

Фиксируем числовую последовательность $\{a_n\}$ такую, что

$$0<a_n\le\frac{1}{n}\ (n\in N) \quad\text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)}=1 \qquad (I)$$

Существование такой последовательности следует из леммы 5 статьи [I]. Для $\tau\in(0,1)$ положим

$$\varphi_\tau(t)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\le t\le\tau\\ \psi'(t-\tau) & \text{при } \tau<t\le 1\end{cases}$$

Здесь $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$. Ясно, что $\varphi_\tau \in M(\psi)$, $\|\varphi_\tau\| = 1$. Фиксируем какой-нибудь обобщенный предел Lim, определенный на классе всех ограниченных числовых последовательностей [2, с.144]. Для $\tau \in (0,1)$ построим $f_\tau \in M(\psi)^*_+$ по формуле

$$f_\tau(x) = \operatorname{Lim}\Big(\Big\{\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_\tau^{\tau+a_n} x(t)\,dt\Big\}_{n\in N}\Big), \qquad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $\|f_\tau\| \leqslant 1$, $f_{\tau_1} d f_{\tau_2}$ при $\tau_1 \neq \tau_2$; $f_\tau(\chi_{[0,1]}) = 0$, ибо $\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_\tau^{\tau+a_n} \chi_{[0,1]}\,dt = \frac{a_n}{\psi(a_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Заметим также, что $f_\tau(\varphi_\tau) = 1$, ибо для достаточно больших n имеем $\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_\tau^{\tau+a_n} \psi'(t-\tau)\,dt = 1$. Отсюда следует, что $\|f_\tau\| = 1$. Покажем, что для любого конечного набора попарно различных точек $\tau_1, \ldots, \tau_m \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$\Big\|\sum_{K=1}^{m} f_{\tau_K}\Big\| \leqslant 1. \tag{2}$$

Фиксируем n_0, $n_0 \geqslant m$, такое, что $\forall n \geqslant n_0$ промежутки $(\tau_i, \tau_i + a_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ попарно не пересекаются. Пусть $x \in M(\psi)_+$, $\|x\| \leqslant 1$. Тогда при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\gamma_n \overset{def}{=\!=} \sum_{K=1}^{m} \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_{\tau_K}^{\tau_K+a_n} x(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_0^{ma_n} x^*(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_0^{na_n} x^*(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \Big[\frac{1}{\psi(na_n)} \cdot \int_0^{na_n} x^*(t)\,dt\Big] \cdot \psi(na_n) \leqslant \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)}.$$

Отсюда $\operatorname{Lim} \gamma_n \leqslant 1$, что доказывает (2).

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{\tau\in(0,1)} f_\tau(x), \qquad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $f \in M(\psi)^*_+$, $\|f\| = 1$, $f(\chi_{[0,1]}) = 0$, тем самым f - анормальный. Фиксируем теперь множество $E \in \Sigma$ такое, что $\mu E > 0$ и покажем, что $\|f_E\| = 1$. Фиксируем какую-нибудь точку $\tau \in (0,1)$, являющуюся точкой плотности множества E. Положим $H = E \cap [\tau, 1]$. Не умаляя общности, можно считать, что $\tau \in H$, и что каждая точка $t \in H$, $t \neq \tau$ является точкой плотности H; τ есть точка правой плотности H. Для $t \in H$ положим $g(t) = \mu(H \cap [\tau, t])$. Ясно, что g есть непрерывное взаимнооднозначное отображение H на $[0, \mu H]$.

Положим теперь

$$z(t) = \begin{cases} \psi'(g(t)) & \text{при } t \in H \\ 0 & \text{при } t \in [0,1] \setminus H \end{cases}$$

Ясно, что z равноизмерима с $\psi'\chi_{[0,\mu H]}$, поэтому $z \in M(\psi)$ и $\|z\|=1$. Для достаточно больших n теперь имеем

$$\int_{\tau}^{\tau+a_n} z(t)\,dt = \int_{0}^{\mu(H\cap[\tau,\tau+a_n])} \psi'(t)\,dt = \psi(\mu(H\cap[\tau,\tau+a_n])).$$

Но $\mu(H\cap[\tau,\tau+a_n]) = \varepsilon_n a_n$, где $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, ибо τ есть точка правой плотности множества H. Так как $\varepsilon_n \leqslant 1$, а ψ вогнута, то $\psi(\varepsilon_n a_n) \geqslant \varepsilon_n \psi(a_n)$. Теперь имеем

$$\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int_{\tau}^{\tau+a_n} z(t)\,dt = \frac{\psi(\varepsilon_n a_n)}{\psi(a_n)} \geqslant \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

откуда $f_\tau(z) \geqslant \operatorname{Lim} \varepsilon_n = 1$. Следовательно, $f(z) \geqslant 1$. Теперь имеем $f_E(z) = f(z\cdot\chi_E) = f(z) \geqslant 1$, откуда $\|f_E\| \geqslant 1$.

<u>Следствие</u>. Если $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, то в $M(\psi)^*$ существует замкнутая векторная подрешетка, которая алгебраически и порядково изоморфна и изометрична пространству $l^\infty_{(0,1)}$, где $l^\infty_{(0,1)}$ есть пространство всех ограниченных вещественных функций на $(0,1)$ с равномерной нормой.

Действительно, по каждому $\xi \in l^\infty_{(0,1)}$ построим $T\xi \in M(\psi)^*$ по формуле

$$(T\xi)(x) = \sum_{\tau\in(0,1)} \xi(\tau) f_\tau(x), \quad x \in M(\psi).$$

Тогда отображение $\xi \to T\xi$ есть алгебраический и порядковый изоморфизм и изометрия $l^\infty_{(0,1)}$ на некоторую векторную подрешетку в $M(\psi)^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лозановский Г.Я.* О локализованных функционалах в векторных структурах.-В кн.: "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып.19, Харьков, 1974, 66-80.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., "Наука", 1959, 684 с.

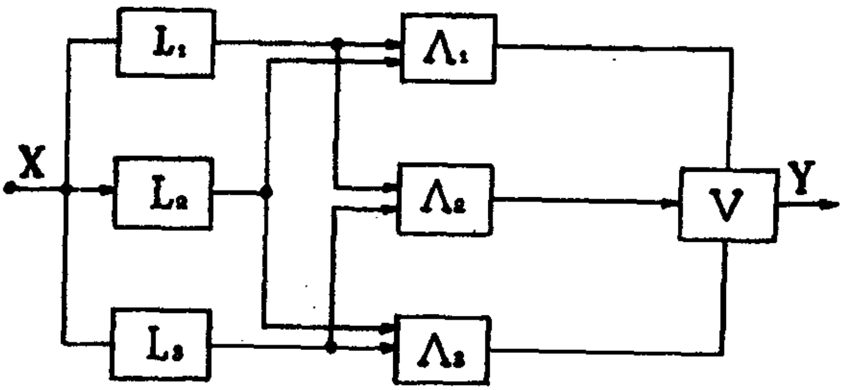
Lozanovskii, G.Ja. A supplement to the paper "On the localizable functionals in vector lattices"

Summary.

It is proved that under condition $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$ there exists $f \in M(\psi)^*$ which is singular but not localizable.

Управление, надежность и навигация

Выпуск 3



Саранск • 1976

работе Пономарев В.И., Шапиро Л.Б.,
бикомпакты топологических пространств и
непрерывных отображений, УМН 31,
(191), (1976), 121-136.
имеется на стр. 133
Задача 11. Может ли гиперстоунов
бикомпакт быть соабсолютным
со связным бикомпактом.

Г.Я.Лозановский

ЗАМЕЧАНИЕ О НОРМАЛЬНЫХ МЕРАХ

Под компактом будем понимать компактное хаусдорфово пространство. Под мерой на компакте будем понимать неотрицательную конечную регулярную борелевскую меру. Мера на компакте называется нормальной, если она аннулируется на всех замкнутых нигде не плотных множествах.

В [I] было показано, что на локально связном компакте без изолированных точек не существует ненулевой нормальной меры. Этот результат был передоказан в [2], где был поставлен вопрос, может ли такая мера существовать на связном компакте, отличном от одноточечного. Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема I. Пусть $\mathcal{R}$ есть вещественная прямая, $\mathcal{T}$ – плотностная топология на $\mathcal{R}$ [3]. Пусть $\mathcal{X}$ есть стоун-чеховская компактификация пространства $(\mathcal{R},\mathcal{T})$. Тогда компакт $\mathcal{X}$ связен и на $\mathcal{X}$ существует нормальная мера μ такая, что $\mu(U)>0$ для любого непустого открытого $U\subset\mathcal{X}$.

Пусть теперь $\mathcal{L}^\infty$ есть обычная векторная решетка всех классов попарно эквивалентных, ограниченных, измеримых по Лебегу вещественных функций на $\mathcal{R}$. Обозначим через E векторную решетку всех ограниченных аппроксимативно непрерывных функций на $\mathcal{R}$. Из [4] следует, что E есть в точности пространство всех ограниченных функций на $\mathcal{R}$, непрерывных в плотностной топологии $\mathcal{T}$. Заметим, что каждый $x\in E$ содержится в единственном классе $\hat{x}\in\mathcal{L}^\infty$. Поэтому E естественным образом можно считать векторной подрешеткой в $\mathcal{L}^\infty$.

Теорема 2. При указанном вложении E в $\mathcal{L}^\infty$ векторная решетка $\mathcal{L}^\infty$ оказывается Дедекиндовым пополнением векторной решетки E.

В связи с теоремой 2 полезно напомнить, что Дедекиндово пополнение векторной решетки всех ограниченных функций на $\mathcal{R}$, непрерывных в обычной эвклидовой топологии, по своим порядковым свойствам резко отличается от $\mathcal{L}^\infty$.

Доказательства теорем I и 2 мы опускаем, так как они легко следуют из результатов, имеющихся в [3] и [4].

Литература

I. Fishel B., Papert D. A note on hyperdiffuse measures. – „J. London Math. Soc.", 1964, 39, № 2.

2. Векслер А.И., Роткович Г.Я. Одно свойство неприводимых образов экстремально несвязных гиперстоуновых бикомпактов и его приложение к теории полуупорядоченных пространств. – "Сибирский математический журнал", I97I, I2, № 2.

3. Окстоби Дж. Мера и категория. М., I974.

4. Goffman C., Neugebauer C.J., Nishiura T. Density topology and approximate continuity. – „Duke Math. J.", I96I, 28.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МОДЕЛЯМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И РАВНОВЕСИЯ,
ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ,
ВЫПУКЛОМУ АНАЛИЗУ И ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

ОПТИМИЗАЦИЯ 17 (34)

НОВОСИБИРСК 1975

1975 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 17(34)
Смежные математические вопросы

УДК 513.88

О КООРДИНАТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА

Г.Я.Лозановский

В работе [I] *в числе прочего был* получен ряд результатов о строении и свойствах пространства $M(\Psi)^*$, сопряженного к пространству Марцинкевича $M(\Psi)$ на отрезке. В настоящей заметке с аналогичной точки зрения изучается пространство $M(c)^*$, где $M(c)$ есть координатное пространство Марцинкевича. Пусть $c=\{c_i\}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n} c_i$ $(n\in N)$. Показано, что строение пространства $M(c)^*$ во многом зависит от величины $\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}$. Именно, если $\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}>1$, *то пространство* $M(c)^*$ слабо секвенциально полно. Если же $\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}=1$, то $M(c)^*$ не только не является слабо секвенциально полным, но содержит замкнутую линейную подрешетку, изоморфную и изометрическую пространству $l^\infty_{[0,1]}$. *Более того, в этом случае (в предположении справедливости континуум-гипотезы)* $M(c)^*$ *обладает* одним свойством, которое несколько неожиданно с точки зрения теории векторных решеток. В конце заметки получено также усиление одного результата Джонсона о пространстве $(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus l^1_n)^*_{l^\infty}$.

I. Терминология и обозначения

Через N обозначается множество всех натуральных чисел. $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_\infty$, $\mathcal{P}_0$ означают соответственно совокупность всех, всех бесконечных, всех конечных подмножеств множества N. Сопряжённое к нормированному пространству X обозначается через X^*. В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы в основном следуем [2]. Элементы x,y K-линеала X называются дизъюнктными (обозначение: $x\,d\,y$), если $|x|\wedge|y|=0$. Дизъюнктным дополнением множества $H\subset X$ называется множество $H^d=\{x\in X: x\,d\,y$ для $\forall y\in H\}$. Множество $H\subset X$ называется *компонентой, если* $H=H^{dd}$. Через $E(X)$ обозначаем булеву алгебру всех компонент K-линеала X. Через $E_\infty(X)$ (соответственно $E_0(X)$) обозначаем множество всех бесконечномерных (соответственно конечномерных) компонент в X. Идеал Y в K-линеале X называется фундаментом, если $Y^d=\{0\}$. Элемент $x\in X$ будем называть элементом счётного типа, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных, положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X *не более чем счётно.* K *-линеалом счетного типа называется* K-линеал, все элементы которого счетного типа (см. также [2, стр. 173]). Через $\tilde{X}$, $\bar{X}$, $\tilde{X}_{an}$ обозначаются пространства всех соответственно регулярных, вполне линейных, анормальных функционалов на K-линеале X. Напомним, что если $\tilde{X}$ тотально на X, то $\tilde{X}=\bar{X}\oplus\tilde{X}_{an}$, то есть $\bar{X}$ и $\tilde{X}_{an}$ суть дополнительные друг к другу компоненты в $\tilde{X}$. Функционал $f\in\tilde{X}$ будем называть функционалом счётного типа, если f счётного типа как элемент K-пространства $\tilde{X}$. Напомним, что если X - KB-линеал, то $X^*=\tilde{X}$; в этом случае вместо $\tilde{X}_{an}$ будем писать также X^*_{an}.

KB *-линеал* X *называется квазиравномерно выпуклым, если* существует константа $r<2$ такая, что $(x,y\in X_+,\ x\,d\,y,\ \|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1)\Longrightarrow(\|x+y\|\leq r)$. KB-пространством называется KB-линеал X, являющийся K-пространством, в котором выполнены следующие два условия [2, стр. 207]:

(A) если $x_n\downarrow 0\ (n\in N)$, то $\|x_n\|\to 0$;

(B) если $0\leq x_n\uparrow\ (n\in N)$ и $\sup\|x_n\|<\infty$, то существует $\sup x_n\in X$.

Напомним, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон как банахово пространство (теорема Огасавара).

Через c_0, ℓ^∞ обозначаются обычные пространства вещественных числовых последовательностей; $\ell^\infty_{[0,1]}$ есть пространство всех ограниченных вещественных функций на $[0,1]$ с равномерной нормой.

2. Некоторые свойства функционалов в пространствах последовательностей

Всюду в этом пункте:

W — пространство всех последовательностей вещественных чисел;

$\{e_n\}$ - стандартный базис в W;

X - произвольный фундамент в W.

Пространство $X'=\{y=\{y_n\}\in W: \sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|<\infty$ для $\forall x=\{x_n\}\in X\}$ называется дуальным к X пространствам. Напомним, что $f\in\tilde X$ вполне линеен тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty x_n y_n, \quad x\in X,$$

с $y\in X'$.

Напомним также, что $f\in\tilde X$ анормален тогда и только тогда, когда $f(e_n)=0$ для $\forall n\in N$. Каждый $f\in\tilde X$ однозначно представим в виде $f=f_1+f_2$, где $f_1\in\bar X$, $f_2\in\tilde X_{an}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функционал $f\in\tilde X$ будем называть строго анормальным, если он анормален и для $\forall K\in E_\infty(X)\ \exists K_1\in E_\infty(X)$ такая, что $K_1\subset K$ и $f(K_1)=\{0\}$. Совокупность всех строго анормальных функционалов на X обозначаем $\tilde X_{san}$ (или X^*_{san}, если X - банахово KN-пространство).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

а) $\tilde X_{san}$ есть σ-замкнутый фундамент в $\tilde X_{an}$ (σ-замкнутость означает, что если $f_n\in\tilde X_{san}$ $(n\in N)$ и существует $\sup f_n\in\tilde X$, то $\sup f_n\in\tilde X_{san}$);

б) если $f\in\tilde X_{an}$ счётного типа, то $f\in\tilde X_{san}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\tilde X_{san}$ есть идеал в $\tilde X_{an}$. Пусть $0\leqslant f_n\in\tilde X_{san}$ $(n\in N)$, $f_n\uparrow f\in\tilde X$. Покажем, что $f\in\tilde X_{san}$. Так как $\tilde X_{an}$ есть компонента в $\tilde X$, то $f\in\tilde X_{an}$. Пусть $K\in E_\infty(X)$. Построим $K_n\in E_\infty(X)$ $(n\in N)$ так, что $K\supset K_n\supset K_{n+1}$ и $f_n(K_n)=\{0\}$ для $\forall n\in N$. Ясно, что найдётся $K'\in E_\infty(X)$ такая, что $K'\cap K_n^d\in E_0(X)$ для $\forall n\in N$. Так как $f_n\in\tilde X_{an}$, то $f_n(K'\cap K_n^d)=\{0\}$, а значит, $f_n(K')=\{0\}$ для $\forall n\in N$. Следовательно, $f(K')=\{0\}$. Тем самым $f\in\tilde X_{san}$. Итак, доказано, что $\tilde X_{san}$ есть σ-замкнутый идеал в $\tilde X_{an}$. Осталось доказать лишь утверждение б) ибо функционалы счетного типа образуют фундамент в $\tilde X$. Пусть $f\in\tilde X_{an}$ — счетного типа. Можно считать, что $f\geqslant 0$. Пусть $K\in E_\infty(X)$. По известной теореме Серпинского о почти дизъюнктном разбиении натурального ряда [3, стр. 81] существует семейство $K_\tau\in E_\infty(X)$, $\tau\in[0,1]$, такое, что $K_\tau\subset K$ и $K_{\tau_1}\cap K_{\tau_2}\in E_0(X)$ при $\tau_1\neq\tau_2$. Для $\tau\in[0,1]$ положим

$$f_\tau(x)=f(P_{\tau K_\tau}x), \quad x\in X.$$

Ясно, что $0\leqslant f_\tau\leqslant f$ и $f_{\tau_1}\,d\,f_{\tau_2}$ при $\tau_1\neq\tau_2$. Так как f - счетного типа, то множество $\{\tau\in[0,1]: f_\tau\neq 0\}$ не более чем счетно. Поэтому $\exists\tau\in[0,1]$ такое, что $f_\tau=0$, то есть $f(K_\tau)=\{0\}$. Тем самым $f\in\tilde X_{san}$. Предложение доказано.

Заметим, что из предложения I следует, например, что $(\ell^\infty)^*_{an}=(\ell^\infty)^*_{san}$, ибо $(\ell^\infty)^*$ есть KB-пространство, а значит, пространство счётного типа.

3. Основные результаты

Пусть, далее, $c=\{c_i\}$ - последовательность вещественных чисел такая, что $c_i > 0$, $c_i \downarrow 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty$. Полагаем $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \ (n \in N)$. Через $M(c)$ обозначаем пространство Марцинкевича, состоящее из всех сходящихся к нулю последовательностей $x = \{x_i\}$ таких, что

$$\|x\|_{M(c)} = \sup_{n \in N} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{S_n} < \infty,$$

где $x^* = \{x_i^*\}$ состоит из модулей членов последовательности $x = \{x_i\}$, расположенных в невозрастающем порядке.

Для $f \in M(c)^*$, $K \in E(M(c))$ полагаем

$$f^K(x) = f(P_{\tau_K} x), \quad x \in M(c).$$

Следующие две теоремы суть основные результаты работы.

ТЕОРЕМА I. Пусть

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_{2n}}{S_n} > 1. \tag{I}$$

Тогда пространство $M(c)$ квазиравномерно выпукло, $M(c)^*$ есть КВ-пространство и $M(c)^*_{an} = M(c)^*_{san}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_{2n}}{S_n} = 1. \tag{2}$$

Тогда $M(c)^*$ не является пространством счетного типа; более того, в этом случае $M(c)^*$ содержит замкнутую линейную подрешетку, изоморфную и изометричную пространству $l^{\infty}_{[0,1]}$. Кроме того, в предположении справедливости континуум-гипотезы, существует $f \in M(c)^*_{an}$ такой, что

$$\|f^K\|_{M(c)^*} = 1 \qquad \forall K \in E_{\infty}(M(c)). \tag{3}$$

Тем самым в предположении справедливости континуум-гипотезы в этом случае $M(c)^*_{an} \neq M(c)^*_{san}$.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА I. Если выполнено (I), то $\exists \tau < 2$ такое, что

$$\frac{S_{n_1} + S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leq \tau \quad \text{для } \forall n_1, n_2 \in N. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a = \inf\{\frac{S_{2n}}{S_n} : n \in N\}$. Так как $S_{2n} > S_n$ для $\forall n$ и выполнено (I), то $a > 1$. Заметим, что

$$\frac{S_{n_1} + S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} < 2 \quad \text{для } \forall n_1, n_2 \in N, \tag{5}$$

ибо $S_{n_1} < S_{n_1+n_2}$, $S_{n_2} < S_{n_1+n_2}$. Далее,

$$\frac{S_{n_1} + S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leq \frac{2}{a}, \quad \text{если } n_1 + n_2 \text{ четное.} \tag{6}$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{S_{n_1} + S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leq \frac{2S_{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}{S_{n_1+n_2}} = \frac{2}{\frac{S_{n_1+n_2}}{S_{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}} \leq \frac{2}{a}.$$

Допустим, что требуемого τ не существует. Тогда найдутся последовательности $n_1^{(K)}, n_2^{(K)} \in N$ ($K \in N$) такие, что

$$\frac{S_{n_1^{(K)}} + S_{n_2^{(K)}}}{S_{n_1^{(K)} + n_2^{(K)}}} \xrightarrow[K \to \infty]{} 2. \tag{7}$$

Из (5) следует, что $n_1^{(K)} + n_2^{(K)} \xrightarrow[K \to \infty]{} \infty$. Можно считать, что $n_2^{(K)} \xrightarrow[K \to \infty]{} \infty$. Ясно, что замена $n_2^{(K)}$ на $n_2^{(K)} + 1$ не нарушит справедливости (7), поэтому можно считать, что $n_1^{(K)} + n_2^{(K)}$ есть чётное число для $\forall K \in N$. Но тогда (7) противоречит (6). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если выполнено (2), то существует строго возрастающая последовательность $m_k \in N$ $(k \in N)$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{km_k}}{S_{m_k}} = 1. \qquad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\forall k \geqslant 3$ имеем

$$\frac{S_{kn}}{S_n} = \frac{S_n + (S_{2n} - S_n) + (S_{3n} - S_{2n}) + \dots + (S_{kn} - S_{(k-1)n})}{S_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_n + (k-1)(S_{2n} - S_n)}{S_n} = \frac{(k-1)\, S_{2n}}{S_n} + 2 - k,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{kn}}{S_n} \leqslant k-1+2-k = 1.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{kn}}{S_n} = 1 \qquad \forall k \in N.$$

Отсюда, очевидно, немедленно вытекает требуемое. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Пусть x, $y \in M(c)_+$, $x d y$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Пусть ξ, η – непустые, непересекающиеся, конечные подмножества в N, состоящие из n_1 и n_2 элементов соответственно. Используя лемму I, находим

$$\frac{\sum_{i\in\xi} x_i + \sum_{i\in\eta} y_i}{S_{n_1+n_2}} = \frac{S_{n_1}}{S_{n_1+n_2}} \cdot \frac{\sum_{i\in\xi} x_i}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \cdot \frac{\sum_{i\in\eta} y_i}{S_{n_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_{n_1}}{S_{n_1+n_2}} \cdot 1 + \frac{S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \cdot 1 = \frac{S_{n_1} + S_{n_2}}{S_{n_1+n_2}} \leqslant \tau.$$

Тем самым $\|x+y\| \leqslant \tau$. Итак, $M(c)$ квазиравномерно выпукло. В силу теоремы 3 из [4] заключаем, что $M(c)^*$ есть KB-пространство. Из предложения I теперь следует, что $M(c)^*_{an} = M(c)^*_{san}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Фиксируем последовательность $\{m_k\}$ из леммы 2. Фиксируем также какой-нибудь $F \in (\ell^\infty)^*_+$ такой, что $\|F\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$, $F(c_0) = \{0\}$.

Пусть $\xi \in \mathcal{P}$. Через ξ_1 обозначаем наименьший элемент в ξ, ξ_2 – наименьший элемент в $\xi \setminus \{\xi_1\}$, ..., ξ_{k+1} – наименьший элемент в $\xi \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$.

Пусть ξ, $\eta \in \mathcal{P}_\infty$, $n \in N$. Через $a(\xi, \eta; n)$ будем обозначать число элементов множества $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \cap \eta$. Будем писать $\xi \gg \eta$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{a(\xi,\eta;n)}}{S_n} = 0, \qquad (9)$$

причем полагаем $S_0 = 0$.

ЛЕММА 3.

а) Пусть ξ, $\eta \in \mathcal{P}_\infty$. Тогда существует $\zeta \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\zeta \subset \eta$ и $\xi \gg \zeta$.

б) Пусть ξ, η, $\zeta \in \mathcal{P}_\infty$. Если $\xi \gg \eta$, $\zeta \setminus \eta \in \mathcal{P}_0$, то $\xi \gg \zeta$.

в) Пусть ξ, η, $\zeta \in \mathcal{P}_\infty$, $\xi \gg \eta$, $\xi \gg \zeta$. Тогда $\xi \gg \eta \cup \zeta$.

г) Пусть ξ, $\xi^n \in \mathcal{P}_\infty$ $(n \in N)$. Тогда существует $\eta \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta \subset \xi$ и $\xi^n \gg \eta$ для $\forall n \in N$.

Действительно, справедливость а) и б) прямо следует из того, что $C_n \to 0$, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Доказываем в). Так как, очевидно $a(\xi, \eta \cup \zeta; n) \leqslant a(\xi, \eta; n) + a(\xi, \zeta; n)$, то $S_{a(\xi,\eta\cup\zeta;n)} \leqslant S_{a(\xi,\eta;n)} + S_{a(\xi,\zeta;n)}$, отсюда вытекает требуемое. Доказываем г). В силу а) найдется $\eta^1 \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta^1 \subset \xi$ и $\xi^1 \gg \eta^1$; найдется $\eta^2 \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta^2 \subset \eta^1$ и $\xi^2 \gg \eta^2, \dots$, найдется $\eta^{n+1} \in \mathcal{P}_\infty$ такое, что $\eta^{n+1} \subset \eta^n$ и $\xi^{n+1} \gg \eta^{n+1}$. Возьмем теперь произвольные $k_n \in \eta^n$ $(n \in N)$ так, что $k_n < k_{n+1}$ для $\forall n \in N$. Ясно, что множество $\eta = \{k_n : n \in N\}$ требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть ω_1 – первый несчетный ординал и пусть задано семейство $\{\xi^\alpha \in \mathcal{P}_\infty : \alpha < \omega_1\}$. Тогда существует семейство $\{\eta^\alpha \in \mathcal{P}_\infty : \alpha < \omega_1\}$, удовлетворяющее условиям:

$$\eta^\alpha \subset \xi^\alpha \ \text{ при всех } \alpha<\omega_1, \tag{10}$$

$$\eta^\alpha \gg \eta^\beta \ \text{ при всех } \alpha<\beta<\omega_1. \tag{11}$$

Несложное доказательство леммы 4 опускаем; требуемое семейство легко строится методом трансфинитной индукции с помощью леммы 3, г).

Введем следующие обозначения. Пусть $x\in M(c)$, $\xi\in\mathcal{P}_\infty$, $k\in N$. Положим $\mathcal{D}(x,\xi,k)=\frac{1}{S_{m_k}}\cdot\sum_{i=1}^{m_k} x_{\xi_i}$.

Заметим, что

$$|\mathcal{D}(x,\xi,k)|\le\|x\|. \tag{12}$$

Для $\xi\in\mathcal{P}_\infty$ через F^ξ обозначаем функционал на $M(c)$, действующий по формуле

$$F^\xi(x)=F(\{\mathcal{D}(x,\xi,k)\}_{k\in N}),\quad x\in M(c).$$

Ясно, что

$$0<F^\xi\in M(c)^*_{an},\quad \|F^\xi\|_{M(c)^*}=1. \tag{13}$$

ЛЕММА 5.

а) Пусть $\xi,\eta\in\mathcal{P}_\infty$, $\xi\cap\eta=\emptyset$. Тогда $F^\xi d F^\eta$.

б) Пусть $\xi^1,\dots,\xi^n\in\mathcal{P}_\infty$ — любой конечный набор попарно непересекающихся множеств. Тогда

$$\Big\|\sum_{\beta=1}^n F^{\xi^\beta}\Big\|\le 1. \tag{14}$$

в) Пусть $\xi,\eta\in\mathcal{P}_\infty$, $\xi\gg\eta$. Тогда $F^\xi=F^{\xi\setminus\eta}$ и $F^\xi d F^\eta$.

г) Пусть $\xi^1,\dots,\xi^n\in\mathcal{P}_\infty$, причем $\xi^i\gg\xi^j$ при $i<j$. Тогда справедливо (14).

Доказываем лемму 5. Утверждение а) очевидно. Докажем б). Пусть $x=\{x_k\}\in M(c)_+$, $\|x\|\le 1$. Для $\forall k\in N$, $k\ge n$, имеем

$$\sigma_k \overset{def}{=} \sum_{\beta=1}^n \mathcal{D}(x,\xi^\beta,k)\le \frac{1}{S_{m_k}}\cdot\sum_{i=1}^{nm_k} x_i^* = \frac{S_{nm_k}}{S_{m_k}}\cdot\frac{1}{S_{nm_k}}\cdot\sum_{i=1}^{nm_k}x_i^*\le$$

$$\le \frac{S_{nm_k}}{S_{m_k}}\cdot\|x\|\le\frac{S_{km_k}}{S_{m_k}}.$$

Отсюда

$$\sum_{\beta=1}^n F^{\xi^\beta}(x)\le \varlimsup_{k\to\infty}\sigma_k\le\lim_{k\to\infty}\frac{S_{km_k}}{S_{m_k}}=1.$$

Докажем в). Для $x=\{x_k\}\in M(c)_+$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_{\xi_i} = \sum_{i=1}^{m_k-a(\xi,\eta;m_k)} x_{(\xi\setminus\eta)_i}+G(k), \tag{15}$$

где $G(k)$ состоит из $a(\xi,\eta;m_k)$ слагаемых, в силу чего

$$|G(k)|\le\sum_{i=1}^{a(\xi,\eta;m_k)}x_i^*\le\|x\|\cdot S_{a(\xi,\eta;m_k)}. \tag{16}$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{m_k}x_{(\xi\setminus\eta)_i}=\sum_{i=1}^{m_k-a(\xi,\eta;m_k)}x_{(\xi\setminus\eta)_i}+H(k), \tag{17}$$

где

$$|H(k)|\le\sum_{i=1}^{a(\xi,\eta;m_k)}x_i^*\le\|x\|\cdot S_{a(\xi,\eta;m_k)}. \tag{18}$$

Из (15) - (18) находим

$$|\mathcal{D}(x,\xi,k)-\mathcal{D}(x,\xi\setminus\eta,k)|\le 2\|x\|\cdot\frac{S_{a(\xi,\eta;m_k)}}{S_{m_k}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

откуда $F^\xi(x)=F^{\xi\setminus\eta}(x)$. Остаётся применить а). Докажем г). Положим для $i=1,\dots,n$ $\eta^i=\xi^i\setminus\bigcup_{i<j\le n}\xi^j$. Так как $\xi^i\gg\bigcup_{i<j\le n}\xi^j$ в силу леммы 3 в), то $F^{\xi^i}=F^{\eta^i}$. Так как мно-

жества η^i попарно не пересекаются, то остаётся применить уже доказанное утверждение б). Лемма 5 доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 2. В силу теоремы Серпинского [3, стр.8I] существует семейство $\{\xi^\tau\in\mathcal{P}_\infty:\tau\in[0,1]\}$ такое, что $\xi^{\tau_1}\cap\xi^{\tau_2}\in\mathcal{P}_0$ при $\tau_1\neq\tau_2$. В силу леммы 3 б) имеем $\xi^{\tau_1}\geqslant\xi^{\tau_2}$ при $\tau_1\neq\tau_2$. Из леммы 5 в) следует, что $F^{\xi^{\tau_1}}\, d\, F^{\xi^{\tau_2}}$ при $\tau_1\neq\tau_2$. Кроме того, для любого конечного множества $\tau_1,\dots,\tau_n\in[0,1]$, $\tau_i\neq\tau_j$ при $i\neq j$, имеем

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} F^{\xi^{\tau_i}}\Big\|\leqslant 1$$

в силу леммы 5 г). Для $y\in l^\infty_{[0,1]}$ построим $Ry\in M(c)^*$ по формуле

$$(Ry)(x)=\sum_{\tau\in[0,1]} y(\tau)\,F^{\xi^\tau}(x),\quad x\in M(c).$$

Ясно, что R есть решеточный изоморфизм и изометрия пространства $l^\infty_{[0,1]}$ на некоторую векторную подрешетку в $M(c)^*$.

В предположении справедливости континуум-гипотезы существует взаимно-однозначное отображение $\alpha\to\xi^\alpha$ множества всех ординалов меньших ω_1 на $\mathcal{P}_\infty$. Пусть $\{\eta^\alpha\in\mathcal{P}_\infty:\alpha<\omega_1\}$ есть семейство из леммы 4, удовлетворяющее условиям (I0) и (II). Положим

$$f(x)=\sum_{\alpha<\omega_1} F^{\eta^\alpha}(x),\quad x\in M(c).$$

Ясно, что $f\in M(c)^*_{an}$ удовлетворяет (3). Теорема 2 доказана.

4. Об одном результате Джонсона

В этом пункте будет получен один результат, не связанный с пространствами Марцинкевича, но доказательство которого основано на той же идее, что и доказательство теоремы 2.

Пусть для $n\in N$ l^1_n есть n-мерное вещественное арифметическое пространство с нормой

$$\|x\|_{l^1_n}=|x_1|+\dots+|x_n|,\quad \text{где } x=(x_1,\dots,x_n)\in l^1_n.$$

Рассматриваем пространство $X=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\, l^1_n\right)_{l^\infty}$, состоящее из всех $x=\{x^n\}_{n\in N}$, где $x^n\in l^1_n$ таких, что

$$\|x\|_X=\sup_n\|x^n\|_{l^1_n}<\infty .$$

Джонсон [5, стр.I0I] доказал, что X^* содержит подпространство изоморфное пространству l^∞. Мы докажем более сильный результат.

ТЕОРЕМА 3. Пространство X^* содержит замкнутую линейную подрешетку, изоморфную и изометричную пространству $l^\infty_{[0,1]}$. При этом $X^*_{an}=X^*_{san}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

ЛЕММА 6. Пусть A_n $(n\in N)$ – последовательность непустых попарно непересекающихся конечных или бесконечных множеств, причём $\lim_{n\to\infty} r_n=0$, где r_n есть число элементов множества A_n. Тогда существует семейство $\{A^t_n:n\in N,\ t\in[0,1]\}$, обладающее следующими свойствами:

а) $\emptyset\neq A^t_n\subset A_n$ для $\forall n\in N$ $\forall t\in[0,1]$;

б) для любых $t_1\neq t_2$ из $[0,1]$ существует $n_0=n_0(t_1,t_2)$ такое, что

$$A^{t_1}_n\cap A^{t_2}_n=\emptyset \quad \text{для } \forall n>n_0 .$$

Доказательство этой леммы, аналогичное доказательству теоремы Серпинского о почти дизъюнктном разбиении натурального ряда [3, стр.8I], мы опускаем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Для $n\in N$ положим $A_n=\{(n,1),(n,2),\dots,(n,n)\}$ и построим семейство $\{A^t_n\}$ согласно лемме 6. Возьмём произвольный $x=\{x^n\}\in X$, где $x^n=(x^n_1,\dots,x^n_n)\in l^1_n$, и положим

$$\mathcal{D}(x,t,n)=\sum_{(n,q)\in A^t_n} x^n_q ,$$

где $n \in N$, $t \in [0,1]$.

Фиксируем какой-нибудь $F \in (\ell^\infty)^*_+$ такой, что $\|F\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$, $F(c_0) = \{0\}$. Для $t \in [0,1]$ построим теперь функционал F_t по формуле $F_t(x) = F(\{\mathcal{D}(x,t,n)\}_{n \in N})$, $x \in X$. Ясно, что $0 < F_t \in X^*_{an}$, $\|F_t\|_{X^*} = 1$. Кроме того, $F_{t_1}\, d\, F_{t_2}$ при $t_1 \neq t_2$ и для любого непустого конечного множества $T \subset [0,1]$ справедливо

$$\Big\|\sum_{t \in T} F_t\Big\|_{X^*} = 1.$$

Для $y \in \ell^\infty_{[0,1]}$ построим $Ry \in X^*$ по формуле

$$(Ry)(x) = \sum_{t \in [0,1]} y(t) F_t(x), \quad x \in X.$$

Ясно, что R есть решеточный изоморфизм и изометрия пространства $\ell^\infty_{[0,1]}$ на некоторую векторную подрешетку в X^*.

Наконец, равенство $X^*_{an} = X^*_{san}$ прямо вытекает из следующего очевидного факта: каждая $K \in E_\infty(X)$ содержит такую $K_1 \in E_\infty(X)$, что K_1 изоморфна и изометрична пространству ℓ^∞. Теорема доказана.

Литература

1. ЛОЗАНОВСКИЙ Г.Я. О локализованных функционалах в векторных структурах. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 19, 1974, с. 66-80.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
3. SIERPINSKI W., Cardinal and Ordinal numbers. PWN, Warszawa, 1965.
4. АБРАМОВИЧ Ю.А., ЛОЗАНОВСКИЙ Г.Я. О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов. - "Матем. заметки", т.14, № 5, 1973, с. 723-732.
5. LINDENSTRAUSS J., TZAFRIRI L. Classical Banach space. - In.: Lecture Notes in Math., 1973, 338.

Поступила в ред.-изд. отд.

28. II. 1975 г.

ПРАВИЛА ПОДГОТОВКИ РУКОПИСИ ДЛЯ ФОРМАТА ИЗДАНИЯ 60x84 1/16

При подготовке рукописи для издания на ротапринте автор должен руководствоваться следующими правилами:

1. Рукопись должна быть отпечатана в 2 идентичных экземплярах (первом - на мелованной бумаге форматом 30x21 см; втором - копии через копировальную бумагу) на пишущей машинке типа "Оптима", с чистым шрифтом, черной лентой средней жирности, через 1,5 интервала только на одной стороне листа.

2. Полная текстовая полоса форматом 16,2x25,1 см должна содержать 38 строк по 62 удара в каждой строке, включая и пробелы; 39-я строка-пробельная, на 40-й строке посередине проставляется номер страницы (колонцифра); поля: слева - 3 см; справа - 1 см; сверху и снизу - по 2,5 см. Все страницы от первой до последней должны быть пронумерованы.

3. Первая страница текста печатается со спуском в 10 строк, на 5-й строке спуска справа ставится индекс УДК, на 10-й строке заглавными буквами печатается заголовок статьи; отступив от него одну строку, печатают и.о.ф. автора, а через 2 строки от фамилии с абзацным отступом в 3 удара печатают текст статьи.

4. Текст теорем, лемм, предложений, следствий печатают вразрядку малыми буквами, сами же слова: теорема, лемма, предложение и т.д. - заглавными буквами без разрядки.

5. Каждый заголовок новой части, главы, параграфа отделяется от предыдущего текста двумя пробельными строками, а от последующего - одной строкой и печатается малыми буквами без разрядки.

6. Прежде чем приступить к вписыванию в рукопись формул и буквенных выражений, автор должен внимательно изучить стандарты научно-технической символики и образцы их правильного начертания.

а) Все символы и обозначения должны быть вписаны черной тушью ясно и четко: высота заглавных букв равна 6 мм, строчных - 4 мм, индексов - 2,5 - 3 мм. Во избежание путаницы прописные буквы рекомендуется вписывать в печатном начертании, знаки математических соотношений - прямым шрифтом.

б) Таблицы, рисунки, графики вычерчиваются внутри текстовой полосы, если они не превышают ее формата, в противном случае вычерчиваются на отдельных листах. Толщина контурных и штриховых линий должна быть соответственно 0,8 и 0,4 мм.

Общее требование к оригиналу-макету будущего издания - предельно четкое написание текста, надписей, цифровых и буквенных обозначений в соответствии с заданным форматом и соблюдением единого стиля на протяжении всей рукописи.

Редколлегия

Бухвалов А.В., Лозановский Г.Я.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЭТИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ПРЕПРИНТ

НОВОСИБИРСК • 1975

А.В.Бухвалов, Г.Я.Лозановский

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЭТИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ I. Основные свойства идеальных пространств

<1> Многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются идеальными пространствами (пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича, со смешанной нормой). Теория таких пространств является ветвью общей теории векторных (банаховых) решеток, основы которой были построены в тридцатых годах Л.В.Канторовичем. Многие результаты, которые в настоящем обзоре будут приведены только для случая идеальных пространств, справедливы на самом деле для существенно более широких классов банаховых решеток. Мы сознательно жертвуем здесь общностью формулировок, так как хотим свести к минимуму использование терминологии абстрактной теории векторных решеток. По

этой же причине мы ограничиваемся случаем σ - конечной меры.

Всюду далее (T, Σ, μ) (возможно с индексами) есть пространство с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой, $S = S(\mu)$ - пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (эквивалентные по мере μ функции и множества отождествляются). Для $E \in \Sigma$ через χ_E обозначается характеристическая функция E. Для $x \in S$ полагаем $supp\, x = \{t \in T : x(t) \neq 0\}$. Для любого $A \subset S$ $supp\, A$ означает наименьшее $E \in \Sigma$, содержащее $supp\, x$ для каждого $x \in A$. Пусть $x, y \in S$. Запись $x \geq y$ означает, что $x(t) \geq y(t)$ для почти всех $t \in T$. Символы $x \vee y$, $x \wedge y$ определяются формулами $(x \vee y)(t) = max\{x(t), y(t)\}$, $(x \wedge y)(t) = min\{x(t), y(t)\}$, $t \in T$. Напомним, что S есть полная векторная решетка (K-пространство), то есть, что каждое порядково ограниченное $A \subset S$ имеет супремум $(sup\, A)$ и инфимум $(inf\, A)$. Элементы $x, y \in S$ называются дизъюнктными (обозначение: $x\, d\, y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Под (μ)-топологией на S понимается топология сходимости по мере μ, которая может быть задана с помощью метрики $\rho(x,y) = \int \frac{|x-y|}{1+|x-y|} u\, d\mu$, $x, y \in S$; здесь u - любая функция такая, что $u > 0$, $u \in L^1(\mu)$, $supp\, u = T$. Запись $x_n \xrightarrow{(\mu)} x$ $(x_n, x \in S)$ означает, что последовательность $x_n \to x$ в (μ)-топологии. Запись $x_n \downarrow$ означает, что $x_n \geq x_m$ при $n \leq m$. Запись $x_n \downarrow x$ означает, что $x_n(t) \downarrow x(t)$ п.в. Подобным же образом определяется $x_n \uparrow$ и $x_n \uparrow x$.

Идеальным пространством (и.п.) на (T, Σ, μ) называется векторное подпространство X в S такое, что $(x \in X, y \in S, |y| \leq |x|) \Rightarrow (y \in X)$.

Норма $\|\cdot\|$ на и.п. X называется монотонной, если $(x, y \in X, |x| \leq |y|) \Rightarrow (\|x\| \leq \|y\|)$.

Нормированным (банаховым) идеальным пространством на (T, Σ, μ) (соответственно н.и.п. и б.и.п.) называется и.п. на (T, Σ, μ), снабженное монотонной (монотонной банаховой) нормой.

Таким образом, и.п. является порядково полной векторной решеткой (K-пространством), н.и.п. (соответственно б.и.п.) является порядково полной нормированной (соответственно бана-

ховой) решеткой. Отметим, что любые две монотонные банаховы нормы на одном и том же и.п. эквивалентны.

<2> ТЕОРЕМА I.2.I. Пусть X есть б.и.п. на (T, Σ, μ), причем $supp\, X = T$. Если $\mu(T) < \infty$, то существует $u \in S$ такое, что

$$L^\infty(\mu) \subset \{xu : x \in X\} \subset L^1(\mu).$$

Эта теорема показывает, что если $\mu(T) < \infty$, то б.и.п. на (T, Σ, μ) всегда можно считать "зажатым" между $L^\infty(\mu)$ и $L^1(\mu)$.

<3> Пусть X есть и.п. на (T, Σ, μ). Аддитивный и однородный функционал f на X называется порядково ограниченным (или регулярным), если он ограничен на каждом порядковом интервале из X, т.е. на каждом множестве вида $\{z \in X : x \leq z \leq y\}$, где $x, y \in X$, $x \leq y$. Пространство $X^\sim$ всех порядково ограниченных функционалов на X при естественном упорядочении есть K-пространство, т.е. полная векторная решетка.

Функционал $f \in X^\sim$ называется порядково непрерывным (или вполне линейным), если $(x_n \in X, x_n \downarrow 0) \Rightarrow (f(x_n) \to 0)$.

Функционал $f \in X^\sim$ называется сингулярным (или анормальным), если $supp\{x \in X : |f|(|x|) = 0\} = supp\, X$.

Совокупность $X_n^\sim$ всех порядково непрерывных и совокупность $X_s^\sim$ всех сингулярных функционалов на X суть дополнительные друг к другу полосы (компоненты) в K-пространстве $X^\sim$. Тем самым каждый $f \in X^\sim$ однозначно представим в виде $f = f_n + f_s$, где $f_n \in X_n^\sim$, $f_s \in X_s^\sim$.

Если X есть н.и.п., то $X^* \subset X^\sim$; если X есть б.и.п., то $X^* = X^\sim$. Здесь X^* - банахово сопряженное к X; X^* есть порядково полная банахова решетка. Пусть по-прежнему X есть и.п. на (T, Σ, μ).

ТЕОРЕМА I.3.I. а) Каждая полоса в $X^\sim$ секвенциально замкнута в топологии $\sigma(X^\sim, X)$;

б) Если $X^\sim$ разделяет точки из X, то топология Макки $\tau(X, X^\sim)$ может быть задана набором монотонных полунорм;

в) Если $X_n^\sim$ разделяет точки из X, то каждый порядковый интервал в X компактен в топологии $\sigma(X, X_n^\sim)$, а топология Макки $\tau(X, X_n^\sim)$ может быть задана набором монотонных полунорм.

<4> Пусть по-прежнему X есть и.п. на (T, Σ, μ). Дуальное и.п. к X определяется формулой

$$X' = \{x' \in S : supp\, x' \subset supp\, X,\ xx' \in L^1(\mu) \text{ для } \forall x \in X\}$$

По каждому $x' \in X'$ можно построить $f_{x'} \in X_n^\sim$ по формуле

$$f_{x'}(x) = \int_T x x' d\mu, \quad x \in X.$$

ТЕОРЕМА I.4.I. Отображение $x' \to f_{x'}$ есть векторно-решеточный изоморфизм X' на $X_n^\sim$.

Пусть теперь $supp\, X' = supp\, X$. Тогда $X \subset X''$, $X''' = X'$. Если $X'' = X$, то X называется (o)-рефлексивным (или рефлексивным по Накано).

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть н.и.п. на (T, Σ, μ). Норма Лоренца $\|\cdot\|_L$ на X определяется формулой

$$\|x\|_L = \inf\{\lim_{n\to\infty} \|x_n\| : \{x_n\} \subset X,\ 0 \leq x_n \uparrow |x|\},\ x \in X.$$

$\|\cdot\|_L$ есть монотонная норма на X.

Положим $X^\times = \{x' \in X' : f_{x'} \in X^*\}$. Для $x' \in X^\times$ полагаем $\|x'\|^\times = \sup\{|f_{x'}(x)| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$. $\|\cdot\|^\times$ есть монотонная норма на $X^\times$.

ТЕОРЕМА I.4.2. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть н.и.п. на (T, Σ, μ). Тогда $supp\, X' = supp\, X^\times = supp\, X$ (тем самым $X^* \cap X_n^\sim$ разделяет точки из X). Кроме того, $\|x\|_L = \|x\|^{\times\times}$ для любого $x \in X$.

$\not\equiv$ привилм

Если $(X, \|\cdot\|)$ есть б.и.п., то $X^\times = X'$; в этом случае вместо $\|\cdot\|^\times$ будем писать $\|\cdot\|'$ и называть норму $\|\cdot\|'$ дуальной к норме $\|\cdot\|$.

ТЕОРЕМА I.4.3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть б.и.п. на (T, Σ, μ), причем $supp\, X = T$. Тогда а) для любых $x \in X$, $x' \in X'$ справедливо $\int_T |xx'| d\mu \leq \|x\| \cdot \|x'\|'$;

б) для любого $h \in L^1(\mu)$ справедливо

$$\inf\{\|x\| \cdot \|x'\|' : x \in X,\ x' \in X',\ xx' = h\} = \int_T |h| d\mu.$$

<5> ТЕОРЕМА I.5.I. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — н.и.п. на (T, Σ, μ), причем полнота по норме не предполагается.

а) Если $x_n \in X$, $\|x_n\| \to 0$, то $x_n \xrightarrow{(\mu)} 0$. Тем самым оператор вложения X в S непрерывен;

б) если $\{x_n\} \subset X$ есть последовательность Коши, то она (μ)-сходится к некоторому $x \in S$.

ТЕОРЕМА I.5.2. Для любого н.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ на (T, Σ, μ) следующие утверждения эквивалентны:

(а) $(X, \|\cdot\|)$ полно по норме;

(б) если $x_n \in X_+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$;

(в) если $x_n \in X_+$, $x_n d x_m$ при $n \neq m$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$.

<6> В теории нормированных решеток важную роль играют свойства (o)-непрерывности, (o)-полунепрерывности и монотонной полноты нормы. Мы приведем эти свойства применительно к н.и.п., но в случае произвольных нормированных решеток они определяются аналогично.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть н.и.п. на (T, Σ, μ). Говорят, что элемент $x \in X$ имеет (o)-непрерывную (или абсолютно непрерывную) норму, если $(|x| \geq x_n \downarrow 0) \Longrightarrow (\|x_n\| \to 0)$. Если $\mu(T) < \infty$, то $x \in X$ имеет (o)-непрерывную норму тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $(E \in \Sigma,\ \mu E < \delta) \Longrightarrow (\|x \chi_E\| < \varepsilon)$.

Множество $X_{(A)}$ всех $x \in X$ с (o)-непрерывной нормой есть и.п.; $X_{(A)}$ замкнуто в $(X, \|\cdot\|)$.

Говорят, что в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (A) (условие (o)-непрерывности нормы), если $X = X_{(A)}$, т.е. если каждый $x \in X$ имеет (o)-непрерывную норму.

ТЕОРЕМА I.6.I. Для любого б.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (A);

(2) если $x_n \downarrow 0$ в X и $(x_n - x_{n+1}) d x_{n+1}$ для $\forall n$,

то $\|x_n\| \to 0$;

(3) $X^{*} = X_n^{\sim}$;

(4) каждый порядковый интервал в X слабо компактен;

(5) в X выполнено условие (u) Пелчинского: для каждой слабо фундаментальной последовательности $x_n \in X$ существует такая последовательность $y_n \in X$, что $\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty$ для $\forall f \in X^*$ и последовательность

$$x_j - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

слабо сходится к нулю;

(6) в X не существует подпространства изоморфного ℓ^{∞};

(7) для $\forall x \in X\ \exists x' \in X'$ такой, что $\|x'\|' = 1$ и $\|x\| = \int_T x x' \, d\mu$;

(8) $supp\, X_{(A)} = supp\, X$ и существует проектор из X на $X_{(A)}$;

(9) при естественном вложении X в X^{**} X оказывается идеалом в X^{**};

Если мера μ сепарабельна, то каждое из условий (I)-(9) эквивалентно условию

(10) X - сепарабельно.

ТЕОРЕМА I.6.2. Для любого б.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ справедливо $(X'')_{(A)} = X_{(A)}$ и $\|x\|'' = \|x\|$ для $\forall x \in X_{(A)}$.

<7> Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть н.и.п. на (T, Σ, μ). Говорят, что элемент $x \in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму, если $(0 \leq x_n \uparrow |x|) \Rightarrow (\|x_n\| \to \|x\|)$, т.е. если $\|x\|_L = \|x\|$, где $\|\cdot\|_L$ - норма Лоренца. Если $\mu(T) < \infty$, то $x \in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $(E \in \Sigma,\ \mu(T \setminus E) < \delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\|x \chi_E\| > \|x\| - \varepsilon)$

Говорят, что в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (C) (условие (o)-полунепрерывности нормы), если каждый $x \in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму. Ясно, что $(A) \Rightarrow (C)$.

ТЕОРЕМА I.7.I. Если в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено (C), то каждая порядково ограниченная последовательность Коши в X сходится.

ТЕОРЕМА I.7.2. Для любого н.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ следующие утверждения эквивалентны:

(I) в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (C);

(2) если $x_n \in X$, $\|x_n\| \leq 1$ для $\forall n$, $x_n \xrightarrow{(\mu)} x \in X$, то $\|x\| \leq 1$;

(3) $\|x\| = \|x\|^{xx}$ для $\forall x \in X$;

(4) для $\forall x \in X_+\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in X_+\ \exists y^x \in X^x_+$ такие, что $(1-\varepsilon) x \leq y \leq (1+\varepsilon) x$, $\|y^x\|^x = 1$, $\|y\| = \int_T y y^x \, d\mu$.

<8> Говорят, что в н.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (B) (условие монотонной полноты нормы), если $(0 \leq x_n \uparrow$, $\sup \|x_n\| < \infty) \Rightarrow (\sup x_n \in X)$.

ТЕОРЕМА I.8.I. Пусть в н.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ выполнено условие (B). Тогда а) $(X, \|\cdot\|)$ полно по норме;

б) $X = X''$ и $\|\cdot\|$ эквивалентна $\|\cdot\|''$.

ТЕОРЕМА I.8.2. Для любого н.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ следующие утверждения эквивалентны:

(I) в $(X, \|\cdot\|)$ выполнено (B);

(2) если $0 \leq x_n \uparrow (x_n \in X)$, $(x_{n+1} - x_n) d x_n$ для $\forall n$, $\sup \|x_n\| < \infty$, то $\sup x_n \in X$;

(3) существует константа $c > 0$ такая, что если $x_n \in X$, $\|x_n\| \leq 1$ для $\forall n$, $x_n \xrightarrow{(\mu)} x \in S$, то $x \in X$ и $\|x\| \leq c$;

(4) $X = X^{xx}$ по запасу элементов.

<9> Особый интерес представляет конъюнкция свойств (B) и (C).

ТЕОРЕМА I.9.I. Для любого н.и.п. $(X, \|\cdot\|)$ следующие утверждения эквивалентны:

(I) в $(X, \|\cdot\|)$ выполнены условия (B) и (C);

(2) единичный шар $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ (μ) - замкнут в S;

(3) $X = X^{xx}$ и $\|\cdot\| = \|\cdot\|^{xx}$

(4) любая центрированная система замкнутых шаров в X имеет непустое пересечение;

(5) X - банахово и существует проектор единичной нормы из X^{**} на X (при естественном вложении X в X^{**}).

Теорема I.9.2 дополняет теорему I.4.3.

ТЕОРЕМА I.9.2. Пусть в б.и.п. $(X, \| \cdot \|)$ выполнены условия (B) и (C) и $supp\, X = T$. Тогда для $\forall h \in L^1(\mu)\ \exists x \in X$ $\exists x' \in X'$, такие, что $h = x x'$ и $\|x\| \, \|x'\| = \int_T |h| \, d\mu$.

ТЕОРЕМА I.9.3. Для любого н.и.п. $(X, \| \cdot \|)$ в $(X^*, \| \cdot \|^*)$ и $(X^x, \| \cdot \|^x)$ выполнены условия (B) и (C).

< 10 > KB-пространством (или пространством Канторовича-Банаха) называется н.и.п., в котором выполнены условия (A) и (B). KB-пространство всегда полно по норме.

ТЕОРЕМА I.10.I. Для любого б.и.п. $(X, \| \cdot \|)$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) X есть KB-пространство;

(2) X слабо секвенциально полно;

(3) при естественном вложении X в X^{**} X оказывается полосой (компонентой) в X^{**};

(4) в X нет подпространств, изоморфных пространству c_0.

< 11 > ТЕОРЕМА I.II.I. Для любого б.и.п. X следующие утверждения эквивалентны:

(1) X рефлексивно;

(2) X есть KB-пространство и X^* есть KB-пространство;

(3) X есть KB-пространство и в X' выполнено условие (A);

(4) X' рефлексивно;

(5) в X не существует подпространства, изоморфного c_0, и не существует подпространства, изоморфного ℓ^1.

< 12 > Остановимся кратко на одном важном классе б.и.п. – симметричных пространствах, теория которых в настоящее время очень интенсивно развивается, особенно в связи с задачами интерполяции операторов. Для простоты ограничимся случаем пространств на отрезке $[0,1]$.

Итак, пусть (T, Σ, μ) есть отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега. Б.и.п. X на $[0,1]$ называется симметричным, если $(x \in X,\ y \in S,\ x$ и y равноизмеримы$) \Rightarrow (y \in X$ и $\|x\| = \|y\|)$. Для любого симметричного X справедливо $L^\infty \subset X \subset L^1$.

ТЕОРЕМА I.12.I. Пусть X – симметричное пространство на $[0,1]$. Дуальное пространство X' также симметрично. Если $X \neq L^\infty$, то $X_{(A)}$ совпадает с замыканием L^∞ в X. Если $X \neq X_{(A)}$, то не существует проектора из X на $X_{(A)}$ и $X_{(A)}$ не изоморфно сопряжённому банахову пространству.

Многие свойства симметричного пространства X зависят от его фундаментальной функции φ, где

$$\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|, \quad t \in [0,1].$$

К числу симметричных пространств относятся классические пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича.

Приведём определения пространств Лоренца и Марцинкевича, которые в классе симметричных пространств играют важную "экстремальную" роль. Для $x \in S[0,1]$ через x^* обозначается невозрастающая перестановка функции $|x|$.

Пусть ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0,1]$ функция такая, что $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ при $t > 0$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\psi(t)} = 0.$$

Пространство $M(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0,1]$ таких, что

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h\leq 1} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(t)\, dt < \infty.$$

Пространство $\Lambda(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0,1]$ таких, что

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^* \, d\psi < \infty.$$

Эти пространства и их нормы дуальны друг к другу.

< 13 > Остановимся более подробно на строении пространства $X^\sim_s$, где X есть и.п. на (T, Σ, μ).

Для $f \in X^\sim$, $E \in \Sigma$ определим функционал $f_E \in X^\sim$ формулой

$$f_E(x) = f(x \chi_E), \quad x \in X.$$

Функционал $f \in X^\sim_s$ называется локализованным, если для $\forall F \in \Sigma$ с $\mu(F) > 0$ $\exists E \in \Sigma$, такое, что $E \subset F$, $\mu(E) > 0$ и f_E [illegible]. Совокупность всех локализованных функционалов на X обозначим через $X^\sim_{loc}$. $X^\sim_{loc}$ есть идеал в $X^\sim_s$.

Как отмечено в < 3 >, $X^\sim = X^\sim_n \oplus X^\sim_s$. В приложениях бывает важно иметь равенство $X^{\sim} = X_n^{\sim} \oplus X_{loc}^{\sim}$, т.е. $X_s^{\sim} = X_{loc}^{\sim}$. В случае L^∞, очевидно, имеем $(L^\infty)_{loc}^{\sim} = (L^\infty)_s^{\sim}$, и мы получаем часто используемую теорему Иосиды-Хьюита:

ТЕОРЕМА I.13.I. $(L^\infty)^* = L^1 \oplus (L^\infty)_{loc}^{\sim}$.

Выясним, когда еще $X_s^{\sim} = X_{loc}^{\sim}$

ТЕОРЕМА I.13.2. Пусть X есть и.п., $f \in X_s^{\sim}$. Пусть существует $u \in X_+$ такое, что $|f|(x) = \lim_{n\to\infty} |f|(x \wedge nu)$ для $\forall x \in X_+$. Тогда $f \in X_{loc}^{\sim}$

ТЕОРЕМА I.13.3. Пусть X есть б.и.п., причем X квазиравномерно выпукло (это значит, что существует число $\tau > 0$ такое, что $\|x_1 + x_2\| < 2 - \tau$ для любых $x_1, x_2 \in X_+$ с $\|x_1\| \le 1$, $\|x_2\| \le 1$, $x_1 \, d \, x_2$). Тогда X^* есть KB-пространство и $X_s^{\sim} = X_{loc}^{\sim}$.

Остановимся на двух конкретных пространствах.

ТЕОРЕМА I.13.4. Если X есть произвольное пространство Орлича на $[0,1]$, то $X_s^{\sim} = X_{loc}^{\sim}$.

ТЕОРЕМА I.13.5. Пусть $M(\psi)$ есть пространство Марцинкевича. Тогда

а) если $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$, то $M(\psi)_s^{\sim} = M(\psi)_{loc}^{\sim}$;

б) если $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, то $M(\psi)_s^{\sim} \ne M(\psi)_{loc}^{\sim}$,

более того, в этом случае существует $f \in M(\psi)_s^{\sim}$, $f \ge 0$ такой, что $\|f_E\| = 1$ для $\forall E \in \Sigma$ с $\mu(E) > 0$.

<I4> В этом пункте будут сформулированы результаты о замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций, которые находят приложения, например, в выпуклом анализе. Их доказательства опираются на теорему I.13.I и некоторые факты из теории векторных решеток. Мы для простоты ограничимся случаем пространства $L^1(\mu)$ хотя большая часть изложенного материала допускает обобщение на широкие классы векторных решеток.

Пусть $\pi: L^1(\mu) \to L^1(\mu)^{**}$ оператор естественного вложения. Тогда $\pi(L^1(\mu))$ есть полоса в $L^1(\mu)^{**}$. Обозначим через $\mathcal{P}$ оператор проектирования $(L^1(\mu))^{**}$ на $\pi(L^1(\mu))$ ($\mathcal{P}$ есть

проектор в смысле теории векторных решеток).

ТЕОРЕМА I.14.I. Пусть V - непустое выпуклое множество в $L^1(\mu)$, W - замыкание множества $\pi(V)$ в $L^1(\mu)^{**}$ в топологии $\sigma(L^1(\mu)^{**}, L^1(\mu)^*)$. Тогда

а) если V (μ)-замкнуто в $L^1(\mu)$, то $\mathcal{P}(W) = \pi(V)$;

б) если V ограничено по норме в $L^1(\mu)$ и $\mathcal{P}(W) = \pi(V)$, то V (μ)-замкнуто в $L^1(\mu)$.

СЛЕДСТВИЕ I.14.2. Пусть Z есть и.п. на (T, Σ, μ) такое, что $supp\, Z = T$ и $Z \subset L^\infty(\mu)$ (в частности, можно взять $Z = L^\infty(\mu)$). Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в $L^1(\mu)$, (μ)-замкнутые в $L^1(\mu)$. Если одно из них ограничено по норме в $L^1(\mu)$, то существует $z \in Z$ такое, что

$$\sup\{\int_T xz\,d\mu : x \in V_1\} < \inf\{\int_T xz\,d\mu : x \in V_2\}.$$

СЛЕДСТВИЕ I.14.3. Пусть $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ - центрированная система выпуклых, ограниченных по норме, (μ)-замкнутых подмножеств в $L^1(\mu)$. Тогда $\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi \ne \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ I.14.4. Пусть $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ - центрированная система выпуклых, (μ)-ограниченных, (μ)-замкнутых подмножеств в $S(\mu)$, причем $V_\xi \subset S(\mu)_+$ для $\forall \xi$. Тогда $\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi \ne \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ I.14.5. Пусть V_1, V_2 - выпуклые, ограниченные по норме, (μ)-замкнутые подмножества в $L^1(\mu)$. Тогда

а) множества $V_1 + V_2$ и $conv(V_1 \cup V_2)$ (μ)-замкнуты;

б) $\exists x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ такие, что
$$\|x_1 - x_2\| = \inf\{\|y_1 - y_2\| : y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}.$$

СЛЕДСТВИЕ I.14.6. Пусть V - непустое, выпуклое, ограниченное по норме, (μ)-замкнутое подмножество в $L^1(\mu)$, и пусть $E \in \Sigma$. Тогда множество $\{x\chi_E : x \in V\}$ (μ)-замкнуто в $L^1(\mu)$.

По вопросам, затронутым в этом параграфе, см. [I-4].

[11–13], [21], [24], [25], [27], [31], [33–35], [37–41], [43], [44], [46], [47]. Теорема I.13.5(б) получена вторым автором и излагается впервые.

§ 2. Представление сопряженного пространства к б.и.п.

<I> На протяжении этого параграфа (T, Σ, μ) есть по-прежнему пространство с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой (заметим, впрочем, что условие σ-конечности можно заменить существенно более слабым условием).

Мы будем заниматься задачей представления пространства $X^{\sim}$ для произвольного и.п. на (T, Σ, μ); напомним, что если X есть б.и.п., то $X^* = X^{\sim}$. Таким образом, мы рассматриваем задачу несколько более общую, чем задача представления сопряженного пространства к б.и.п.

Напомним также, что $X^{\sim}_n$ допускает удобное представление в виде дуального пространства (см. § I, <4>).

Через M в этом параграфе будем обозначать пространство всех конечно-аддитивных мер ν на Σ таких, что $(E \in \Sigma,\ \mu(E) = 0) \Rightarrow (|\nu|(E) = 0)$, за $\|\nu\|$ принимаем ее полную вариацию. M есть банахова решетка, являющаяся (L)-пространством в смысле Какутани (ибо $\|\nu_1\| + \|\nu_2\| = \|\nu_1 + \nu_2\|$ при $\nu_1, \nu_2 \in M_+$).

Напомним, что $(L^\infty(\mu))^*$ векторно-решеточно изоморфно и изометрично M; при этом $f \in (L^\infty(\mu))^*$ соответствует $\nu \in M$, задаваемая формулой

$$\nu(E) = f(\chi_E), \quad E \in \Sigma.$$

<2> Пусть X – произвольное и.п. на (T, Σ, μ). Представлением пространства $X^{\sim}$ будем называть всякий аддитивный и однородный оператор $A: X^{\sim} \to M$, удовлетворяющий условиям:

а) A взаимооднозначен;

б) A положителен, т.е. $Af \geq 0$ при $f \geq 0$.

Множество всех представлений пространства $X^{\sim}$ обозначим через $\mathcal{R}(X)$.

ТЕОРЕМА 2.2.I. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) множество $\mathcal{R}(X)$ не пусто;

(2) существует $A \in \mathcal{R}(X)$ такой, что $A(f \vee g) = Af \vee Ag$ для $\forall f, g \in X^{\sim}$;

(3) существует $A \in \mathcal{R}(X)$ такой, что $A(X^{\sim})$ есть идеал в M и A есть векторно-решеточный изоморфизм $X^{\sim}$ на $A(X^{\sim})$;

(4) существует $F \in (X^{\sim})^{\sim}$ такой, что $F(f) > 0$ для $\forall f > 0$ $(f \in X^{\sim})$.

Для случая, когда X есть пространство Орлича Т.Андо [4], была построена весьма остроумная конструкция представления A, удовлетворяющая условию (2) теоремы 2.2.I.

Однако, как показывает следующая теорема, даже в случае когда X есть пространство Марцинкевича на отрезке, множество $\mathcal{R}(X)$ может быть пусто.

ТЕОРЕМА 2.2.2. Пусть $M(\psi)$ есть пространство Марцинкевича на $[0,1]$. Для того, чтобы $\mathcal{R}(M(\psi))$ было непусто, необходимо, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$; б) $\displaystyle\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2$.

В частности, $\mathcal{R}(M(\psi))$ пусто для важного частного случая $\psi(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, ибо в этом случае не выполняется условие б).

<3> Так как M есть (L)-пространство, то по известной теореме Какутани M векторно-решеточно изоморфно и изометрично некоторому пространству $L^1(\mu^*)$, где (T^*, Σ^*, μ^*) есть пространство с неотрицательной счетно аддитивной (не σ-конечной) мерой μ^*, удовлетворяющее условиям:

а) для $\forall E \in \Sigma^*$ с $\mu^*(E) > 0$ $\exists F \in \Sigma^*$ такое, что $F \subset E$ и $0 < \mu^*(F) < \infty$;

б) $S(\mu^*)$ есть K-пространство.

Заметим, что пространство (T^*, Σ^*, μ^*) и упомянутый изоморфизм M на $L^1(\mu^*)$ в определенном смысле определяются однозначно.

Далее будем отождествлять M с $L^1(\mu^*)$ и с $L^\infty(\mu)^*$.

Идея дальнейших построений заключается в следующем: вместо представлений $A: X^\sim \to M = L^1(\mu^*)$ рассматривать "обобщенные представления" $R: X^\sim \to S(\mu^*)$.

<4> Нам понадобятся некоторые сведения из общей теории векторных решеток. Пусть E – векторная решетка. Элемент $1 \in E_+$ называется единицей в E, если $x \wedge 1 > 0$ для $\forall x > 0$ $(x \in E)$. Пусть $x, y \in E$; говорят, что x есть осколок элемента y, если $(y - x) d x$.

Пусть теперь E есть K-пространство. Существует K-пространство W, обладающее следующими свойствами:

а) E есть идеал в W;

б) если $w \in W$ и $w d x$ для $\forall x \in E$, то $w = 0$;

в) любое подмножество в W, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, порядково ограничено в W.

Пространство W определяется по E в определенном смысле однозначно, оно называется максимальным расширением E и обозначается $m(E)$. Заметим, например, что $m(L^1(\mu)) = S(\mu)$ (этот пример хорошо поясняет смысл понятия максимального расширения).

<5> Пусть X и Y произвольные и.п. на (T, Σ, μ). Для $f \in X^\sim$, $u \in X$ построим $f_{(u)} \in L^\infty(\mu)^*$ по формуле

$$f_{(u)}(x) = f(xu), \quad x \in L^\infty(\mu).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функционалы $f \in X^\sim$ и $g \in Y^\sim$ будем называть дизъюнктными (обозначение: $f D g$), если для $\forall u \in X_+$ $\forall v \in Y_+$ функционалы $f_{(u)}$ и $g_{(v)}$ – дизъюнкты в обычном смысле как элементы K-пространства $L^\infty(\mu)^*$.

Заметим, что f и g в этом определении не являются элементами одного и того же K-пространства, поэтому об их дизъюнктности в обычном смысле говорить не приходится.

Обозначим теперь через 1^* функцию, тождественно равную единице на T^*. В пространстве $m(X^\sim)$ фиксируем какую-нибудь единицу 1.

ТЕОРЕМА 2.5.1. Существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X есть полоса в $S(\mu^*)$, а R_X есть векторно-решеточный изоморфизм $m(X^\sim)$ на V_X, удовлетворяющая условиям:

(1) для любых $f \in X^\sim$, $g \in L^\infty(\mu)^*$ справедливо

$$(f D g) \Longleftrightarrow (R_X f \, d \, g);$$

(2) $R_X(1)$ есть осколок элемента 1^*.

Оператор R_X будем называть канонической реализацией пространства $X^\sim$.

ТЕОРЕМА 2.5.2. Пусть R_X и R_Y суть канонические реализации пространств $X^\sim$ и $Y^\sim$. Тогда для $\forall f \in X^\sim$ $\forall g \in Y^\sim$ справедливо

$$(f D g) \Longleftrightarrow (R_X f \, d \, R_Y g).$$

<6> В заключение этого параграфа приведем один результат, родственный теоремам 1.4.3 и 1.9.2.

ТЕОРЕМА 2.6.1. Пусть X есть б.и.п. на (T, Σ, μ). Положим

$$H = \{ f_{(u)} : f \in X^*, \ u \in X \}.$$

Тогда H есть полоса в $L^\infty(\mu)^*$ и для $\forall h \in H$ справедливо

$$\|h\|_{L^\infty(\mu)^*} = \inf \{ \|f\|_{X^*} \cdot \|u\|_X : f \in X^*, u \in X, f_{(u)} = h \}.$$

По вопросам, затронутым в этом параграфе, см. [13] и [36]. Теоремы 2.2.1, 2.2.2 и 2.6.1 получены вторым автором и излагаются впервые.

§ 3. Интегральное представление линейных операторов

<1> В этом параграфе мы приведем обзор результатов, касающихся интегрального представления линейных операторов в виде $(Ux)(s) = \int K(t,s) x(t) d\mu_1(t)$, где ядро $K(t,s)$ – измеримая функция двух переменных. Основополагающие результаты в этой области были получены во второй половине тридцатых годов в работах И.М.Гельфанда [14], Н.Данфорда и Б.Пет-

тиса [20], Л.В.Канторовича и Б.З.Вулиха [26]. Здесь будут изложены результаты, являющиеся продолжением и обобщением этих классических исследований, полученные в течение последнего десятилетия.

Пусть (T_i, Σ_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ — пространства с полной σ-конечной мерой, (T, Σ, μ) — произведение этих пространств. Всюду далее в этом параграфе через X (соответственно Y) обозначается некоторое идеальное пространство на (T_1, Σ_1, μ_1) (соответственно (T_2, Σ_2, μ_2)).

Линейный оператор $U: X \to Y$ называется *регулярным*, если он множества, ограниченные по упорядочению, переводит в множества, ограниченные по упорядочению ($\Leftrightarrow U$ представим в виде разности двух положительных линейных операторов). Пространство всех регулярных операторов $L^\sim(X, Y)$, упорядоченное при помощи конуса положительных операторов, является K-пространством. Оператор $U \in L^\sim(X, Y)$ называется *порядково непрерывным*, если из $x_n \downarrow 0$ в X следует, что $(Ux_n)(s) \to 0$ μ_2-п.в. ($s \in T_2$). Пространство $L_n^\sim(X, Y)$ всех порядково непрерывных линейных операторов является полосой (компонентой) в $L^\sim(X, Y)$.

<2> Оператор $U: X \to Y$ называется *интегральным*, если существует μ-измеримая функция $K(t,s)$ $(t \in T_1, s \in T_2)$ такая, что для любого $x \in X$ имеем

$$(Ux)(s) = \int K(t,s)\, x(t)\, d\mu_1(t). \qquad (I)$$

Очевидно, что $U \in L_n^\sim(X, S(\mu_2))$, но, вообще говоря, U может не входить в $L^\sim(X, Y)$. Отметим, что $U \geq 0$ тогда и только тогда, когда $K(t,s) \geq 0$ μ-п.в. Дадим первый критерий интегральной представимости оператора.

ТЕОРЕМА 3.2.I. Интегральные регулярные операторы, действующие из X в Y образуют полосу в K-пространстве $L^\sim(X, Y)$, порожденную множеством вырожденных операторов $\{\Gamma_{x',y} : x' \in X', y \in Y\}$, где $\Gamma_{x',y}(x) = (\int x x'\, d\mu)\, y$ $(x \in X)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.2. Интегральный оператор U с ядром $K(t,s)$ входит в $L^\sim(X, Y)$ тогда и только тогда, когда оператор с ядром $|K(t,s)|$ действует из X в Y. При

этом $[|U|(x)](s) = \int |K(t,s)|\, x(t)\, d\mu_1(t)$ $(x \in X)$.

<3> Приведенный в <2> критерий интегральной представимости носит "неявный", невнутренний для оператора характер. Однако из теоремы 3.2.I может быть получен критерий в терминах свойств самого оператора:

ТЕОРЕМА 3.3.I. Пусть $U: X \to Y$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:

I) U — интегральный оператор;

2) если $0 \leq x_n \leq x \in X$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $x_n \xrightarrow{(\mu)} 0$, то $(Ux_n)(s) \to 0$ μ_2-п.в.;

3) $U \in L_n^\sim(X, S(\mu_2))$ и если $\chi_{A_n} \leq x \in X$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\mu_1(A_n) \to 0$, то $U(\chi_{A_n})(s) \to 0$ μ_2-п.в.

Из теоремы 3.3.I при помощи теоремы Лебега получаем, что если оператор порожден неизмеримым ядром, то это ядро можно заменить измеримым, и, тем самым, данный оператор является интегральным:

ТЕОРЕМА 3.3.2. Пусть функция $\varphi(t,s)$ такова, что при любом $x \in X$ для п.в. s определена μ_2-измеримая функция $y(s) = \int \varphi(t,s)\, x(t)\, d\mu_1(t)$. Тогда существует μ-измеримая функция $K(t,s)$ такая, что при любом $x \in X$ имеем:

$$\int K(t,s)\, x(t)\, d\mu_1(t) = \int \varphi(t,s)\, x(t)\, d\mu_1(t) \quad \mu_2\text{-п.в.}$$

(где исключаемое множество меры нуль может зависеть от x).

Если в условиях теоремы 3.3.2 мера μ_1 сепарабельна, то существует μ-измеримая функция $K(t,s)$ такая, что при μ_1-п.в. t имеем $K(t,s) = \varphi(t,s)$ для μ_2-п.в. s.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.3. Пусть (T_3, Σ_3, μ_3) — пространство с полной σ-конечной мерой, Z — и.п. на (T_3, Σ_3, μ_3).

I) Если $U \in L^\sim(Z, X)$ — интегральный оператор, $V \in L_n^\sim(X, S(\mu_2))$, то $W = VU$ — интегральный оператор.

2) Если $V \in L_n^\sim(X, Y)$, $U: X \to S(\mu_3)$ — интегральный оператор, то $W = UV$ — интегральный оператор.

<4> Приведем определения еще двух классов линейных операторов. Пусть E — банахово пространство, X — и.п. на (T_1, Σ_1, μ_1). Оператор $U: E \to X$ называется оператором с

абстрактной нормой, если существует элемент

$$|\mathcal{U}| = \sup\{|\mathcal{U}e| : \|e\| \leq 1\}$$

в K-пространстве X. Пространство всех операторов с абстрактной нормой обозначим через $L_A(E, X)$.

Оператор $\mathcal{U}: X \to E$ называется мажорированным, если существует функция $x' \in X'$ такая, что $\|\mathcal{U}x\| \leq \int |x| x' d\mu$, $\forall x \in X$. Среди всех таких функций x' существует наименьшая $x'_{\mathcal{U}}$. Пространство всех мажорированных операторов обозначим через $M_{X_n^{\sim}}(X, E)$.

Если X — б.и.п. с условием (A), то линейный непрерывный оператор $\mathcal{U}: X \to E$ является мажорированным тогда и только тогда, когда

$$\|\mathcal{U}\|_S = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|\mathcal{U}(\chi_{A_k})\| ; A_k \cap A_m = \emptyset (k \neq m), \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}\|_X \leq 1\} < \infty,$$

причем $\|\mathcal{U}\|_S = \|x'_{\mathcal{U}}\|$.

<5> Здесь мы приведем некоторые сведения о пространствах со смешанной нормой. Пусть X — и.п. на (T_1, Σ_1, μ_1), Y — б.и.п. на (T_2, Σ_2, μ_2), причем норма в Y удовлетворяет условию (C) (см. § I, <7>).

Через $X[Y]$ обозначим пространство всех μ-измеримых функций $K(t, s)$, $(t \in T_1, s \in T_2)$ таких, что:

I) при п.в. t, функция $s \to K(t, s)$ входит в Y;

2) функция $\omega(K)(t) = \|K(t, \cdot)\|_Y$ входит в X.

$X[Y]$ — и.п. на (T, Σ, μ), что вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.5.I. Пусть $K \in S(\mu)$, F — непустое множество неотрицательных функций в $S(\mu_2)$. Тогда функция

$$d_F(K)(t) = \sup\{\int |K(t, s)| y(s) d\mu_2(s) : y \in F\}$$

μ_1-измерима (здесь идет речь о поточечном супремуме). Более того, существует такая последовательность $\{y_n\} \subset F$, что

$$d_F(K)(t) = \sup_n \{\int |K(t, s)| y_n(s) d\mu_2(s)\} \quad \mu_1\text{- п.в.}$$

Если X — н.и.п., то $X[Y]$ становится н.и.п. при введении следующей нормы: $\|K\| = \|\omega(K)\|_X$.

ТЕОРЕМА 3.5.2. Если X — б.и.п., то $X[Y]$ полно.

ТЕОРЕМА 3.5.3. В н.и.п. $X[Y]$ выполнено условие (A) тогда и только тогда, когда оно выполнено в X и Y.

ТЕОРЕМА 3.5.4. $(X[Y])' = X'[Y']$, причем, если X — б.и.п., то равенство справедливо не только по запасу элементов, но и по норме.

<6> Пусть X — и.п. на (T_1, Σ_1, μ_1), Y — б.и.п. на (T_2, Σ_2, μ_2).

ТЕОРЕМА 3.6.I. Если $\mathcal{U} \in L_A(Y, X)$ — интегральный оператор

$$(\mathcal{U}y)(t) = \int K(t, s) y(s) d\mu_2(s), \; y \in Y, \quad (2)$$

с μ-измеримым ядром $K(t, s)$, то $K \in X[Y']$ и $|\mathcal{U}| = \omega(K)$. Обратно, любая функция $K \in X[Y']$ определяет интегральный оператор $\mathcal{U} \in L_A(Y, X)$.

ТЕОРЕМА 3.6.2. Если $\mathcal{U} \in M_{X_n^{\sim}}(X, Y)$ — интегральный оператор (I) с ядром $K(t, s)$, то $K \in X'[Y'']$, причем $x'_{\mathcal{U}} = \omega(K)$. Если $X = X''$, то и обратно, если $K \in X'[Y]$, то формула (I) определяет оператор $\mathcal{U} \in M_{X_n^{\sim}}(X, Y)$.

Приведем теперь результаты об интегральном представлении операторов с абстрактной нормой и мажорированных операторов. Напомним, что $Y(A)$ — и.п. элементов с (O)-непрерывной нормой (см. § I, <6>).

ТЕОРЕМА 3.6.3. Пусть $\operatorname{supp} Y_{(A)} = \operatorname{supp} Y$. Общий вид операторов $\mathcal{U}$ класса $L_A(Y, X)$ дается формулой (2), где $K \in X[Y']$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6.4. Пусть Y — как в теореме 3.6.3. Тогда формула (2) дает общий вид линейного непрерывного оператора из Y в $L^{\infty}(T_1, \Sigma_1, \mu_1)$, причем $\|\mathcal{U}\| = \operatorname{vrai\,sup} \|K(t, \cdot)\|_{Y'}$.

ТЕОРЕМА 3.6.5. Оператор $\mathcal{U} \in L_A(Y, X)$ допускает интегральное представление (2) тогда и только тогда, когда из $y_n \to 0$ в слабой топологии $\sigma(Y, Y_n^{\sim})$ следует $(\mathcal{U}y_n)(t) \to 0$ μ_1- п.в.

ТЕОРЕМА 3.6.6. Пусть $\operatorname{supp} Y_{(A)} = \operatorname{supp} Y$. Общий вид операторов $\mathcal{U}$ класса $M_{X_n^{\sim}}(X, Y')$

дается формулой (I), где $K \in X'[Y']$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6.7. Пусть Y — как в теореме 3.6.6. Тогда формула (I) дает общий вид линейного непрерывного оператора из $L^2(T,\Sigma,\mu)$ в Y, причем $\|U\| = \operatorname{vrai\,sup} \|K(t,\cdot)\|_Y$.

<7> Пусть S_C — комплексное пространство измеримых функций. Тогда точно так же, как это сделано в § I, можно определить и.п., н.м.п. и б.и.п. в S_C, а далее и все остальные понятия, связанные с этими объектами. При этом почти все результаты § I и все результаты § 3 переносятся на комплексный случай. Отметим, в частности, что теорема 3.3.I является новой даже тогда, когда $X = Y = L^2(D)$, где D — произвольное измеримое подмножество в R^n.

По вопросам, затронутым в этом параграфе, см. [6], [8-10], [14], [16-18], [20], [21], [26-32], [42], [45].

§ 4. Аналитическое представление линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций

<1> Задачу об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой и мажорированных операторов можно поставить более общим образом, чем в § 3. Именно, одно из пространств можно считать абстрактным банаховым пространством и искать представление оператора при помощи вектор-функции.

Всюду далее E — банахово пространство, X — и.п. на (T,Σ,μ), где (T,Σ,μ) — произвольное пространство с полной σ-конечной мерой. Функция $\vec\omega : T \to E^*$ называется E-скалярно измеримой, если для любого $e \in E$ измеримы функции $\langle e, \vec\omega(t)\rangle$. При этом существует $\nu(\vec\omega) \overset{def}{=} \sup\{|\langle e,\vec\omega(\cdot)\rangle| : \|e\| \le 1\} \in S(\mu)$ (отметим, что речь идет о супремуме в K-пространстве $S(\mu)$, а не о поточечном супремуме). Функции $\vec\omega_i : T \to E^*$ $(i = 1, 2)$ называются E-скалярно эквивалентными, если при любом $e \in E$ имеем $\langle e, \vec\omega_1(t)\rangle = \langle e, \vec\omega_2(t)\rangle$.

Через $s(E) - X(E^*)$ обозначим пространство всех E-скалярно измеримых функций $\vec\omega : T \to E^*$ таких, что $\nu(\vec\omega) \in X$ (E-скалярно эквивалентные функции отождествляются). Если X — б.и.п., то $s(E) - X(E^*)$ — банахово пространство, если мы введем норму $\|\vec\omega\| = \|\nu(\vec\omega)\|_X$.

Функция вида $\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(t)\, e_k$ $(e_k \in E,\ A_k \in \Sigma)$ называется конечнозначной. Функция $\vec z : T \to E$ называется измеримой, если существует последовательность $\{\vec z_n\}$ конечнозначных функций такая, что $\|\vec z_n(t) - \vec z(t)\|_E \to 0$ п.в. Если $\vec z$ — измеримая функция и $\int \|\vec z(t)\|_E \, d\mu(t) < \infty$, то существует интеграл Бохнера $\int \vec z(t)\, d\mu(t) \in E$.

Через $X(E)$ обозначим пространство всех измеримых функций $\vec z : T \to E$ таких, что $\|\vec z(\cdot)\|_E \in X$. Если X — б.и.п., то $X(E)$ — банахово пространство, если мы введем норму:

$$\|\vec z\| = \|\,\|\vec z(\cdot)\|_E\,\|_X .$$

Через $X(E)_\pi^{\sim}$ обозначим пространство всех линейных функционалов φ на $X(E)$ таких, что из $\|\vec z_n(t)\| \to 0$ п.в., $\|\vec z_n(\cdot)\| \le x \in X$ $(\vec z_n \in X(E))$ следует $\varphi(\vec z_n) \to 0$.

Если X — б.и.п. с условием (A), то $X(E)^* = X(E)_\pi^{\sim}$.

Следующая теорема полностью решает вопрос о представлении скалярно измеримыми вектор-функциями.

ТЕОРЕМА 4.I.I. 1) Отображение P, сопоставляющее каждому элементу $\vec w \in s(E) - X(E^*)$ оператор

$$(P\vec w)(e) = \langle e, \vec w\rangle \quad (e \in E) \qquad (1)$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E) - X(E^*)$ на $L_A(E,X)$, причем $\nu(\vec w) = |P\vec w|$.

2) Отображение Q, сопоставляющее каждому элементу $\vec w \in s(E) - X'(E^*)$ оператор $Q\vec w$ по формуле

$$\langle (Q\vec w)x, e\rangle = \int x(t)\langle e, \vec w(t)\rangle\, d\mu(t) \quad (x \in X,\ e \in E) \qquad (2)$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E) - X'(E^*)$ на $M_{X_\pi^{\sim}}(X, E^*)$, причем $\nu(\vec w) = x'(Q\vec w)$.

3) Отображение R, сопоставляющее каждому элементу $\vec w \in s(E) - X'(E^*)$ функционал $R\vec w$ по формуле

$$(R\vec{w})(\vec{z}) = \int \langle \vec{z}(t), \vec{w}(t) \rangle d\mu(t) \quad (\vec{z} \in X(E)) \quad (3)$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $S(E)-X'(E^*)$ на $X(E)^*_n$, причем, если X – б.и.п., то R – изометрия.

<2> Рассмотрим теперь значительно более сложный вопрос, когда в формулах (I)–(3) функцию $\vec{w}: T \to X^*$ можно выбрать измеримой.

Оператор $U: E \to X$ называется (z_X)-компактным, если существует $z \in X_+$ такой, что U – компактный оператор из E в банахово пространство

$$X_z = \{x \in X : \|x\|_z = \inf\{\lambda > 0 : |x| \le \lambda z\} < \infty\}.$$

ТЕОРЕМА 4.2.I. Пусть X – б.и.п. с условием (A) или $X = S(\mu)$, $U \in L_A(E, X)$. Следующие утверждения эквивалентны: I) существует

$$\vec{w} \in X(E^*_1) : (Ue)(t) = \langle e, \vec{w}(t) \rangle \ (e \in E);$$

2) U – (z_X)-компактен.

ТЕОРЕМА 4.2.2. Если линейный оператор $U: L^1(\mu) \to E$ слабо компактен, то существует

$$\vec{z} \in L^\infty(E): Ux = \int x(t) \vec{z}(t) d\mu(t) \quad (x \in L^1(\mu_n)),$$

причем $\|U\| = \operatorname{vrai\,sup}_t \|\vec{z}(t)\|_E$.

Будем говорить, что банахово пространство E обладает свойством Радона-Никодима ($E \in (RN)$), если для любого (T, Σ, μ) и любой меры $\vec{m}: \Sigma \to E$ конечной вариации и абсолютно непрерывной относительно μ существует функция $\vec{z} \in L^1(\mu)(E)$ такая, что $\vec{m}(A) = \int_A \vec{z}(t) d\mu(t) \ (A \in \Sigma)$.

Можно сказать, что $E^* \in (RN)$ тогда и только тогда, когда в каждом из представлений (I)–(3) функцию $\vec{w}$ всегда можно выбрать измеримой. Дадим внутренние характеристики пространств со свойством Радона-Никодима.

ТЕОРЕМА 4.2.3. $E^* \in (RN)$ тогда и только тогда, когда E квазисепарабельно, т.е. любое сепарабельное подпространство в E имеет сепарабельное сопряженное.

Отметим, что если E – б.и.п., то квазисепарабельность E эквивалентна выполнению условия (A) в E и E^*. Из теоремы 4.2.3 вытекают классические теоремы о том, что рефлексивное пространство и сепарабельное сопряженное обладают свойством Радона-Никодима.

Будем говорить, что банахово пространство E обладает свойством Крейна-Мильмана, если любое выпуклое замкнутое по норме множество есть замкнутая (по норме) выпуклая оболочка своих экстремальных точек.

ТЕОРЕМА 4.2.4. I) Если $E \in (RN)$, то E обладает свойством Крейна-Мильмана. 2) Если E – сопряженное пространство, то $E \in (RN)$ тогда и только тогда, когда E обладает свойством Крейна-Мильмана.

По вопросам, затронутым в этом параграфе, см. [5–7], [10], [14], [19–23], [26], [27], [29–31], [43], [48–52].

§ 5. О строении банахова пространства, сопряженного к пространству Харди векторнозначных аналитических функций

<I> Пусть E – комплексное банахово пространство. Для пространств $L^p(E)$ при естественной двойственности имеем

$$L^p(E)^* = s(E) - L^{p'}(E^*), \quad 1 \le p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Если $E^* \in (RN)$, то $L^p(E)^* = L^{p'}(E^*)$ (см. § 4). Если мы естественным образом определим пространство Харди $H^p(E)$, то, по крайней мере, для сепарабельного рефлексивного E можно было бы ожидать, что $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)$ $(1 < p < \infty)$. Однако это оказалось не так, причем при доказательстве этого неожиданно нашли применение теоремы об операторах в идеальных пространствах. Пусть далее L^p – это комплексное L^p на окружности с нормированной мерой Лебега.

Через $H^p(E)$ обозначим подпространство в $L^p(E)$, состоящее из всех $\vec{f} \in L^p(E)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vec{f}(t) e^{-int} dt = 0, \quad n = -1, -2, \ldots$$

Через $H^p(E^*)_s$ обозначим подпространство в $s(E) - L^p(E^*)$, состоящее из всех $\vec{g} \in s(E) - L^p(E^*)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overleftarrow{g}(t) e^{-int}\, dt = 0, \quad n = -1, -2, \ldots$$

Как и в скалярном случае, пространства $H^p(E)$ и $H^p(E^*)_{\ell}$ можно отождествить с пространствами аналитических функций в круге. Если $E^* \in (RN)$, то $H^p(E^*) = H^p(E^*)_{\ell}$.

<2> Пусть $1 < p < \infty$; $P: L^p \to H^p$ — канонический проектор; именно, если $\ell \in L^p$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-int},$$

то $P\ell$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-int}.$$

Пространства $H^p(E)$ и $H^{p'}(E^*)_{\ell}$ находятся в естественной двойственности:

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle \vec{f}(t), \vec{g}(t) \rangle\, dt \quad (\vec{f} \in H^p(E), \ \vec{g} \in H^{p'}(E^*)_{\ell}).$$

Будем писать, что $E \in (H^p_*)$, если $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)_{\ell}$. Пусть 1_E — тождественный оператор на E; $L^p \otimes E$ — линейная оболочка функций $(\ell \otimes e)(t) = \ell(t)e$, $(\ell \in L^p, e \in E)$ в $L^p(E)$ с нормой, индуцированной из $L^p(E)$. Оператор $P \otimes 1_E$ из $L^p \otimes E$ в себя определяется формулой:

$$(P \otimes 1_E)(\ell \otimes e) = (P\ell) \otimes e \quad (\ell \in L^p, \ e \in E).$$

ТЕОРЕМА 5.2.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $P \otimes 1_E : L^p \otimes E \to L^p \otimes E$ непрерывен;

2) $E \in (H^p_*)$;

3) некоторое (любое) нечетное сопряженное E входит в (H^p_*);

4) некоторое (любое) четное сопряженное E входит в (H^p_*).

Если $E \in (H^p_*)$ при любом p $(1 < p < \infty)$, то пишем $E \in (H_*)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2.2. 1) Условие (H^p_*) наследственно.

2) Если $\exists p$, $1 < p < \infty$: $E \in (H^p_*)$, то $E \in (H_*)$.

3) Если E — подпространство в $L^r(\mu)$, $1 < r < \infty$, то $X \in (H_*)$ (более того, $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)$).

<3> Как отмечено в <7> § 3, все понятия, связанные с операторами в вещественных идеальных пространствах, осмыслены и в комплексном случае. Здесь мы приведем один результат, характеризующий регулярные операторы в L^p.

Будем говорить, что в E равномерно вкладываются пространства ℓ^1_n, если $\exists C > 0$ такое, что для любого натурального n найдется подпространство $Y_n \subset E$: $d(Y_n, \ell^1_n) = \inf\{\|U\| \cdot \|U^{-1}\| : U: \ell^1_n \to Y_n$ изоморфизм$\} < C$.

ТЕОРЕМА 5.3.1. Пусть в E равномерно вкладываются пространства ℓ^1_n; $U: L^p \to L^p$ — линейный непрерывный оператор $(1 \leq p \leq \infty)$. Если оператор $U \otimes 1_X : L^p \otimes X \to L^p \otimes X$ непрерывен, то $U \in L^{\sim}(L^p, L^p)$.

Так как проектор $P \notin L^{\sim}(L^p, S)$, то из теорем 5.2.2 и 5.3.1 получаем

ТЕОРЕМА 5.3.2. Если $E \in (H_*)$, то в E нельзя равномерно вложить пространства ℓ^1_n (т.е. E — B-выпукло).

Из теоремы 5.3.2 получаем, что если

$E = (\sum_{n=1}^{\infty} \ell^1_n)_{\ell^r} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \ell^1_n, \|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^r_{\ell^1_n})^{1/r} < \infty\}$, $1 < r < \infty$,

то E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, но $E \notin (H_*)$.

Результаты, изложенные в этом параграфе, получены первым автором и излагаются впервые. По поводу теории пространств H^p см. [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Ю.А., Некоторые теоремы о нормированных структурах, Вестник ЛГУ, № 13 (1971), 5-11.
2. Абрамович Ю.А., Лозановский Г.Я., О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов, Мат. заметки, № 14, № 5 (1973), 723-732.

3. Amemiya I., On ordered topological linear spaces, Proc. of Symp. on linear spaces, Jerusalem (1960), 14-21.
4. Ando T., Linear functionals on Orlicz spaces, Niew Arch. Wiskunde, 8, №1 (1960), 1-16.
5. Бухвалов А.В., Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой, ДАН СССР, 208, № 5 (1973), 1012-1015.
6. Бухвалов А.В., О пространствах со смешанной нормой, Вестник ЛГУ, № 19 (1973), 5-12.
7. Бухвалов А.В., Аналитическое представление операторов при помощи измеримых вектор-функций, Вестник ЛГУ, № 7 (1974), 157-158.
8. Бухвалов А.В., Об интегральном представлении линейных операторов, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 47 (1974), 5-14.
9. Бухвалов А.В., Критерий интегральной представимости линейных операторов, Функц. ан. и его прилож., 9, № 1 (1975), 51.
10. Бухвалов А.В., Интегральные операторы и представление вполне линейных функционалов на пространствах со смешанной нормой, Сиб. мат. ж., 16, № 3 (1975).
11. Бухвалов А.В., Лозановский Г.Я., О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций, ДАН СССР, 212, № 6 (1973), 1273-1275.
12. Вулих Б.З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
13. Вулих Б.З., Лозановский Г.Я., О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах, Мат. сб., 84 (126), № 3 (1971), 331-352.
14. Гельфанд И.М., Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. Мат. сб., 4 (46) (1938), 235-286.
15. Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
16. Грибанов Ю.И., Линейные операторы в совершенных пространствах функций II, Известия ВУЗов, Матем., № 9 (1970), 37-44.
17. Грибанов Ю.И., Об измеримости одной функции, Известия ВУЗов, Матем., № 3 (1970), 22-26.
18. Грибанов Ю.И., Об измеримости ядер интегральных операторов, Известия ВУЗов, № 7 (1972), 31-34.
19. Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., 16 (1955).
20. Dunford N., Pettis B.J., Linear operators on summable functions, Trans. Amer. Math. Soc., 47, N3 (1940) 323-392
21. Данфорд Н., Шварц Дж.Т., Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1964.
22. Dinculeanu N., Vector measures, Berlin, 1966.
23. Dieudonné J., Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym, Canad. J. Math., 3 (1951), 129-139.
24. Забрейко П.П., Идеальные пространства функций I, Вестник Яросл. гос. ун-та, Вып. 8 (1974), 12-52.
25. Yosida K., Hewitt E., Finitely additive measures, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 46-66.
26. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Sur la représentation des opérations linéaires, Comp. Math., 5 (1937), 119-165.
27. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.-Л., ГИТТЛ, 1950.
28. Коротков В.Б., Интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими условиям Карлемана и Ахиезера I, Сиб. мат. ж., 12, № 5 (1971), 1041-1055.
29. Коротков В.Б., Интегральные представления линейных операторов, Сиб. мат. ж., 15, № 3 (1974), 529-545.
30. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., "Наука", 1966.
31. Крейн С.Г. (редактор), Функциональный анализ, СМБ, М., "Наука", 1972.
32. Лозановский Г.Я., О почти интегральных операторах в KB-пространствах, Вестник ЛГУ, № 7 (1966), 35-44.

33. Лозановский Г.Я., О проекторах в некоторых банаховых структурах, Мат.заметки, 4, № I (1968), 4I–44.

34. Лозановский Г.Я., Об изоморфных банаховых структурах, Сиб.мат.ж., IO, № I (1969), 93–98.

35. Лозановский Г.Я., О некоторых банаховых структурах, Сиб.мат.ж., IO, № 3 (1969), 584–599.

36. Лозановский Г.Я., О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях, ДАН СССР, 188, № 3 (1969), 522–524.

37. Лозановский Г.Я., О нормированных структурах с полунепрерывной нормой, Сиб.мат.ж., I2, № I (1971), 232–234.

38. Лозановский Г.Я., О локализованных функционалах в векторных структурах, Сб."Теория функций, функц.ан. и их прилож., Харьков., Вып. I9 (1974), 66–80.

39. Лозановский Г.Я., Меклер А.А., Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах, Известия ВУЗов, Матем., № II (1967), 47–53.

40. Luxemburg W.A.J., Notes on Banach Function Spaces, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A 68 (1965), 229–248, 415–446, 646–667.

4I. Luxemburg W.A.J., Zaanen A.C., Notes on Banach Function Spaces, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A 66 (1963), 135–153, 239–263, 496–504, 655–681; A 67 (1964), 104–119, 360–376, 493–543.

42. Luxemburg W.A.J., Zaanen A.C., The linear modulus of an order bounded linear transformation I, II, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, A 74, N 5 (1971), 422–447.

43. Митягин Б.С., Шварц А.С., Функторы в категориях банаховых пространств, УМН, 19, № 2 (1964), 65–130.

44. Mori T., Amemiya I., Nakano H., On the reflexivity of semicontinuous norms, Proc. Japan Acad., 31, N 10 (1955), 684–685.

45. Nakano H., Product spaces of semi-ordered linear spaces, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 12, N 3 (1953), 163–210.

46. Седаев А.А., Об одной задаче Г.Я.Лозановского, Труды НИИМ ВГУ, Воронеж, Вып.I4 (1974), 63–67.

47. Семенов Е.М., Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах, Докторская диссертация, Воронеж, 1968.

48. Uhl J.J., Jr., A note on the Radon-Nikodym property for Banach spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 17, N 1 (1972), 113–115.

49. Phelps R.R., Dentability and extreme points in Banach spaces, J. Funct. Anal., 16, N 1 (1974), 78–90.

50. Chatterji S.D., Martingal convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, Math. Scand., 22 (1968/69), 21–44.

5I. Phillips R.S., On weakly compact subsets of a Banach space, Amer. J. Math, 65 (1943), 108–136.

52. Ellis H.W., Halperin I., Function spaces determined by a levelling length function, Canad. J. Math., 5 (1953), 576–592.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА 5 (192)

УДК 517.51

Г. Я. Лозановский

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе уточняются и усиливаются некоторые результаты заметки автора [1].

Терминология и обозначения. Всюду далее (T, Σ, μ) есть пространство с неотрицательной счетно-аддитивной вполне σ — конечной полной мерой. $S=S(T, \Sigma, \mu)$ — векторная решетка всех вещественных измеримых функций на (T, Σ, μ) (μ-эквивалентные функции и множества отождествляются). Для $x\in S$ полагаем $\operatorname{supp} x = \{t\in T: x(t)\neq 0\}$. Идеалом в S называется всякое векторное подпространство X в S такое, что $(x\in X,\ y\in S,\ |y|\leqslant|x|)\Rightarrow(y\in X)$. Носителем идеала X (обозначение: $\operatorname{supp} X$) называется наименьшее (с точностью до множества меры 0) множество $T_0\in\Sigma$ такое, что $\operatorname{supp} x\subset T_0\ \forall x\in X$. *Дуальным* к идеалу X называется идеал

$$X'=\{x'\in S:\operatorname{supp} x'\subset\operatorname{supp} X,\ xx'\in L^1(T, \Sigma, \mu) \text{ для } \forall x\in X\}.$$

Банаховым идеальным пространством (БИП) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ такое, что X есть идеал в S и $(x,\ y\in X,\ |x|\leqslant|y|)\Rightarrow(\|x\|\leqslant\|y\|)$. Дуальной нормой к норме $\|\cdot\|$ называется норма $\|\cdot\|'$ на X', задаваемая формулой

$$\|x'\|'=\sup\left\{\int_T|xx'|d\mu: x\in X,\ \|x\|\leqslant 1\right\},\quad x'\in X'.$$

1. *Основные определения и следствия из них:*

Определение 1. Через $\mathfrak{A}$ будем обозначать множество всех функций φ: $R^2_+\to R_+$, удовлетворяющих условиям: а) φ непрерывна по совокупности аргументов на R^2_+; б) $\varphi(\xi, \eta)>0$ при $\xi, \eta>0$; в) φ вогнута и положительно однородна.

Определение 2. Для $\varphi\in\mathfrak{A}$ полагаем

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta)=\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha, \beta)},\quad (\xi, \eta)\in R^2_+.$$

Предложение 1. *Для $\varphi\in\mathfrak{A}$ справедливо $\hat{\varphi}\in\mathfrak{A}$ и $\hat{\hat{\varphi}}=\varphi$.*

Определение 3. Пусть X_0, X_1 суть идеалы в S, $\varphi\in\mathfrak{A}$. Полагаем $\varphi(X_0, X_1)=\{x\in S:|x|\leqslant\varphi(x_0, x_1)$ для некоторых $x_0\in(X_0)_+$, $x_1\in(X_1)_+\}$. Ясно, что $\varphi(X_0, X_1)$ есть идеал в S.

Определение 4. Пусть $(X_0, \|\cdot\|_0)$, $(X_1, \|\cdot\|_1)$ суть БИП на (T, Σ, μ) и $\varphi\in\mathfrak{A}$. Для $x\in\varphi(X_0, X_1)$ полагаем

$$p(x)=\inf\{\|x_0\|_0+\|x_1\|_1:|x|\leqslant\varphi(x_0, x_1),\ x_0\in(X_0)_+,\ x_1\in(X_1)_+\},$$

$q(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda\varphi(x_0, x_1)$ для некоторых $x_j \in (X_j)_+$ с $\|x_j\|_j \leqslant 1$ $(j = 0, 1)\}$.

Ясно, что p и q суть нормы на $\varphi(X_0, X_1)$. Назовем p *первой нормой*, а q — *второй нормой*, построенным по нормам $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ соответственно.

Предложение 2. *В условиях определения 4 идеал* $\varphi(X_0, X_1)$ *с каждой из норм* p, q *является БИП, причем* $q \leqslant p \leqslant 2q$.

2. *Главный результат.* В этом пункте пусть $(X_0, \|\cdot\|_0)$, $(X_1, \|\cdot\|_1)$ суть произвольные БИП на (T, Σ, μ) такие, что $\operatorname{supp} X_0 = \operatorname{supp} X_1$ и пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$ — произвольна.

Пусть p, q — суть первая и вторая нормы на $\varphi(X_0, X_1)$, построенные по нормам $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$.

Исходя из БИП $(X'_0, \|\cdot\|'_0)$, $(X'_1, \|\cdot\|'_1)$, построим $\hat{\varphi}(X'_0, X'_1)$ и пусть P, Q суть первая и вторая нормы на $\hat{\varphi}(X'_0, X'_1)$, построенные по нормам $\|\cdot\|'_0$, $\|\cdot\|'_1$.

Теорема. *Справедливы равенства: а)* $(\varphi(X_0, X_1))' = \hat{\varphi}(X'_0, X'_1)$ *по набору элементов; б)* $p' = Q$, *т. е. норма* Q *дуальна к* p; *в)* $q' = P$, *т. е. норма* P *дуальна к* q.

Замечание. Условие $\operatorname{supp} X_0 = \operatorname{supp} X_1$ существенно для справедливости равенства а). Для произвольных (ненормированных) идеалов X_0 и X_1 в S равенство а) может не иметь места даже, если $\operatorname{supp} X_0 = \operatorname{supp} X_1$.

3. *Некоторые примеры.*

Пример 1. Пусть $\varphi(\xi, \eta) = \xi + \eta$, тогда $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \min\{\xi, \eta\}$, и мы приходим к известному равенству $(X_0 + X_1)' = X'_0 \cap X'_1$ и двум соотношениям между соответствующими нормами.

Пример 2. Пусть $\varphi(\xi, \eta) = \min\{\xi, \eta\}$, тогда $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \xi + \eta$ и мы приходим к известному равенству $(X_0 \cap X_1)' = X'_0 + X'_1$ и двум соотношениям между соответствующими нормами.

Пример 3. Пусть $M(u)$, $N(v)$ — суть пара дополнительных друг к другу N-функций, см. [2]. Положим

$$\varphi(\xi, \eta) = \eta M^{-1}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \quad \text{при} \quad \eta > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\xi, 0) = 0.$$

Тогда

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \xi N^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \quad \text{при} \quad \xi > 0 \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}(0, \eta) = 0.$$

Возьмем теперь $X_0 = L^1(T, \Sigma, \mu)$, $X_1 = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ с обычными нормами. Простые вычисления показывают, что $\varphi(X_0, X_1)$ есть пространство Орлича, построенное по $M(u)$, причем $p(x) = \inf\limits_{k>0} \frac{1}{k} \cdot \left[1 + \int\limits_T M(kx)\, d\mu\right]$ — норма Орлича, $q(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_T M\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\mu \leqslant 1\right\}$ — норма Люксембурга. Аналогично, $\hat{\varphi}(X'_0, X'_1) = \hat{\varphi}(L^\infty, L^1)$ есть пространство Орлича, построенное по $N(v)$, причем P есть норма Орлича, а Q — норма Люксембурга на нем. Теперь ясно, что в рассматриваемом частном случае наша теорема превращается в основное соотношение между пространствами Орлича, построенными по дополнительным друг к другу N-функциям.

4. *Схема доказательства теоремы.* а). Не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{supp} X_0 = \operatorname{supp} X_1 = T$. Ясно, что $(\varphi(X_0, X_1))' \supset \supset \hat{\varphi}(X_0', X_1')$, причем $p'(x) \leqslant Q(x)$, $q'(x) \leqslant P(x)$ для $x \in \hat{\varphi}(X_0', X_1')$. б). Если последовательность $x_n \in \hat{\varphi}(X_0', X_1')$ такова, что $0 \leqslant x_n \uparrow$, $\sup\limits_n P(x_n) < \infty$, то существует $x \in \hat{\varphi}(X_0', X_1')$ такой, что $x_n \uparrow x$, $\sup\limits_n P(x_n) = P(x)$, $\sup\limits_n Q(x_n) = Q(x)$. В доказательстве этого факта используется теорема 3 из [3]. в). Далее понадобится следующее предложение, имеющее, возможно, и некоторый самостоятельный интерес.

Предложение 3. *Пусть Y, H_0, H_1—суть идеалы в S, причем* $\operatorname{supp} Y = \operatorname{supp} Y' = \operatorname{supp} H_0 = \operatorname{supp} H_1 = T$, $H_0 \subset Y'$, $H_1 \subset Y'$. *Пусть* $h \in S$, $h_0 \in (H_0)_+$, $h_1 \in (H_1)_+$ *таковы, что* $0 \leqslant h \leqslant \hat{\varphi}(h_0, h_1)$, *где* $\varphi \in \mathfrak{A}$. *Тогда для любых* y_0, $y_1 \in Y_+$ *справедливо*

$$\int\limits_T h\varphi(y_0, y_1)\, d\mu = \inf\Big\{ \int\limits_T (u_0 y_0 + u_1 y_1)\, d\mu : u_0 \in (H_0)_+,$$

$$u_1 \in (H_1)_+,\ \hat{\varphi}(u_0, u_1) \geqslant h \Big\}.$$

В доказательстве этого предложения используются некоторые факты из теории векторных решеток. г). С помощью в) и теоремы 2 из [3] доказываем, что $p'(x) \geqslant Q(x)$, $q'(x) \geqslant P(x)$ для $x \in \hat{\varphi}(X_0', X_1')$. д). Справедливость теоремы теперь легко следует из а), б), г).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах, IV. Сиб. матем. журн., т. XIV, 1974, № 1, с. 140—155.

2. Красносельский Б. Г., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1958.

3. Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я. О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций. ~~Сиб. матем. журн.~~, № 6, 1973, с. 1273—1275.
DAH 212

г. Ленинград

Поступила
9 IX 1975

Казановский

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

(Отдельный оттиск)

Том XVI 4 1975

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XVI № 4

июль — август

1975

УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе ([1]) показано, что ограниченные выпуклые множества, замкнутые относительно сходимости по мере в «хороших» пространствах измеримых функций, обладают рядом полезных свойств, выполнение которых ранее чаще всего связывалось с условием компактности. В настоящей заметке уточняются и обобщаются некоторые результаты из ([1]).

Обозначения и терминология

Все топологические векторные пространства (ТВП), о которых пойдет речь, предполагаются вещественными и отделимыми. Пространство, сопряженное к локально-выпуклому пространству X, обозначается X^*. На протяжении всей работы через W обозначено произвольное полное метризуемое ТВП (локальная выпуклость не предполагается), $\mathfrak{U}(W)$ — базис замкнутых симметричных окрестностей нуля в W. Для $D\subset W$ через $[D]$ обозначается замыкание D. Если E — банахово пространство, то $B(E)$ — его замкнутый единичный шар, $\pi: E\to E^{**}$ — оператор канонического вложения. Для $K\subset E$ через K^σ обозначаем $\sigma(E^{**}, E^*)$-замыкание $\pi(K)$ в E^{**}. Для $x^{**}\in E^{**}$ полагаем $R(x^{**})\overset{\mathrm{def}}{=}\{K\subset E: K$ выпукло и $x^{**}\in K^\sigma\}$. Наконец, буква n всегда обозначает натуральное число.

§ 1. Уплотняющие операторы и их свойства

В этом параграфе E есть произвольное банахово пространство, $A: E\to W$ — произвольный линейный непрерывный оператор.

Определение 1. Оператор A будем называть *уплотняющим*, если $\forall x^{**}\in E^{**}$ и $\forall U\in\mathfrak{U}(W)$ $\exists V\in R(x^{**})$ такое, что $A(V)$ есть малая порядка U, т. е., что $A(V)-A(V)\subset U$.

Для установления основных свойств уплотняющих операторов нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Для любых $x^{**}\in E^{**}$, $V_1, V_2\in R(x^{**})$ и числа $\varepsilon>0$ справедливо включение*

$$(V_1+\varepsilon B(E))\cap V_2\in R(x^{**}).$$

Доказательство. Фиксируем направления $x_\lambda\in V_1$, $y_\lambda\in V_2$ $(\lambda\in\Lambda)$ такие, что $\pi x_\lambda\to x^{**}$, $\pi y_\lambda\to x^{**}$ в топологии $\sigma(E^{**}, E^*)$. Тогда $x_\lambda-y_\lambda\to 0$ слабо. Следовательно, $\forall\lambda\in\Lambda$ найдутся $u_\lambda\in\operatorname{conv}\{x_\mu:\mu\geqslant\lambda\}$, $v_\lambda\in\operatorname{conv}\{y_\mu:\mu\geqslant\lambda\}$ такие, что $\|u_\lambda-v_\lambda\|<\varepsilon$. Ясно, что $v_\lambda\in(V_1+\varepsilon B(E))\cap V_2$ и $\pi v_\lambda\to x^{**}$ в топологии $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Лемма 2. *Для любых* $x^{**}\in E^{**}$, $V_1, \ldots, V_n$, $V\in R(x^{**})$ *и числа* $\varepsilon>0$ *справедливо включение*

$$(V_1+\varepsilon B(E))\cap\ldots\cap(V_n+\varepsilon B(E))\cap V\in R(x^{**}).$$

Доказательство следует из леммы 1 индукцией.

Лемма 3. *Если* A — *уплотняющий, то* $\forall x^{**}\in E^{**}$ *пересечение* $\bigcap\{[A(V)]:V\in R(x^{**})\}$ *состоит в точности из одной точки.*

Доказательство. Из определения 1 и леммы 2 следует, что совокупность множеств $\{[A(V+\varepsilon B(E))]:V\in R(x^{**}),\ \varepsilon>0\}$ является системой образующих фильтра Коши, т. е. порождает фильтр Коши в W. Остается заметить, что $\forall V\in R(x^{**})$ справедливо $[A(V)]=\bigcap\{[A(V+\varepsilon B(E))]:\varepsilon>0\}$.

Теорема 1. *Пусть* A — *уплотняющий. Построим* $\bar{A}:E^{**}\to W$, *положив*

$$\{\bar{A}x^{**}\}=\bigcap\{[A(V)]:V\in R(x^{**})\},\quad x^{**}\in E^{**}.$$

Тогда $\bar{A}$ *есть линейный непрерывный оператор из* E^{**} *в* W, *причем* $\bar{A}(B(E^{**}))\subset[A(B(E))]$ *и* $\bar{A}(\pi x)=Ax$ *для* $x\in E$.

Доказательство. Пусть x^{**}, $y^{**}\in E^{**}$. Ясно, что $\{V_1+V_2:V_1\in R(x^{**}),\ V_2\in R(y^{**})\}\subset\{V:V\in R(x^{**}+y^{**})\}$, поэтому фильтр Коши, порожденный $\{[A(V)]:V\in R(x^{**}+y^{**})\}$, содержит фильтр, порожденный $\{[A(V_1)+A(V_2)]:V_1\in R(x^{**}),\ V_2\in R(y^{**})\}$. Но второй фильтр тоже, очевидно, есть фильтр Коши. Следовательно, $\bar{A}(x^{**}+y^{**})=\bar{A}(x^{**})+\bar{A}(y^{**})$. Аналогично проверяется однородность $\bar{A}$. Если $\|x^{**}\|\leqslant 1$, то $B(E)\in R(x^{**})$, поэтому $\bar{A}(B(E^{**}))\subset[A(B(E))]$. Наконец, так как $\{x\}\in R(\pi x)$, то $\bar{A}(\pi x)=Ax$ $\forall x\in E$.

Следующее предложение показывает, что в случае локально-выпуклого W класс уплотняющих операторов из E в W совпадает с классом слабо компактных операторов.

Предложение 1. *Если* W *локально-выпукло, то* A — *уплотняющий тогда и только тогда, когда он слабо компактен, причем в этом случае*

$$A^{**}(x^{**})=\gamma\bar{A}(x^{**}),\ x^{**}\in E^{**},\tag{*}$$

где A^{**} — *второй сопряженный оператор к* A, *а* $\gamma:W\to W^{**}$ — *оператор канонического вложения.*

Доказательство. Пусть A — уплотняющий. Докажем (*). Фиксируем $x^{**}\in E^{**}$. Положим $R_0(x^{**})=\{V\in R(x^{**}):V$ ограничено по норме$\}$. Для всех $V\in R_0(x^{**})$ имеем $x^{**}\in V^\sigma$, откуда $A^{**}(x^{**})\in A^{**}(V^\sigma)$. Но $A^{**}(V^\sigma)$ совпадает с $\sigma(W^{**},W^*)$ — замыканием множества $\gamma A(V)=A^{**}(\pi V)$. Следовательно, $\{A^{**}(V^\sigma):V\in R_0(x^{**})\}$ порождает фильтр Коши относительно сильной топологии в W^{**}. Так как, очевидно, $A^{**}(V^\sigma)\supset\gamma([A(V)])$ $\forall V\in R_0(x^{**})$, то ясно, что $A^{**}(x^{**})=\gamma\bar{A}(x^{**})$. Итак, (*) доказано. Теперь имеем $A^{**}(E^{**})\subset\gamma W$, тем самым, A слабо компактен.

Пусть A слабо компактен. Фиксируем $x^{**}\in E^{**}$ и $U\in\mathfrak{U}(W)$. Найдется ограниченное по норме направление $x_\lambda\in E$ $(\lambda\in\Lambda)$ такое, что $\pi x_\lambda\to x^{**}$ в топологии $\sigma(E^{**},E^*)$. Так как A слабо компактен, то можно считать, что $Ax_\lambda\to w\in W$ в сильной топологии в W. Положим $V=A^{-1}(w+U')$, где U' — абсолютно выпуклая окрестность нуля в W такая, что $U'+U'\subset U$. Ясно, что $V\in R(x^{**})$ и $A(V)-A(V)\subset U$. Тем самым, A — уплотняющий.

§ 2. Правильные множества и уплотняющие вложения

Определение 2. Непустая система подмножеств заданного множества называется *центрированной*, если любая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение.

Определение 3. Множество $C\subset W$ будем называть *правильным*, если оно ограничено, выпукло, замкнуто и удовлетворяет следующему условию, которое будем называть *условием правильности*: для любой центрированной системы выпуклых множеств $K_\xi\subset C$ и любой $U\in\mathfrak{U}(W)$ существует выпуклое $V\subset C$ такое, что $V-V\subset U$ и $V\cap K_\xi\neq\varnothing$ $\forall\xi$.

Ясно, что в случае локально-выпуклого W для любого ограниченного, выпуклого, замкнутого множества правильность эквивалентна слабой компактности. Далее мы покажем, что в общем случае правильные множества обладают рядом свойств, присущих слабо компактным выпуклым множествам.

До конца этого параграфа пусть B есть ограниченное замкнутое абсолютно выпуклое множество в W. Через E обозначаем линейную оболочку B, за норму в E принимаем функционал Минковского множества B. С указанной нормой E является банаховым пространством. Через $\pi:E\to E^{**}$ обозначаем оператор канонического вложения, $I:E\to W$ — тождественный оператор вложения.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(а) *B правильно в W*;

(б) *оператор I — уплотняющий*.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $x^{**}\in E^{**}$, $\|x^{**}\|<1$. Фиксируем произвольное множество $U\in\mathfrak{U}(W)$. Нужно найти такое $K\in R(x^{**})$, что $K-K\subset U$. Так как $B\in R(x^{**})$, то в силу леммы 2 система множеств $\{(V+\varepsilon B)\cap B: V\in R(x^{**}),\ \varepsilon>0\}$ центрирована. Поэтому существует выпуклое $K\subset B$ такое, что $K-K\subset U$ и $K\cap(V+\varepsilon B)\cap B\neq\varnothing$ $\forall V\in R(x^{**})$ $\forall\varepsilon>0$. Ясно, что $K\in R(x^{**})$, поэтому K — требуемое.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $K_\xi\subset B$ — произвольная центрированная система выпуклых множеств и пусть $U\in\mathfrak{U}(W)$. Возьмем любой $x^{**}\in\bigcap K_\xi^\sigma$. Ясно, что $K_\xi\in R(x^{**})$ $\forall\xi$. Так как I — уплотняющий, то найдутся $K\in R(x^{**})$ и число $\varepsilon>0$ такие, что для $V=(K+\varepsilon B)\cap B$ будет $V-V\subset U$. Остается заметить, что $V\cap K_\xi=(K+\varepsilon B)\cap K_\xi\in R(x^{**})$ $\forall\xi$ в силу леммы 1.

Теорема 3. *Пусть B правильно и $P=\bar I$, где $\bar I:E^{**}\to W$ дается теоремой 1. Тогда $P(E^{**})=E$ и $Px=x$ для $x\in E$. Тем самым πP есть проектор единичной нормы из E^{**} на $\pi(E)$. Кроме того, для любого выпуклого $V\subset B$ следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *V замкнуто в W*;

(б) *$P(V^\sigma)=V$, где V^σ есть $\sigma(E^{**},E^*)$ — замыкание $\pi(V)$*.

Доказательство. Первое утверждение прямо следует из теоремы 1. Доказываем (а) $\Rightarrow$ (б). Ясно, что $P(V^\sigma)\supset V$. С другой стороны, $\forall x^{**}\in V^\sigma$ имеем $V\in R(x^{**})$, откуда $P(x^{**})\in[V]=V$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Допустим, что $V\neq[V]$. Можно считать, что $0\notin V$, $0\in[V]$. Пусть $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ — базис окрестностей нуля в W, состоящий из замкнутых симметричных множеств, причем $U_{n+1}+U_{n+1}\subset U_n$ $\forall n$. Для любого n возьмем произвольную точку $x_n\in V\cap U_n$ и положим $T_n=\operatorname{conv}\{x_i: i\geqslant n+1\}$. Ясно, что $T_n\subset V\cap U_n$. Возьмем произвольную точку $x^{**}\in\bigcap_n T_n^\sigma$. Тогда $T_n\in R(x^{**})$ $\forall n$, следовательно, $P(x^{**})\in\bigcap_n[T_n]=\{0\}$. Тем самым $P(x^{**})=0\in V$. Противоречие.

Пусть $e\in\Sigma$ таково, что $\mu e<\varepsilon$ и $x_s^{**}(f\chi_e)=x_s^{**}(f)\ \forall f\in L^\infty(T,\Sigma,\mu)$, тогда $V=\{x\chi_e : x\in E\}$ — искомое.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть C — выпуклое замкнутое множество в W, обладающее следующим свойством: $\forall\varepsilon>0$ существуют выпуклое множество $M\subset W$ и число λ такие, что $\delta(M)<\varepsilon$ и $C\subset M+\lambda B$. Тогда C — правильное.*

Предложение 9. *Пусть C — выпуклое замкнутое множество в W, не содержащее никакой прямой и удовлетворяющее условию $(x\in C,\ y\in W,\ |y|\leqslant|x|)\Rightarrow(y\in C)$. Тогда C — правильное.*

Доказательство. Из теории банаховых решеток хорошо известно, что найдется $z\in W$ такое, что $z(t)>0$ для почти всех $t\in T$ и $\int\limits_T |xz|\,d\mu\leqslant 1\ \ \forall x\in C$. Теперь требуемое легко вытекает из теоремы 5.

Замечание. С. В. Кисляков обратил внимание автора на то, что в $S[0, 1]$ существует ограниченное выпуклое замкнутое множество, не являющееся правильным. Именно, известно, что существует линейный топологический изоморфизм пространства l^1 на некоторое (замкнутое) подпространство в $S[0, 1]$. Пусть C есть образ шара $B(l^1)$ в $S[0, 1]$ при указанном изоморфизме. Множество C ограничено, выпукло и замкнуто в $S[0, 1]$, но не является правильным. Действительно, так как пространство l^1 не рефлексивно, то в C существует убывающая последовательность непустых выпуклых замкнутых подмножеств с пустым пересечением; в силу предложения 3 отсюда следует, что C — неправильное.

В заключение приведем еще один результат, легко вытекающий из предыдущих.

Предложение 10. *Пусть X есть произвольная банахова решетка, являющаяся идеалом в W* (последнее означает, что X есть векторное подпространство в W, причем $(x\in X,\ y\in W,\ |y|\leqslant|x|)\Rightarrow(y\in X)$). *Тогда оператор вложения $X\to W$ — уплотняющий.*

В заключение хочу выразить благодарность Б. М. Макарову, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний.

Поступила в редакцию
19 февраля 1974 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я.* О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций. Докл. АН СССР, 212, № 6 (1973), 1273—1275.

2 *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 46—66.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 1 (188)

УДК 513.88

Г. Я. Лозановский

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА

В работе Т. Андо [1] было построено представление пространства, сопряженного к пространству Орлича, в виде некоторого пространства конечно аддитивных мер. Конструкция Андо весьма остроумна, но существенно основана на использовании специфических свойств пространств Орлича. С другой стороны, в [2], [3] была построена реализация пространства регулярных функционалов на совершенно произвольном K-пространстве („каноническая реализация“). При канонической реализации, однако, функционалам соответствуют не меры, а объекты несколько более общей природы — элементы максимального расширения пространства мер. В настоящей заметке получен общий критерий существования канонической реализации, при которой функционалам соответствуют именно меры и тем самым не нужно использовать указанное максимальное расширение (предложение 1 и теорема 3). С помощью этого критерия показано, что, напр., для пространств $M_\alpha (0<\alpha<1)$ ситуация в принципе отличается от той, которая имеет место для пространств Орлича: M_α^* не допускает представления в виде какого-нибудь пространства мер, если требовать, чтобы положительному функционалу соответствовала положительная мера (см. теорему 1 и замечание 1). Однако, используя специфические свойства M_α, анормальную часть пространства M_α^* можно представить в виде объединения „одинаковых“ компонент, допускающих удобное представление в виде пространства мер (теорема 2); напомним в связи с этим, что вполне линейная часть пространства M_α^* естественным образом отождествима с пространством Лоренца Λ_α.

§ 1. Терминология и обозначения

Сопряженное к нормированному пространству E обозначается через E^*. В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы в основном следуем [4]. Напомним некоторые понятия. Пусть X есть K-пространство (т. е. векторная решетка, в которой всякое ограниченное сверху множество имеет супремум). Элементы $x, y \in X$ называются *дизъюнктными* (обозначение: $x\,\mathrm{d}\,y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Дизъюнктным дополнением множества $H \subset X$ называется множество $H^d = \{x \in X : x\,\mathrm{d}\,y$ для $\forall y \in H\}$. Множество $H \subset X$ называется *компонентой* (*полосой* по терминологии Бурбаки), если $H = H^{dd}$. Элемент $1 \in X$ называется *единицей* (или слабой единицей), если $x \wedge 1 > 0$ для $\forall x > 0$, $x \in X$. Компонента называется *главной*, если она является пространством с единицей. Векторное подпространство Y в X называется *идеалом*, если $(x \in X,\ y \in Y,\ |x| \leqslant |y|) \Rightarrow \Rightarrow (x \in Y)$. Идеал Y в X называется *фундаментом*, если $Y^d = \{0\}$. Элемент $x \in X$ будем называть элементом *счетного типа*, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных, положительных и непревосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счетно. X называется пространством счетного типа, если все элементы из X счетного типа. Через $\widetilde{X}$ обозначается пространство всех регулярных функционалов на X (функционал называется *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных линейных функционалов). Через $\overline{X}$ обозначается пространство всех *вполне линейных* (т. е. порядково непрерывных) функционалов. $\widetilde{X}_{an}$ — множество всех анормальных функционалов (функционал $f \in \widetilde{X}$ называется *анормальным*, если он аннулируется на некотором фундаменте в X). Под функционалом счетного типа понимается такой $f \in \widetilde{X}$, который счетного типа как элемент K-пространства $\widetilde{X}$.

КВ-линеалом называется банахова решетка, т. е. векторная решетка, на которой задана монотонная банахова норма. Напомним, что для любого KB-линеала X справедливо $X^* = \widetilde{X}$. *КВ-пространством* называется KB-линеал, в котором всякая монотонная ограниченная по норме последовательность сходится в нормированной топологии. Известно, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон (теорема Огасавара). Норма в KB-линеале X называется *аддитивной*, если $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ для $\forall x,\ y \in X_+$. KB-линеал с аддитивной нормой является KB-пространством; он называется также (L)-пространством (в смысле Какутани).

§ 2. О представлении сопряженных пространств к банаховым функциональным пространствам

Пусть далее всюду: μ — мера Лебега на $[0, 1]$; Σ — алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств из $[0, 1]$; S — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на $[0, 1]$ (эквивалентные функции и множества, как обычно, отождествляются); $L^\infty = L^\infty[0, 1]$; $L^1 = L^1[0, 1]$; $ba(\Sigma)$ — пространство всех определенных на Σ ограниченных аддитивных функций, которые обращаются в нуль на множествах нулевой меры μ (нормой элемента из $ba(\Sigma)$ служит его полная вариация).

Напомним, что пространство $(L^\infty)^*$ естественным образом изометрически изоморфно пространству $ba(\Sigma)$ (см., напр., [5], с. 322).

Банаховым функциональным пространством (б. ф. п.) на $[0, 1]$ называется банахово пространство X, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию

$$(x \in X,\ y \in S,\ |y| \leqslant |x|) \Rightarrow (y \in X,\ \|y\| \leqslant \|x\|).$$

Всюду далее будем считать, что X есть б. ф. п. на $[0, 1]$, *носитель* которого совпадает с $[0, 1]$ (последнее означает, что не существует $e \in \Sigma$ такого, что $\mu e > 0$ и $\forall x \in X$ сужение $x|_e = 0$).

Дуальным пространством к X называется б. ф. п. X', состоящее из всех $x' \in S$ таких, что

$$\|x'\|_{X'} = \sup\left\{\int_0^1 |xx'|\,d\mu : x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\right\} < +\infty.$$

Напомним (см., напр., [3]), что пространство X' естественным образом можно отождествить с $\overline{X}$, если по любому $x' \in X'$ построить функционал $f \in \overline{X}$ по формуле

$$f(x) = \int_0^1 xx'\,d\mu,\ x \in X.$$

Напомним также, что X^*_{an} есть компонента в X^*, причем $X^* = \overline{X} \oplus X^*_{an}$, т. е. каждый $f \in X^*$ однозначно представим в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in \overline{X}$, $f_2 \in X^*_{an}$.

Когда говорят о конкретном представлении пространства X^*, то обычно имеют в виду следующую задачу: построить взаимно-однозначный линейный непрерывный оператор $A: X^* \to ba(\Sigma)$, удовлетворяющий тем или иным дополнительным условиям. По-видимому, во всяком случае естественно требовать, чтобы было $A > 0$, т. е. $Af > 0$ при $f > 0$. Задачу о конкретном представлении можно, разумеется, ставить не для всего пространства X^*, а только для произвольной компоненты K в X^*.

Определение. *Пусть K есть произвольная компонента в X^*. Представлением K будем называть всякий линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор $A: K \to ba(\Sigma)$ такой, что $A > 0$. Через $\mathfrak{R}(K)$ будем обозначать множество всех представлений K.*

Следующее предложение дает критерий непустоты множества $\mathfrak{R}(K)$.

Предложение 1. *Пусть K — произвольная компонента в X^** (случай $K = X^*$, разумеется, не исключается). *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *множество $\mathfrak{R}(K)$ не пусто*;

б) *существует $A \in \mathfrak{R}(K)$ такой, что $A(f \vee g) = Af \vee Ag$ для любых $f, g \in K$*;

в) *существует $A \in \mathfrak{R}(K)$ такой, что $A(K)$ есть идеал в $ba(\Sigma)$ и A есть векторно-решеточный изоморфизм K на $A(K)$*;

г) *существует существенно положительный $F \in K^*$, т. е. такой, что $F(f) > 0$, если $f \in K$ и $f > 0$.*

Мы не будем доказывать предложение 1, ибо оно является очевидным следствием теоремы 3, которая будет сформулирована и доказана в § 4.

Замечание 1. Из предложения 1 очевидным образом вытекает следующее. Для того, чтобы для компоненты K в X^* были справедливы утверждения а) — г) предложения 1, необходимо (а если K — главная компонента, то и достаточно), чтобы K была пространством счетного типа.

Замечание 2. Ясно, что представление пространства X^* существует тогда и только тогда, когда существует представление пространства X^*_{an}. В работе Т. Андо [1] было показано, что, если

X есть пространство Орлича, то X^*_{an} есть KB-пространство с аддитивной нормой и дана конструкция соответствующего представления. Разумеется, всякий раз, когда X^*_{an} есть KB-пространство с аддитивной нормой для $K = X^*_{an}$, справедливо утверждение г) (а значит, и остальные утверждения) предложения 1.

§ 3. Случай пространств Марцинкевича

Для $x \in S$ через x^* обозначим невозрастающую перестановку функции $|x|$. Всюду далее ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0, 1]$ функция такая, что $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = +\infty$. Дополнительные ограничения на ψ будут каждый раз особо оговариваться. Полагаем также $\theta(t) = \frac{\psi(t)}{t}$; $t \in (0, 1]$. Функция θ не возрастает на $(0, 1]$.

Пространство Марцинкевича $M(\psi)$ состоит из всех $x \in S$ таких, что

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h\leqslant 1} \frac{1}{\psi(h)} \cdot \int_0^h x^* d\mu < +\infty.$$

Через $M_0(\psi)$ обозначим замыкание L^∞ в $M(\psi)$ с нормой, индуцированной из $M(\psi)$. Напомним, что $M(\psi)' = \Lambda(\psi)$, где пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ состоит из всех $x \in S$ таких, что

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^* d\psi < +\infty.$$

Нам понадобятся некоторые известные факты о пространствах Марцинкевича. Прежде всего отметим (см. [6], с. 44), что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,1]} \frac{x^*(t)}{\theta(t)} \leqslant \|x\|_{M(\psi)}, \quad \forall x \in M(\psi). \tag{1}$$

Теорема А. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *функция* ψ *удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1; \tag{2}$$

б) $\theta \in M(\psi)$;

в) *существует константа* $c > 0$ *такая, что*

$$c\|x\|_{M(\psi)} \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,1]} \frac{x^*(t)}{\theta(t)}, \quad \forall x \in M(\psi);$$

г) *пространство* $M(\psi)^*$ *счетного типа;*

д) *пространство* $M(\psi)^*$ *есть* KB-*пространство.*

Эквивалентность а), б), в) доказана в [6] (с. 44); эквивалентность а), г), д) доказана в [7] (с. 74).[1]

Нам понадобится также следующий факт из общей теории векторных решеток (см. [7], с. 70).

Теорема Б. *Пусть Z КВ-линеал, $f \in Z^*$. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *f — счетного типа;*

б) *существует $u \in Z_+$ такое, что*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f((x \wedge nu) \vee (-nu)), \quad \forall x \in Z.$$

Следующая теорема является одним из основных результатов настоящей работы.

Теорема 1. *Если существует $F \in M(\psi)^{**}$ существенно положительный на $M(\psi)^*$ (т. е. такой, что $F(f) > 0$ при $f > 0$, $f \in M(\psi)^*$), то выполнено (2) и*

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2. \tag{3}$$

Таким образом, условия (2) и (3) необходимы для существования представления пространства $M(\psi)^*$.

Доказательство. Так как существует $F \in M(\psi)^{**}$ существенно положительный на $M(\psi)^*$, то $M(\psi)^*$-счетного типа и в силу теоремы А выполнено (2). Доказываем, что выполнено (3).

Лемма 1. *Для любой последовательности $h = (h_n)$ такой, что $h_n > 0$, $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ существует константа $c(h) > 0$, для которой*

$$c(h) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\psi(mh_n)}{m\psi(h_n)}, \quad \forall m = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Для доказательства леммы фиксируем какой-нибудь обобщенный предел Lim (см. [8], с. 144) и для $t \in (0, 1)$ положим

$$f^t(x) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(h_n)} \int_t^{t+h_n} x\,d\mu, \quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $0 < f^t \in M(\psi)^*$, $\|f^t\| = 1$. Возьмем произвольные попарно различные $t_1, t_2, \ldots, t_m \in (0, 1)$ и оценим норму суммы $\sigma = \sum_{i=1}^{m} f^{t_i}$. Фиксируем $\delta > 0$ настолько малое, что промежутки $\Delta_i = [t_i - \delta, t_i + \delta]$ $(i = 1, \ldots, m)$ попарно дизъюнктны и содержатся в $(0, 1)$. Фиксируем также $\varepsilon > 0$. Найдется $x \in M(\psi)_+$ такой, что $\|x\| = 1$, $\sigma(x) \geqslant \|\sigma\| - \varepsilon$. Можно очевидно считать, что носитель x содержится в $\bigcup_{k=1}^{m} \Delta_k$. Пусть Р есть множество всех перестановок из чисел $1, \ldots, m$. Для $p \in$ Р через x^p обозначим элемент, который получается

---

[1] Если $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, то в $M(\psi)^*$ существует порядково ограниченное множество мощности континуум, состоящее из ненулевых попарно дизъюнктных элементов. Сказанное усиливает теорему 4 из [7]; доказательство этого факта аналогично доказательству упомянутой теоремы.

из x следующим образом. Если $p(i)=j$, то $x^p(t)=x(t-t_j+t_i)$ при $t\in\Delta_j$ и $x^p(t)=0$ при $t\notin\bigcup_{k=1}^{m}\Delta_k$. Из соображений симметрии ясно, что $\sigma(x)=\sigma(x^p)$ и $\|x^p\|=\|x\|=1$ для $\forall p\in\mathrm{P}$. Положим

$$y=\frac{1}{m!}\sum_{p\in\mathrm{P}}x^p.$$

Ясно, что $\|y\|\leqslant 1$, $\sigma(y)=\sigma(x)\geqslant\|\sigma\|-\varepsilon$. Заметим, что для $\forall i,\ j=1,\ldots,m$ функции $y\chi_{\Delta_i}$ и $y\chi_{\Delta_j}$ равноизмеримы (здесь χ_e означает характеристическую функцию e). Пусть $z=(y\chi_{\Delta_1})^*$. Ясно, что

$$\|y\|=\sup_{0<\tau\leqslant 1}\frac{1}{\psi(\tau)}\cdot\int_0^\tau y^*(t)\,dt=\sup_{0<\tau\leqslant m^{-1}}\frac{m}{\psi(m\tau)}\cdot\int_0^\tau z(t)\,dt;$$

$$\sigma(y)\leqslant m\,\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(h_n)}\cdot\int_0^{h_n}z(t)\,dt.$$

Теперь имеем

$$\sigma(y)\leqslant m\,\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(h_n)}\cdot\int_0^{h_n}z(t)\,dt=m\,\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\psi(mh_n)}\cdot\int_0^{h_n}z(t)\,dt\right\}\cdot\frac{\psi(mh_n)}{\psi(h_n)}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{m}{\psi(mh_n)}\cdot\int_0^{h_n}z(t)\,dt\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\psi(mh_n)}{\psi(h_n)}\leqslant\|y\|\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\psi(mh_n)}{\psi(h_n)}.$$

Итак,

$$\|\sigma\|-\varepsilon\leqslant\sigma(y)\leqslant\|y\|\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\psi(mh_n)}{\psi(h_n)}.$$

Так как $\|y\|\leqslant 1$, а $\varepsilon>0$ произвольно, то

$$\|\sigma\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\psi(mh_n)}{\psi(h_n)}.\tag{5}$$

Заметим, что $F(f^t)>0$ для $\forall t\in(0,1)$. Следовательно существует константа $c(h)>0$ и последовательность попарно различных $t_n\in(0,1)$ $(n=1,2,\ldots,)$ таких, что $F(f^{t_n})\geqslant c(h)$ для любого n. Можно считать, что $\|F\|=1$. Тогда для $m=1,2,\ldots,$ в силу (5) имеем

$$mc(h)\leqslant\sum_{i=1}^{m}F(f^{t_i})\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{m}f^{t_i}\right\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\psi(mh_n)}{\psi(h_n)},$$

откуда следует (4). Итак, лемма 1 доказана.

Продолжаем доказательство теоремы. Фиксируем любую последовательность $h=(h_n)$, удовлетворяющую условиям леммы 1. Обозначим $q=\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$. Для $k=1, 2, \ldots$ имеем $\psi(2^k h_n)/\psi(h_n)=\prod\limits_{i=1}^{k}\psi(2^i h_n)/\psi(2^{i-1}h_n)$, откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\psi(2^k h_n)}{\psi(h_n)}\leqslant q^k$. В силу леммы 1 теперь имеем $c(h)\leqslant\frac{q^k}{2^k}$ для $k=1, 2, \ldots$ Поэтому $q\geqslant 2$. Но из свойств функции ψ очевидно следует, что всегда $q\leqslant 2$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Среди пространств Марцинкевича важную роль играют пространства M_α, т. е. пространства $M(\psi)$ с $\psi(t)=t^\alpha$, где $0<\alpha<1$. Очевидно, что для них условие (3) не выполнено. Тем самым случай пространств M_α в корне отличается от случая пространств Орлича. Однако, как показывает следующее предложение, для одного класса функций ψ ситуация аналогична случаю пространств Орлича. Напомним в связи с этим, что некоторые пространства Марцинкевича являются одновременно и пространствами Орлича (см. [9], [10]).

Предложение 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) $M(\psi)^*_{an}$ *с точностью до эквивалентной перенормировки является KB-пространством с аддитивной нормой;*

б) ψ *удовлетворяет условию* (2) *и*

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{n\psi(t)}{\psi(nt)}<+\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что левая часть (6) всегда имеет смысл, ибо при фиксированном t последовательность $\left(\frac{n\psi(t)}{\psi(nt)}\right)$ $(n=1, 2, \ldots,)$ не убывает. Заметим также, что пространство $M(\psi)^*_{an}$ естественным образом можно отождествить с сопряженным к факторпространству $M(\psi)/M_0(\psi)$.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть Z есть KB-линеал,* $p(Z)=\sup\{\|z\|: z\in Z,$ $z=\sup\limits_{i=1}^{n}z_i$, *где* $z_i\wedge z_j=0\ (i\neq j)$ *и* $\|z_i\|\leqslant 1\}$. *Для того, чтобы Z с точностью до эквивалентной перенормировки было KB-пространством с аддитивной нормой, необходимо и достаточно, чтобы было* $p(Z)<\infty$.

Справедливость леммы прямо следует из теоремы 5 [11]. Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 3. *Пусть* $\gamma: M(\psi)\to M(\psi)/M_0(\psi)$ — *канонический гомоморфизм. Тогда для* $\forall x\in M(\psi)$ *справедливо*

$$\|\gamma x\|=\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{\psi(h)}\cdot\int\limits_0^h x^*(t)\,dt=\lim_{\epsilon\to 0}\|x\chi_{[0,\epsilon]}\|.$$

Лемма 4. *Пусть* $x\in M(\psi)_+$, $\|x\|\leqslant 1$. *Тогда существует* $y\in M(\psi)_+$ *такой, что* $x\leqslant y$ *и* $y^*=\Theta$.

Справедливость этой леммы вытекает из (1) и теоремы Риффа (см. [12], с. 49).

Продолжим доказательство предложения 2. Заметим, что а) $\Rightarrow$ (2) в силу теоремы А, поэтому при доказательстве эквивалентности а) и б) заранее можно считать, что условие (2) выполнено. Обозначим через V множество всех $x \in M(\psi)_+$ таких, что x^* есть осколок элемента Θ, т. е. $(\Theta - x^*) \, \mathrm{d} \, x^*$. Возьмем произвольные попарно дизъюнктные $x_1, \ldots, x_n \in V$ и положим $x = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Из [12] (с. 28) следует, что $x^*(t) = \Theta(t/n)$ для достаточно малых $t > 0$. Положим $\Theta_n(t) = \Theta(t/n)$. Из теоремы А, лемм 2, 4 и сказанного перед леммой 2 теперь следует, что а) эквивалентно условию

$$\varlimsup_{n \to \infty} \| \gamma \Theta_n \| < \infty.$$

В силу (1), теоремы А и леммы 3 последнее условие равносильно тому, что

$$\lim_{n \to \infty} \varlimsup_{t \to 0} \frac{\Theta_n(t)}{\Theta(t)} < \infty.$$

Теперь остается заметить, что $\dfrac{\theta_n(t)}{\theta(t)} = \dfrac{n\psi(t/n)}{\psi(t)}$, откуда $\lim\limits_{n \to \infty} \varlimsup\limits_{t \to 0} \dfrac{\theta_n(t)}{\theta(t)} = \lim\limits_{n \to \infty} \varlimsup\limits_{t \to 0} \dfrac{n\psi(t)}{\psi(nt)}$. Предложение 2 доказано.

Замечание. Если $\lim\limits_{t \to 0} \psi(2t)/\psi(t) = 2$, то, как нетрудно проверить, выполнено условие (6). Следовательно, в этом случае для пространства $M(\psi)$ справедливы утверждения а) и б) предложения 2.

Напомним, что положительный линейный функционал f на векторной решетке Y называется *дискретным*, если $f(y_1 \vee y_2) = \max\{f(y_1), f(y_2)\}$ для любых $y_1, y_2 \in Y$. Если, напр., $Y = C(B)$, где B — бикомпакт, то каждая точка $t \in B$ порождает дискретный функционал f по формуле $f(y) = y(t)$. Из результатов [1], в частности, следует, что, если Y есть несепарабельное пространство Орлича на [0, 1], то на Y существуют нетривиальные дискретные функционалы. Следующее предложение дает критерий существования нетривиальных дискретных функционалов на пространстве Марцинкевича.

Предложение 3. *Для того, чтобы на $M(\psi)$ существовал нетривиальный дискретный функционал, необходимо и достаточно, чтобы было* $\varlimsup\limits_{t \to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2$.

Мы опускаем доказательство предложения 3, но заметим, что оно основано на предложении 6 из [7].

До конца этого параграфа будем предполагать, что выполнено условие (2), но никаких других условий на ψ не накладываем. Напомним, что мера $\nu \in ba(\Sigma)$ называется *чисто конечно аддитивной* (см. [13]), если ν соответствует анормальному функционалу на L^∞.

Определение. Через $N(\psi)$ будем обозначать пространство всех чисто конечно аддитивных $\nu \in ba(\Sigma)$, таких, что

$$\|\nu\|_{N(\psi)} = \sup\left\{ \int_0^1 y \, d\nu : y \in L^\infty, \ \| y\Theta \|_{M(\psi)} \leqslant 1 \right\} < +\infty.$$

Ясно, что $N(\psi)$ есть идеал в $ba(\Sigma)$ и каждая $\nu \in N(\psi)$ обладает следующим свойством: для $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ справедливо $|\nu|([\varepsilon, 1]) = 0$.

Определение. *Для* $\nu \in N(\psi)$ *через* f^{ν} *будем обозначать функционал на* $M(\psi)$, *действующий по формуле*

$$f^{\nu}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{(x \wedge n\theta) \vee (-n\theta)}{\theta}\, d\nu, \quad x \in M(\psi).$$

Из самих определений непосредственно следует, что

$$f^{\nu} \in M(\psi)^{*}_{an}, \quad \|f^{\nu}\|_{M(\psi)^{*}} = \|\nu\|_{N(\psi)}.$$

Лемма 5. *Отображение* $\nu \to f^{\nu}$ *есть изометрический изоморфизм* $N(\psi)$ *на некоторую компоненту в* $M(\psi)^{*}_{an}$. *Эта компонента состоит из всех* $f \in M(\psi)^{*}_{an}$, *удовлетворяющих условию*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f((x \wedge n\Theta) \vee (-n\Theta)); \quad \forall x \in M(\psi).$$

Несложное доказательство этой леммы опускаем.

Определение. *Автоморфизмом отрезка* $[0, 1]$ *будем называть взаимнооднозначное отображение* α *отрезка* $[0, 1]$ *на* $[0, 1]$ *такое, что для* $\forall e \in \Sigma$ *справедливо* $\alpha(e)$, $\alpha^{-1}(e) \in \Sigma$, *причем* $\mu e = \mu\alpha^{-1}(e) = \mu\alpha(e)$. *Совокупность всех автоморфизмов отрезка* $[0, 1]$ *будем обозначать через* $\mathfrak{A}$.

Определение. *Пусть* $\alpha \in \mathfrak{A}$. *Через* $\hat{\alpha}$ *обозначаем изометрический изоморфизм* $M(\psi)$ *на* $M(\psi)$, *действующий по формуле* $(\hat{\alpha}x)(t) = x(\alpha(t))$, *где* $x \in M(\psi)$, $t \in [0, 1]$. *Для* $\nu \in N(\psi)$ *через* $\alpha^{*}\nu$ *обозначаем функционал на* $M(\psi)$, *действующий по формуле*

$$(\alpha^{*}\nu)(x) = f^{\nu}(\hat{\alpha}x), \quad x \in M(\psi).$$

Таким образом, $\alpha^{*} : N(\psi) \to M(\psi)^{*}_{an}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда:*

а) *для* $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ *множество* $\alpha^{*}(N(\psi))$ *есть компонента в* $M(\psi)^{*}_{an}$, *причем* α^{*} *есть изометрический изоморфизм* $N(\psi)$ *на указанную компоненту;*

б) *если* K *есть произвольная главная компонента в* $M(\psi)^{*}_{an}$, *то* $\exists \alpha \in \mathfrak{A}$ *такое, что* $\alpha^{*}(N(\psi)) \supset K$.

Доказательство. Справедливость а) прямо следует из леммы 5 и того, что $\hat{\alpha}$ есть автоморфизм пространства $M(\psi)$. Доказываем б). Пусть g есть слабая единица в K. В силу предложения Б найдется $u \in M(\psi)_{+}$ такое, что

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g((x \wedge nu) \vee (-nu)), \quad \forall x \in M(\psi). \tag{9}$$

Можно считать, что $\|u\| \leqslant 1$. Тогда по теореме Риффа (см. [12], с. 49]) найдется $\alpha \in \mathfrak{A}$ такой, что $u \leqslant \hat{\alpha}^{-1}\Theta$. Рассмотрим функционал $h(x) = g(\hat{\alpha}^{-1}x)$, $x \in M(\psi)$. Для $\forall x \in M(\psi)_{+}$ имеем $h(x \wedge n\Theta) = g(\hat{\alpha}^{-1}(x \wedge n\Theta)) = g(\hat{\alpha}^{-1}x \wedge n\hat{\alpha}^{-1}\Theta) \geqslant g(\hat{\alpha}^{-1}x \wedge nu) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(\hat{\alpha}^{-1}x) = h(x)$, откуда и подавно

$$\lim_{n\to\infty} h(x \wedge n\Theta) = h(x), \quad \forall x \in M(\psi)_{+}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $h = f^{\nu}$ для некоторой $\nu \in N(\psi)$. Следовательно, $f^{\nu}(x) = g(\hat{\alpha}^{-1}x)$, откуда $g(x) = f^{\nu}(\hat{\alpha}x)$ для $\forall x \in M(\psi)$. Тем самым $g = \alpha^{*}\nu$. Так как $\alpha^{*}(N(\psi))$ есть компонента в $M(\psi)^{*}_{an}$ и $\alpha^{*}(N(\psi)) \ni g$, то $\alpha^{*}(N(\psi)) \supset K$. Теорема доказана.

Замечание 3. Условие (2), разумеется, существенно для справедливости теоремы 2. Действительно, если условие (2) не выполнено, то в $M(\psi)^{*}_{an}$ существуют главные компоненты, не являющиеся пространствами счетного типа, которые, тем самым, не могут быть изоморфны никакому идеалу в $ba(\Sigma)$.

§ 4. О реализации пространств регулярных функционалов

В работах [2], [3] была построена реализация пространства регулярных функционалов на произвольном K-пространстве. Именно, пусть W — расширенное K-пространство с фиксированной единицей $\mathbf{1}$, M — идеал ограниченных элементов в нем (т. е. наименьший идеал, содержащий $\mathbf{1}$), X и Y — любые идеалы в W. Для $f \in \widetilde{X}$, $u \in X_{+}$ полагаем $f_{(u)}(x) = f(xu)$, $x \in M$. Ясно, что $f_{(u)} \in \widetilde{M}$. Произвольные функционалы $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$ называются *дизъюнктными* (обозначение: $f \mathrm{D} g$), если функционалы $f_{(u)}$, $g_{(v)}$ дизъюнктны в обычном смысле как элементы K-пространства $\widetilde{M}$ для любых $u \in X_{+}$, $v \in Y_{+}$. Пусть в K-пространствах[1] $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ фиксированы произвольные единицы $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$ (соответственно). В [2], [3] установлена следующая

Теорема В. *Существует единственная пара* (R_X, V_X), *где* V_X *компонента в* $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, *а* R_X — *изоморфизм* K-*пространства* $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ *на* V_X, *удовлетворяющая условиям*:

1) *Для любых* $f \in \widetilde{X}$ *и* $g \in \widetilde{M}$ *соотношения* $f \mathrm{D} g$ *и* $R_X f \mathrm{d} g$ *равносильны*;

2) $R_X(\mathbf{1}_1) = Pr_{V_X} \mathbf{1}_2$.

Оператор R_X называется *канонической реализацией* пространства $\widetilde{X}$.

Оператор R_X зависит от выбора единиц $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$. Заметим также, что $R_X(\widetilde{X}) \subset \mathfrak{M}(\widetilde{M})$, но, вообще говоря, $R_X(\widetilde{X}) \not\subset \widetilde{M}$. Естественно возникает вопрос, когда единицы $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$ можно выбрать так, что будет $R_X(\widetilde{X}) \subset \widetilde{M}$. Следующая теорема, дополняющая результаты [2], [3], отвечает на этот вопрос. Предложение 1 является непосредственным следствием этой теоремы.

Теорема 3. *Пусть K есть произвольная компонента в $\widetilde{X}$, которая, в частности, может совпадать с $\widetilde{X}$. Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *существует линейный положительный взаимнооднозначный оператор* $A: K \to \widetilde{M}$;

[1] Если E — произвольное K-пространство, то через $\mathfrak{M}(E)$ мы обозначаем максимальное расширение пространства E.

б) *единицы* 1_1 *и* 1_2 *можно выбрать так, что для соответствующей канонической реализации* R_X *будет* $R_X(K)\subset\widetilde{M}$;

в) *существует существенно положительный* $F\in\widetilde{K}$, *т. е. такой, что* $F(f)>0$, *если* $f>0$, $f\in K$.

Доказательство. Импликация б)$\Rightarrow$а) очевидна. Импликация а)$\Rightarrow$в) следует из того, что $\widetilde{M}$ есть KB-пространство с аддитивной нормой. Докажем, что в)$\Rightarrow$б). Пусть $F=G+H$, где $G\in\overline{K}$, $H\in\widetilde{K}_{an}$. Ясно, что G — существенно положительный функционал на K. Пусть единица 1_2 фиксирована, а единица 1_1 пока произвольна, R_X — соответствующая каноническая реализация. Так как $R_X(K)$ есть идеал в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ и на $R_X(K)$ существует существенно положительный функционал, а $\widetilde{M}$ есть KB-пространство с аддитивной нормой и фундамент в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, то, как нетрудно видеть, найдется такая единица z в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, что $zR_X(K)\subset\widetilde{M}$, где $zR_X(K)=\{zy: y\in R_X(K)\}$ и zy есть произведение z на y в смысле умножения в расширенном K-пространстве $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ с единицей 1_2. Ясно, что найдется единица 1_1^* в $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ такая, что $R_X^*(f)=zR_X(f)$ для $\forall f\in\mathfrak{M}(\widetilde{X})$, где R_X^* есть каноническая реализация, отвечающая единицам 1_1^* и 1_2. Очевидно, что пара единиц 1_1^*, 1_2 — требуемая. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andô T. Linear functionals on Orlicz spaces. Nieuw Arch. Wiskunde, v. 8, № 1, 1960, p. 1—16.

2. Лозановский Г. Я. О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях. ДАН СССР, т. 188, № 3, 1969, с. 522—524.

3. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах. Матем. сб., т. 8 (128): 3, 1971, с. 331—352.

4. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

5. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория, т. 1. М., ИИЛ, 1962.

6. Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докторск. диссерт., Воронеж, 1968.

7. Лозановский Г. Я. О локализованных функционалах в векторных структурах. Сб. „Теория функций, функц. анализ и их прил.", Харьков, 1974, вып. 19, с. 66—80.

8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

9. Lorentz G. G. Relations betwen functions spaces. Proc. Amer. Math. Soc., v. 12, № 1, 1961, p. 127—132.

10. Рутицкий Я. Б. О некоторых классах измеримых функций. УМН, т. XX, вып. 4, 1965, с. 205—208.

11. Абрамович Ю. А. Некоторые теоремы о нормированных структурах. Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 13, вып. 3, 1971, с. 5—11.

12. Chong K. M., Rice N. M. Equimeasurable rearrangements of functions. Qeen's paper in pure and appl. Mathematics, № 28.

13. Yosida K., Hewitt E. Finitly additive measures. Trans. Amer. Math. Soc., v. 72, 1952, p. 46—66.

г. Ленинград

Поступила
19 XI 1974

ВЫПУСК

30

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

числа указанных выше шагов, т. е. сужение $P(t, \lambda)$ на достаточно малую окрестность t_0 есть композиция конечного числа непрерывных операторов. Это доказывает непрерывность $P(t, \lambda)$ по t и завершает доказательство инъективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Palais R. S. Natural operations on differential forms.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, p. 125—141.
2. Красносельский М. А. О нескольких новых принципах неподвижной точки.— ДАН СССР, 1973, т. 208, № 6, с. 1280—1281.
3. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., «Наука», 1975.

Поступила 8 мая 1975 г.

УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ, *канд. физ.-мат. наук*

О СОПРЯЖЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ РЕШЕТКЕ

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с вполне σ-конечной мерой; S — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (μ — эквивалентные функции, как обычно, отождествляются). Пусть X есть банахово идеальное пространство на (Ω, Σ, μ), т. е. X есть банахово пространство, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: если $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leqslant |x|$, то $y \in X$ и $\|y\| \leqslant \|x\|$.

Будем считать, что носитель X есть все Ω. Дуальное пространство X' к X состоит из всех $y \in S$ таких, что $\|y\|_{X'} = \sup\left\{\int\limits_\Omega |xy|\,d\mu : x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\right\} < \infty$. Из теоремы 6 b [1] как частный случай вытекает следующее утверждение.

Теорема А. *Каждый $z \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ представим в виде $z = xy$, где $x \in X$, $y \in X'$. При этом $\|z\|_{L^1} = \inf\{\|x\|_X \|y\|_{X'} : x \in X,\ y \in X',\ xy = z\}$.*

Основная цель настоящей заметки — обобщение теоремы 6 из [1]. Для $f \in X^*$, $u \in X$ через $f_{(u)}$ обозначим функционал на действующий по формуле $f_{(u)}(x) = f(ux)$, $x \in L^\infty$. Положим $K = \{f_{(u)} : f \in X^*,\ u \in X\}$. ν L^∞,

Следующая теорема, обобщающая теорему А, является частным случаем основного результата настоящей заметки.

Теорема Б. *K есть компонента (т. е. полоса по терминологии Бурбаки) в пространстве $(L^\infty)^*$, сопряженном к L^∞, причем для любого $g \in K$ справедливо равенство $\|g\|_{(L^\infty)^*} = \inf\{\|f\|_{X^*} \times \|u\|_X : f \in X^*,\ u \in X,\ f_{(u)} = g\}$.*

Нам кажется, что результаты такого типа могут найти приложения и вне рамок теории векторных решеток (см., например, работу [2], в которой используется один частный случай теоремы А, полученный в [3]).

§ 1. Терминология и обозначения

Сопряженное к нормированному пространству X обозначается X^*. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы следуем монографии [4]. Для произвольного K-пространства X через $\mathbb{W}(X)$ обозначаем его максимальное расширение, $\tilde{X}$ и $\bar{X}$ суть пространства всех регулярных и вполне линейных функционалов на X. Элемент x K-линеала X *называется осколком элемента* $y \in X$, если $(y-x)\,dx$. Элемент 1 K-линеала X называется *единицей* (или слабой единицей), если $x \wedge 1 > 0$ $\forall x > 0$. Наконец, вместо терминов «нормальный подлинеал», «нормальное подпространство», принятых в [4], мы используем более короткий термин «идеал».

§ 2. Формулировка основной теоремы

Наш основной результат будет сформулирован для следующих двух ситуаций.

Ситуация 1. X — банахово KN-пространство, $\mathbb{W} = \mathbb{W}(X)$ — его максимальное расширение. В $\mathbb{W}$ фиксируем единицу 1. Через M *обозначаем идеал ограниченных элементов в* $\mathbb{W}$, состоящий из всех $x \in \mathbb{W}$ таких, что $\|x\|_M = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda 1\} < \infty$. Напомним, что $\mathbb{W}$ с единицей $\mathbf{1}$ является полуупорядоченным кольцом (см. [4, гл. V, § 8]).

Ситуация 2. X — KB-линеал с единицей $\mathbf{1}$, причем $\mathbf{1}$ есть квазивнутренняя точка конуса положительных элементов X_+. Последнее означает, что идеал ограниченных элементов и плотен по норме в X. Здесь M состоит из всех $x \in X$ таких, что $\|x\|_M = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda 1\} < \infty$.

Заметим, что KB-линеалы такого типа как в ситуации 2 и несколько более общие изучались в [5] и [6]. В этих работах были построены реализации указанных пространств в виде пространств расширенных непрерывных функций на подходящих топологических пространствах. Нужно, однако, отметить, что к KB-линеалам, изучавшимся в [5] и [6], очевидным образом применима теорема Б. З. Вулиха об условиях внутренней нормальности (см. [7, с. 13]), поэтому основные результаты [5] и [6] по существу суть весьма частные случаи результатов, полученных в [7—9]. *Напомним также, что в ситуации 2* X *с единицей* $\mathbf{1}$ является обобщенным полуупорядоченным кольцом (см. [4, гл. V, § 8] и [7]).

Таким образом, в обеих рассматриваемых ситуациях для $\forall u \in X$ $\forall x \in M$ однозначно определено произведение $ux \in X$. Это дает возможность по $\forall f \in X^*$ $\forall u \in X$ построить функционал $f_{(u)} : \in M^*$, действующий по формуле $f_{(u)} = f(ux)$, $x \in M$. Полагаем $K = \{f_{(u)} : f \in X^*,\ u \in X\}$. В обеих рассматриваемых ситуациях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *K есть компонента в пространстве M^*, причем для $\forall g \in K$ справедливо равенство* $\|g\|_{M^*} = \inf\{\|f\|_{X^*}\|u\|_X : f \in X^*,\ u \in X,\ f_{(u)} = g\}$.

Оставшаяся часть заметки посвящена доказательству теоремы 1 для обеих указанных ситуаций.

§ 3. Некоторые леммы

1°. В этом пункте рассматривается ситуация 1. Заметим, что M^* есть KB-пространство с аддитивной нормой, т. е. (L)-пространство в смысле Какутани. Для $g \in M^*$ полагаем $J(g) = g(1)$. В пространстве $\mathbb{W}(M^*)$ фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}_0$, после чего можно говорить об умножении элементов в $\mathbb{W}(M^*)$. Если H — произвольный идеал в $\mathbb{W}(M^*)$, то дуальное пространство $H' = \{h' \in H^{dd} : hh' \in M^*$ для $\forall h \in H\}$. Если $\|\cdot\|$ — монотонная банахова норма на H, то дуальная норма $\|\cdot\|'$ на H' определяется формулой $\|h'\|' = \sup\{J(|hh'|) : h \in H,\ \|h\| \leqslant 1\}$, $h' \in H'$.

Фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}_1$ в $\mathbb{W}(X^*)$ и пусть $R : \mathbb{W}(X^*) \to \mathbb{W}(M^*)$ есть соответствующая *каноническая реализация* (см. [10, теорема 3.1]). Иными словами, R есть изоморфизм $\mathbb{W}(X^*)$ на некоторую компоненту пространства $\mathbb{W}(M^*)$, удовлетворяющий следующим двум условиям: а) для $\forall f \in X^* \forall g \in M^*$ справедливо $(f_{(u)}\, dg\, \forall u \in X) \leftrightarrow (Rf\, d\, dg)$; б) $R(\mathbf{1}_1)$ есть осколок элемента $\mathbf{1}_0$. Рассмотрим теперь пространство $(R(X^*))'$, дуальное к $R(X^*)$. Каждый $u \in X$ естественным образом порождает вполне линейный функционал на X^* поэтому для $\forall u \in X$ однозначно определен элемент $S(u) \in (R(X^*))'$, удовлетворяющий условию $f(u) = J(R(f)S(u))$ для $\forall f \in X^*$. Здесь $R(f)S(u)$ есть произведение в смысле умножения в $\mathbb{W}(M^*)$.

Аналогично, для каждого $x \in M$ однозначно определен элемент $P(x) \in (M^*)'$, удовлетворяющий условию $g(x) = J(gP(x))$ для $\forall g \in M^*$.

Лемма 2. $(u \in X,\ x \in M,\ udx) \Rightarrow (S(u)\,dP(x))$.

Доказательство. Фиксируем e_0, $e_1 \in \mathbb{W}$ такие, что $e_1 x = x$, $e_0 d e_1$, $e_0 + e_1 = 1$, $e_0 u = u$. Для $i = 0, 1$ положим $X_i^* = \{f \in X^* : f(v) = f(ve_i)\ \forall v \in X\}$; $M_i^* = \{g \in M^* : g(y) = g(ye_i)\ \forall y \in M\}$.

Ясно, что X_0^*, X_1^* — суть дизъюнктные компоненты, образующие разложение пространства X^*, а M_0^*, M_1^* — суть дизъюнктные компоненты, образующие разложение пространства M^*.

Заметим, что $f(u)=0\ \forall f\in X_1^*$, $g(x)=0\ \forall g\in M_0^*$, поэтому $S(u)\in(R(X_0^*))'$; $P(x)\in(M_1^*)'$. Теперь осталось только доказать, что $R(X_0^*)\,dM_1^*$. Возьмем произвольные $f\in X_0^*$, $g\in M_1^*$, $v\in X$. Так как $f_{(v)}(y)=f(vy)=f(e_0vy)$, $y\in M$, $g(y)=g(e_1y)$, $y\in M$, то из $e_0 de_1$ следует $f_{(v)}dg$. Итак, $R(f)\,dg$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых $f\in X^*$, $u\in X$ справедливо равенство $f_{(u)}=R(f)S(u)$, где справа стоит произведение $R(f)$ на $S(u)$ в смысле умножения в $W(M^*)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $R(f)S(u)\in M^*$ по самому определению дуального пространства. Обозначим через E множество всех осколков единицы 1. Достаточно убедиться, что $f_{(u)}(e)=(R(f)S(u))(e)$ для $\forall e\in E$, ибо линейная оболочка E плотна по норме в M. Фиксируем $\forall e_0\in E$ и положим $e_1=\mathbf{1}-e_0$. Для $v\in X$ положим $f_0(v)=f(e_0v)$, $f_1(v)=f(e_1v)$; $f^0(v)=(R(f)S(v))(e_0)$, $f^1(v)=(R(f)S(v))(e_1)$. Заметим, что $f^0(v)+f^1(v)=(R(f)S(v))(\mathbf{1})=J(R(f)S(v))=f(v)$, тем самым $f^0+f^1=f$. Покажем, что $f^0(v)=0$ при $v\in X$, vde_0. Действительно, $f^0(v)=(R(f)S(v))(e_0)=J(R(f)S(v)\cdot P(e_0))=J(0)=0$, ибо $S(v)\,dP(e_0)$ в силу леммы 2. Аналогично убеждаемся, что $f^1(v)=0$ при $v\in X$, vde_1. Теперь ясно, что f^0df^1, f_0df^1, f_1df^0. Кроме того, f_0df_1, $f_0+f_1=f^0+f^1=f$. Следовательно, $f_0=f^0$, $f_1=f^1$, откуда $f_{(u)}(e_0)=f(ue_0)=f_0(u)=f^0(u)=R(f)S(u))(e_0)$, тем самым $f_{(u)}(e_0)=(R(f)S(u))(e_0)$. Лемма доказана.

2°. В этом пункте рассматривается ситуация 2. Пусть $R:X^*\to M^*$ есть оператор сужения, т. е. $R(f)=f|_M$ для $f\in X^*$. Так как M плотно в X по норме, то R инъективен. В $W(M^*)$ фиксируем единицу, вводим функционал $J(g)=g(\mathbf{1})$, $g\in M^*$, после этого можно говорить о дуальных пространствах для идеалов из $W(M^*)$. Для каждого $u\in X$ однозначно определен элемент $S(u)\in(R(X^*))'$, удовлетворяющий условию $f(u)=J(R(f)S(u))$ для $\forall f\in X^*$.

Теперь можно убедиться, что лемма 3 справедлива и для ситуации 2. Доказательство этого, которое сходно с рассуждениями п. 1°, мы опускаем.

3°. **Лемма 4.** *Пусть V — K-пространство, H — KB-линеал, являющийся линейной подструктурой в V. Обозначим через Ψ наименьший идеал в V, содержащий H, и для $\psi\in\Psi$ положим $\|\psi\|_\Psi=\inf\{\|h\|_H: h\in H, |\psi|\leqslant h\}$. Тогда $(\Psi, \|\cdot\|_\Psi)$ есть банахово KN-пространство,*

Несложное доказательство этой леммы, основанное на результате работы [1], мы опускаем.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Доказательство проводится одновременно ~~для~~ для обеих рассматриваемых ситуаций. Положим для краткости $\Phi=R(X^*)$, $\|\varphi\|_\Phi=\|R^{-1}(\varphi)\|_{X^*}$ для $\varphi\in\Phi$; $H=S(X)$, $\|h\|_H=$

$\|S^{-1}(h)\|_X$ для $h\in H$. Через $M^*(\Phi)$ обозначим проекцию на компоненту пространства $W(M^*)$, порожденную Φ. В силу леммы 3 для доказательства теоремы 1 достаточно лишь установить справедливость следующих утверждений:

а) справедливо равенство $K=M^*(\Phi)$;

б) для $\forall g\in M^*(\Phi)$ справедливо равенство $\|g\|_{M^*}=\inf\times\times\{\|\varphi\|\cdot\|h\|_H:\varphi\in\Phi,\ h\in H,\ g=\varphi h\}$.

Обозначим через Ψ идеал в $W(M^*)$, порожденный H, и для $\psi\in\Psi$ положим $\|\psi\|_\Psi=\inf\{\|h\|_H: h\in H,\ |\psi|\leqslant h\}$. В силу леммы 4 $(\Psi, \|\cdot\|_\Psi)$ есть банахово KN-пространство.

Покажем, что

в) $\Psi'=\Phi$, $\|\cdot\|'_\Psi=\|\cdot\|_\Phi$.

Действительно, каждое из трех множеств Φ, Ψ, $M^*(\Phi)$ порождает в $W(M^*)$ одну и ту же компоненту. Далее, ясно, что Φ является фундаментом в Ψ' и для $\forall\varphi\in\Phi$ имеем $\|\varphi\|_\Phi=\sup\times\times\sup\{J(|\varphi h|): h\in H,\ \|h\|_H<1\}=\sup\{J(|\varphi\psi|):\psi\in\Psi,\ \|\psi\|_\Psi<1\}=\|\varphi\|'_\Psi$. Теперь, так как Φ есть фундамент в Ψ', $\|\cdot\|_\Phi$ совпадает с сужением нормы $\|\cdot\|'_\Psi$ на Φ и обе нормы $\|\cdot\|_\Phi$, $\|\cdot\|'_\Psi$ универсально полунепрерывны* и универсально монотонно полны, заключаем, что в) справедливо.

Применим теперь теорему 6 из [1]. В силу этой теоремы имеем:

г) $M^*(\Phi)=\{\varphi\psi:\varphi\in\Phi,\ \psi\in\Psi\}$;

д) для $\forall g\in M^*(\Phi)$ справедливо равенство $\|g\|_{M^*}=\inf\times\times\{\|\varphi\|_\Phi\|\psi\|_\Psi:\varphi\in\Phi,\ \psi\in\Psi,\ g=\varphi\psi\}$.

Остается заметить, что из г) и д) очевидным образом следуют а) и б). Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору Б. З. Вулиху за внимание к настоящей работе и А. В. Бухвалову за проверку доказательств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, № 3, с. 584—599.
2. Маркус А. С. Задача спектрального синтеза для операторов с точечным спектром.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1970, т. 34, № 3, с. 662—687.
3. Лозановский Г. Я. О банаховых структурах Кальдерона.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 5, с. 1018—1020.
4. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
5. Lotz H. P. Zur Idealstructur von Banachverbünden. Habilitationsschrift. Tübingen, 1969.

* Норма в KN-пространстве Y называется универсально полунепрерывной, если $(0\leqslant y_\alpha\uparrow y\in Y)\Rightarrow(\|y_\alpha\|_Y\uparrow\|y\|_Y)$. Норма в Y называется универсально монотонно полной, если $(0\leqslant y_\alpha\uparrow$ в Y и $\sup\|y_\alpha\|_Y<\infty)\Rightarrow(\exists\sup y_\alpha\in Y)$.

6. Schaefer H. H. On the representation of Banach lattices by continuous numerical functions. Math. Z., 1972, vol. 125, p. 215—232.
7. Вулих Б. З. О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец.— «Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена», 1958, т. 166, с. 3—15.
8. Вулих Б. З. Обобщенные полуупорядоченные кольца.— «Мат. сб.», 1953, т. 33, с. 343—358.
9. Вулих Б. З. Некоторые вопросы теории полуупорядоченных множеств.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1953, т. 17, с. 365—388.
10. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.— «Мат. сб.», 1971, т. 84, № 3, с. 331—352.
11. Amemiya I. A generalization of Riesz—Fischer's theorem.— «T. Math. Soc. Japan», 1953, vol. 5, p. 353—354.

Поступила 8 декабря 1975 г.

УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАЦИЕЙ ДИРАКА (I)

Рассмотрим операцию Дирака $D\vec{y} = B\frac{d}{dx}\vec{y} + \Omega(x)\vec{y}$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, а $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные периодические $(p(x) \equiv p(x+\pi),\ r(x) \equiv r(x+\pi))$ функции, принадлежащие $L_2[0, \pi]$. Пусть $\{\mu_{2k}^{\pm}\}$ — собственные значения периодической $(\vec{y}(0) = \vec{y}(\pi))$, а $\{\mu_{2k+1}^{\pm}\}$ — собственные значения антипериодической $(\vec{y}(0) = -\vec{y}(\pi))$ краевых задач, порождаемых операцией D. На дифференцируемых вектор-функциях, удовлетворяющих периодическим (антипериодическим), краевым условиям, оператор D является самосопряженным. Следовательно, числа $\mu_m^{\pm}$ — вещественны.

Целью работы является отыскание необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять две последовательности вещественных чисел для того, чтобы они были спектрами периодической и антипериодической задач, порождаемых одной и той же операцией D. Аналогичный вопрос для оператора Хилла был рассмотрен в работе [1], результаты и методы которой существенно используются в настоящей статье.

Обозначим через $\vec{e}(z, x) = (e_1(z, x), e_2(z, x))$ решение уравнения

$$D\vec{y} = z\vec{y} \tag{1}$$

числа указанных выше шагов, т. е. сужение $P(t, \lambda)$ на достаточно малую окрестность t_0 есть композиция конечного числа непрерывных операторов. Это доказывает непрерывность $P(t, \lambda)$ по t и завершает доказательство инъективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Palais R. S. Natural operations on differential forms.— «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, p. 125—141.
2. Красносельский М. А. О нескольких новых принципах неподвижной точки.— ДАН СССР, 1973, т. 208, № 6, с. 1280—1281.
3. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., «Наука», 1975.

Поступила 8 мая 1975 г.

УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ, *канд. физ.-мат. наук*

О СОПРЯЖЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ РЕШЕТКЕ

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с вполне σ-конечной мерой; S — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (μ — эквивалентные функции, как обычно, отождествляются). Пусть X есть банахово идеальное пространство на (Ω, Σ, μ), т. е. X есть банахово пространство, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: если $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leqslant |x|$, то $y \in X$ и $\|y\| \leqslant \|x\|$.

Будем считать, что носитель X есть все Ω. Дуальное пространство X' к X состоит из всех $y \in S$ таких, что $\|y\|_{X'} = \sup\left\{\int\limits_{\Omega} |xy|\, d\mu : x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\right\} < \infty$. Из теоремы 6 b [1] как частный случай вытекает следующее утверждение.

Теорема А. *Каждый $z \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ представим в виде $z = xy$, где $x \in X$, $y \in X'$. При этом $\|z\|_{L^1} = \inf\{\|x\|_X \|y\|_{X'} : x \in X,\ y \in X',\ xy = z\}$.*

Основная цель настоящей заметки — обобщение теоремы 6 из [1]. Для $f \in X^*$, $u \in X$ через $f_{(u)}$ обозначим функционал на L^∞, действующий по формуле $f_{(u)}(x) = f(ux)$, $x \in L^\infty$. Положим $K = \{f_{(u)} : f \in X^*,\ u \in X\}$.

Следующая теорема, обобщающая теорему А, является частным случаем основного результата настоящей заметки.

Теорема Б. *K есть компонента (т. е. полоса по терминологии Бурбаки) в пространстве $(L^\infty)^*$, сопряженном к L^∞, причем для любого $g \in K$ справедливо равенство $\|g\|_{(L^\infty)^*} = \inf\{\|f\|_{X^*} \times \|u\|_X : f \in X^*,\ u \in X,\ f_{(u)} = g\}$.*

Нам кажется, что результаты такого типа могут найти приложения и вне рамок теории векторных решеток (см., например, работу [2], в которой используется один частный случай теоремы А, *полученный в* [3]).

§ 1. Терминология и обозначения

Сопряженное к нормированному *пространству* X обозначается X^*. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы следуем монографии [4]. Для *произвольного* K-пространства X через $\mathbb{W}(X)$ обозначаем его максимальное расширение, $\tilde{X}$ и $\bar{X}$ суть пространства всех регулярных и *вполне линейных* функционалов на X. Элемент x K-линеала X называется *осколком* элемента $y \in X$, если $(y-x)\,dx$. Элемент 1 K-линеала X называется *единицей* (или слабой единицей), если $x \wedge 1 > 0$ $\forall x > 0$. Наконец, вместо терминов «нормальный подлинеал», «нормальное подпространство», принятых в [4], мы используем *более короткий* термин «идеал».

§ 2. Формулировка основной теоремы

Наш основной результат будет сформулирован *для* следующих двух ситуаций.

Ситуация 1. X — банахово KN-пространство, $\mathbb{W} = \mathbb{W}(X)$ — *его максимальное* расширение. В $\mathbb{W}$ фиксируем единицу $\mathbf{1}$. Через M обозначаем идеал ограниченных элементов в $\mathbb{W}$, состоящий из всех $x \in \mathbb{W}$ таких, что $\|x\|_M = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda\mathbf{1}\} < \infty$. *Напомним*, что $\mathbb{W}$ с единицей $\mathbf{1}$ является полуупорядоченным кольцом (см. [4, гл. V, § 8]).

Ситуация 2. X — KB-линеал с единицей $\mathbf{1}$, причем $\mathbf{1}$ есть квазивнутренняя точка конуса положительных элементов X_+. Последнее *означает, что идеал* ограниченных элементов плотен по норме в X. Здесь M состоит из всех $x \in X$ таких, что $\|x\|_M = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda\mathbf{1}\} < \infty$.

Заметим, что KB-линеалы такого типа как в ситуации 2 и несколько более общие изучались в [5] и [6]. В этих работах были построены реализации указанных пространств в виде пространств расширенных непрерывных функций на подходящих топологических пространствах. Нужно, *однако*, отметить, что к KB-линеалам, изучавшимся в [5] и [6], очевидным образом применима теорема Б. З. Вулиха об условиях внутренней нормальности (см. [7, с. 13]), поэтому основные результаты [5] и [6] по существу суть весьма частные случаи результатов, полученных в [7—9]. *Напомним также, что в ситуации 2* X с единицей $\mathbf{1}$ является обобщенным полуупорядоченным кольцом (см. [4, гл. V, § 8] и [7]).

Таким образом, в обеих рассматриваемых ситуациях для $\forall u \in X$ $\forall x \in M$ однозначно определено произведение $ux \in X$. Это дает возможность по $\forall f \in X^*$ $\forall u \in X$ построить функционал $f_{(u)} : \in M^*$, действующий по формуле $f_{(u)} = f(ux)$, $x \in M$. Полагаем $K = \{f_{(u)} : f \in X^*,\ u \in X\}$. В обеих рассматриваемых ситуациях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *K есть компонента в пространстве M^*, причем для $\forall g \in K$ справедливо равенство* $\|g\|_{M^*} = \inf\{\|f\|_{X^*}\|u\|_X : f \in X^*,\ u \in X,\ f_{(u)} = g\}$.

Оставшаяся часть заметки посвящена доказательству теоремы 1 для обеих указанных ситуаций.

§ 3. Некоторые леммы

1°. В этом пункте рассматривается ситуация 1. Заметим, что M^* есть KB-пространство с аддитивной нормой, т. е. (L)-пространство в смысле Какутани. Для $g \in M^*$ полагаем $J(g) = g(1)$. В *пространстве* $\mathbb{W}(M^*)$ фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}_0$, после чего можно говорить об умножении элементов в $\mathbb{W}(M^*)$. Если H — произвольный идеал в $\mathbb{W}(M^*)$, то дуальное пространство $H' = \{h' \in H^{dd} : hh' \in M^*$ для $\forall h \in H\}$. Если $\|\cdot\|$ — монотонная банахова норма на H, то дуальная норма $\|\cdot\|'$ на H' *определяется* формулой $\|h'\|' = \sup\{J(|hh'|) : h \in H,\ \|h\| \leqslant 1\}$, $h \in H'$.

Фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}_1$ в $\mathbb{W}(X^*)$ и пусть $R : \mathbb{W}(X^*) \to \mathbb{W}(M^*)$ есть соответствующая *каноническая реализация* (см. [10, теорема 3.1]). Иными словами, R есть изоморфизм $\mathbb{W}(X^*)$ *на некоторую компоненту* пространства $\mathbb{W}(M^*)$, удовлетворяющий следующим двум условиям: а) для $\forall f \in X^* \forall g \in M^*$ справедливо $(f_{(u)}\, dg \forall u \in X) \leftrightarrow (Rf\, d\, g)$; б) $R(\mathbf{1}_1)$ есть осколок элемента $\mathbf{1}_0$. Рассмотрим теперь пространство $(R(X^*))'$, дуальное к $R(X^*)$. Каждый $u \in X$ естественным образом порождает вполне линейный *функционал на* X^* поэтому для $\forall u \in X$ однозначно определен элемент $S(u) \in (R(X^*))'$, удовлетворяющий условию $f(u) = J(R(f)\,S(u))$ для $\forall f \in X^*$. Здесь $R(f)\,S(u)$ есть произведение в смысле умножения в $\mathbb{W}(M^*)$.

Аналогично, для каждого $x \in M$ однозначно определен элемент $P(x) \in (M^*)'$, удовлетворяющий условию $g(x) = J(gP(x))$ для $\forall g \in M^*$.

Лемма 2. $(u \in X,\ x \in M,\ udx) \Rightarrow (S(u)\, dP(x))$.

Доказательство. Фиксируем $e_0, e_1 \in \mathbb{W}$ такие, что $e_1 x = x$, $e_0 d e_1$, $e_0 + e_1 = 1$, $e_0 u = u$. Для $i = 0, 1$ положим $X_i^* = \{f \in X^* : f(v) = f(ve_i)\ \forall v \in X\}$; $M_i^* = \{g \in M^* : g(y) = g(ye_i)\ \forall y \in M\}$.

Ясно, что X_0^*, X_1^* — суть дизъюнктные компоненты, образующие разложение пространства X^*, а M_0^*, M_1^* — суть дизъюнктные компоненты, образующие разложение пространства M^*.

Заметим, что $f(u) = 0\ \forall f \in X_1^*$, $g(x) = 0\ \forall g \in M_0^*$, поэтому $S(u) \in (R(X_0^*))'$, $P(x) \in (M_1^*)'$. Теперь осталось только доказать, что $R(X_0^*)\, dM_1^*$. Возьмем произвольные $f \in X_0^*$, $g \in M_1^*$, $v \in X$. Так как $f_{(v)}(y) = f(vy) = f(e_0 vy)$, $y \in M$, $g(y) = g(e_1 y)$, $y \in M$, то из $e_0\, de_1$ следует $f_{(v)}\, dg$. Итак, $R(f)\, dg$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых $f \in X^*$, $u \in X$ справедливо равенство $f_{(u)} = R(f)\, S(u)$, где справа стоит произведение $R(f)$ на $S(u)$ в смысле умножения в $W(M^*)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $R(f)\, S(u) \in M^*$ по самому определению дуального пространства. Обозначим через E множество всех осколков единицы 1. Достаточно убедиться, что $f_{(u)}(e) = (R(f)\, S(u))(e)$ для $\forall e \in E$, ибо линейная оболочка E плотна по норме в M. Фиксируем $\forall e_0 \in E$ и положим $e_1 = 1 - e_0$. Для $v \in X$ положим $f_0(v) = f(e_0 v)$, $f_1(v) = f(e_1 v)$; $f^0(v) = (R(f)\, S(v))(e_0)$, $f^1(v) = (R(f)\, S(v))(e_1)$. Заметим, что $f^0(v) + f^1(v) = (R(f)\, S(v))(1) = J(R(f)\, S(v)) = f(v)$, тем самым $f^0 + f^1 = f$. Покажем, что $f^0(v) = 0$ при $v \in X$, $v d e_0$. Действительно, $f^0(v) = (R(f)\, S(v))(e_0) = J(R(f)\, S(v) \cdot P(e_0)) = J(0) = 0$, ибо $S(v)\, dP(e_0)$ в силу леммы 2. Аналогично убеждаемся, что $f^1(v) = 0$ при $v \in X$, $v d e_1$. Теперь ясно, что $f^0 df^1$, $f_0 df^1$, $f_1 df^0$. Кроме того, $f_0\, df_1$, $f_0 + f_1 = f^0 + f^1 = f$. Следовательно, $f_0 = f^0$, $f_1 = f^1$, откуда $f_{(u)}(e_0) = f(ue_0) = f_0(u) = f^0(u) = R(f)\, S(u))(e_0)$, тем самым $f_{(u)}(e_0) = (R(f)\, S(u))(e_0)$. Лемма доказана.

2°. В этом пункте рассматривается ситуация 2. Пусть $R : X^* \to M^*$ есть оператор сужения, т. е. $R(f) = f|_M$ для $f \in X^*$. Так как M плотно в X по норме, то R иньективен. В $W(M^*)$ фиксируем единицу, вводим функционал $J(g) = g(1)$, $g \in M^*$, после этого можно говорить о дуальных пространствах для идеалов из $W(M^*)$. Для каждого $u \in X$ однозначно определен элемент $S(u) \in (R(X^*))'$, удовлетворяющий условию $f(u) = J(R(f)\, S(u))$ для $\forall f \in X^*$.

Теперь можно убедиться, что лемма 3 справедлива и для ситуации 2. Доказательство этого, которое сходно с рассуждениями п. 1°, мы опускаем.

3°. ***Лемма 4.*** *Пусть V — K-пространство, H — KB-линеал, являющийся линейной подструктурой в V. Обозначим через Ψ наименьший идеал в V, содержащий H, и для $\psi \in \Psi$ положим $\|\psi\|_\Psi = \inf\{\|h\|_H : h \in H,\ |\psi| \leqslant h\}$. Тогда $(\Psi, \|\cdot\|_\Psi)$ есть банахово KN-пространство,*

Несложное доказательство этой леммы, основанное на результате работы [4], мы опускаем.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Доказательство проводится одновременно для обеих рассматриваемых ситуаций. Положим для краткости $\Phi = R(X^*)$, $\|\varphi\|_\Phi = \|R^{-1}(\varphi)\|_{X^*}$ для $\varphi \in \Phi$; $H = S(X)$, $\|h\|_H = \|S^{-1}(h)\|_X$ для $h \in H$. Через $M^*(\Phi)$ обозначим проекцию на компоненту пространства $W(M^*)$, порожденную Φ. В силу леммы 3 для доказательства теоремы 1 достаточно лишь установить справедливость следующих утверждений:

$\Psi \subset M^*$

а) справедливо равенство $K = M^*(\Phi)$;

б) для $\forall g \in M^*(\Phi)$ справедливо равенство $\|g\|_{M^*} = \inf \times \times \{\|\varphi\| \cdot \|h\|_H : \varphi \in \Phi,\ h \in H,\ g = \varphi h\}$.

Обозначим через Ψ идеал в $W(M^*)$, порожденный H, и для $\psi \in \Psi$ положим $\|\psi\|_\Psi = \inf\{\|h\|_H : h \in H,\ |\psi| \leqslant h\}$. В силу леммы 4 $(\Psi, \|\cdot\|_\Psi)$ есть банахово KN-пространство.

Покажем, что

в) $\Psi' = \Phi$, $\|\cdot\|'_\Psi = \|\cdot\|_\Phi$

Действительно, каждое из трех множеств Φ, Ψ, $M^*(\Phi)$ порождает в $W(M^*)$ одну и ту же компоненту. Далее, ясно, что Φ является фундаментом в Ψ' и для $\forall \varphi \in \Phi$ имеем $\|\varphi\|_\Phi = \sup \times \times \sup\{J(|\varphi h|) : h \in H,\ \|h\|_H < 1\} = \sup\{J(|\varphi\psi|) : \psi \in \Psi,\ \|\psi\|_\Psi < < 1\} = \|\varphi\|'_\Psi$. Теперь, так как Φ есть фундамент в Ψ', $\|\cdot\|_\Phi$ совпадает с сужением нормы $\|\cdot\|'_\Psi$ на Φ и обе нормы $\|\cdot\|_\Phi$, $\|\cdot\|'_\Psi$ универсально полунепрерывны* и универсально монотонно полны, заключаем, что в) справедливо.

Применим теперь теорему 6 из [1]. В силу этой теоремы имеем:

г) $M^*(\Phi) = \{\varphi\psi : \varphi \in \Phi,\ \psi \in \Psi\}$;

д) для $\forall g \in M^*(\Phi)$ справедливо равенство $\|g\|_{M^*} = \inf \times \times \{\|\varphi\|_\Phi \|\psi\|_\Psi : \varphi \in \Phi,\ \psi \in \Psi,\ g = \varphi\psi\}$.

Остается заметить, что из г) и д) очевидным образом следуют а) и б). Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору Б. З. Вулиху за внимание к настоящей работе и А. В. Бухвалову за проверку доказательств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, № 3, с. 584—599.
2. Маркус А. С. Задача спектрального синтеза для операторов с точечным спектром.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1970, т. 34, № 3, с. 662—687.
3. Лозановский Г. Я. О банаховых структурах Кальдерона.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 5, с. 1018—1020.
4. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
5. Lotz H. P. Zur Idealstructur von Banachverbünden. Habilitationsschrift. Tübingen, 1969.

---

* Норма в KN-пространстве Y называется универсально полунепрерывной, если $(0 \leqslant y_\alpha \uparrow y \in Y) \Rightarrow (\|y_\alpha\|_Y \uparrow \|y\|_Y)$. Норма в Y называется универсально монотонно полной, если $(0 \leqslant y_\alpha \uparrow$ в Y и $\sup \|y_\alpha\|_Y < \infty) \Rightarrow (\exists \sup y_\alpha \in Y)$.

6. Schaefer H. H. On the representation of Banach lattices by continuous numerical functions. Math. Z., 1972, vol. 125, p. 215—232.
7. Вулих Б. З. О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец.— «Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена», 1958, т. 166, с. 3—15.
8. Вулих Б. З. Обобщенные полуупорядоченные кольца.— «Мат. сб.», 1953, т. 33, с. 343—358.
9. Вулих Б. З. Некоторые вопросы теории полуупорядоченных множеств.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1953, т. 17, с. 365—388.
10. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.— «Мат. сб.», 1971, т. 84, № 3, с. 331—352.
11. Amemiya I. A generalization of Riesz—Fischer's theorem.— «T. Math. Soc. Japan», 1953, vol. 5, p. 353—354.

Поступила 8 декабря 1975 г.

УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАЦИЕЙ ДИРАКА (I)

Рассмотрим операцию Дирака $D\vec{y} = B\frac{d}{dx}\vec{y} + \Omega(x)\vec{y}$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, а $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные периодические $(p(x) \equiv p(x+\pi),\ r(x) \equiv r(x+\pi))$ функции, принадлежащие $L_2[0, \pi]$. Пусть $\{\mu_{2k}^{\pm}\}$ — собственные значения периодической $(\vec{y}(0) = \vec{y}(\pi))$, а $\{\mu_{2k+1}^{\pm}\}$ — собственные значения *антипериодической* $(\vec{y}(0) = -\vec{y}(\pi))$ краевых задач, порождаемых операцией D. На дифференцируемых вектор-функциях, удовлетворяющих периодическим (антипериодическим), краевым условиям, оператор D является самосопряженным. Следовательно, числа $\mu_m^{\pm}$ — вещественны.

Целью работы является отыскание необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять две последовательности вещественных чисел для того, чтобы они были спектрами периодической и антипериодической задач, порождаемых одной и той же операцией D. Аналогичный вопрос для оператора Хилла был рассмотрен в работе [1], результаты и методы которой существенно используются в настоящей статье.

Обозначим через $\vec{e}(z, x) = (e_1(z, x), e_2(z, x))$ решение уравнения

$$D\vec{y} = z\vec{y} \tag{1}$$

XXVII ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

МАТЕМАТИКА

ЛЕНИНГРАД • 1974

В общем случае пространства X приходится довольствоваться неравенствами

$$|c_k| \leq \rho_{n,k}^{-1} \cdot \|y\| \ , \tag{5}$$

непосредственно вытекающими из (3). Например, в метрике пространства $L_2(Q)$ величины $\rho_{n,k}$ выражаются, как известно, через определители Грама подсистем базисных элементов φ_i.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В.Н.Буров. Сб. Исследов.по совр.пробл.конструкт. теории функций, М., 1961, 20-26.

[2] R.C. Jones, L.A. Karlovitz. J. Approxim. Theory, 1970, 3, № 2, 138-145.

А.И.Векслер, А.В.Колдунов, Г.Я.Лозановский

О ЛОКАЛЬНОМ СТРОЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

Пусть L^∞, L^1 и S – классические (вещественные) пространства на [0,1]. Обозначим через Q пространство максимальных идеалов банаховой алгебры L^∞ [1]. Как известно, Q является экстремально – несвязным гиперстоуновым бикомпактом. Можно рассматривать пространства L^∞, L^1 и S с естественным частичным порядком и тогда L^∞ и L^1 окажутся условно полными банаховыми решетками, т.е. банаховыми KN -пространствами [2]. По теореме М.Г. и С.Г.Крейнов – С.Какутани банахова решетка L^∞ изоморфна банаховой решетке $C(Q)$ всех непрерывных вещественных функций на Q (напомним, что это представление совпадает с представлением И.М.Гельфанда банаховой алгебры L^∞;

условно полная векторная решетка S изоморфна векторной решетке $C_\infty(Q)$ всех непрерывных расширенных функций на Q, а банахова решетка L^1 некоторой подрешетке $C_\infty(Q)$, содержащей $C(Q)$. Мы будем отождествлять пространства L^∞, L^1 и S с их реализациями на Q.

Пусть $z \in S$, $q \in Q$: под q – осколком z будем понимать всякую функцию вида $z\chi_U$, где U – открыто-замкнуто в Q и $q \in U$.

Обозначим $N(z) = \{ q \in Q :$ никакой q – осколок z не попадает в $L^1 \}$. Очевидно, $N(z)$ – множество тех точек из Q, в которых функция z локально не совпадает ни с одной функцией из L^1, т.е. в каждой $q \in N(z)$ функция z является бесконечно большой, порядок величины которой больше порядков всех функций из L^1 в q".

Так как L^1 и S условно полны, то $N(z) = \emptyset \Longleftrightarrow z \in L^1$ [3]. Очевидно, $\cup\{N(z) : z \in S\}$ плотно в Q.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $N(z)$ совпадает с множеством тех точек из Q, в которых аннулируется всякая функция $z' \in S$, такая что $zz' \in L^1$.

Отсюда, в частности, $N(z)$ замкнуто и нигде не плотно в Q.

Хорошо известно, что если $f \in (L^\infty)^*$, то $f(x) = \int_Q x\,d\nu$ $(x \in L^\infty)$, где ν – некоторая регулярная борелева мера на Q. По теореме К.Иосиды – Э.Хьюитта [4] всякий $f \in (L^\infty)^*$ единственным образом представляется в виде $f = g + h$, где g порядково непрерывен (он имеет вид $g(x) = \int_0^1 x(t) \cdot y(t)\,dt$ для некоторого $y \in L^1$), а h сингулярен (носитель соответствующей меры нигде не плотен в Q). Пусть $(L^\infty)_n^*$ и $(L^\infty)_s^*$

суть компоненты (полосы) порядково непрерывных и сингулярных функционалов банаховой решетки $(L^{\infty})^*$. Отождествим $(L^{\infty})^*_n$ с L^1. Тогда $(L^{\infty})^* = L^1 \oplus (L^{\infty})^*_s$. Напомним, что L^1 слабо * плотно в $(L^{\infty})^*$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $h \in (L^{\infty})^*_s$, $h(x) = \int_Q x\,d\nu$ $(x \in L^{\infty})$, $z \in S$, $z > 0$. Равносильны следующие утверждения.

а) Слабое замыкание множества функционалов

$$\{g \in (L^{\infty})^*_n : g(x) = \int_0^1 x(t)\cdot y(t)\,dt \quad (x \in L^{\infty}), \text{ где } |y| \le z\}$$

содержит h.

б) Носитель меры ν содержится в $N(z)$.

Возникает вопрос, для всякого ли сингулярного h найдется такой $z \in S$, что выполнено (б).

Как будет сейчас видно, это предположение во всяком случае противоречит *гипотезе континуума*.

ТЕОРЕМА 3. (CH). $\cup\{N(z) : z \in S\}$ не покрывает ни одно непустое G_δ - множество в Q.

СЛЕДСТВИЕ I. (CH) Существует плотное в Q множество точек, в каждой из которых пространства S и L^1 локально совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 2. (CH). В L^{∞} существуют функционалы (даже мультипликативные), не удовлетворяющие утверждению (а) предложения 2 ни при каком $z \in S$.

ЛИТЕРАТУРА

[I] И.М.Гельфанд, Д.А.Райков, Г.Е.Шилов. Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.

[2] Б.З.Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

[3] А.И.Векслер. Сиб.мат.ж., 1971, I2, №I, 54-64.

[4] K. Yosida, E. Hewitt. Trans. Amer. Math. Soc. 1952, 72, № I, 46-66.

Н.С.Гусельников

НЕПРЕРЫВНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ N -ТРЕУГОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

Пусть M - кольцо подмножеств некоторого множества T; $S = s(M)$ - σ -кольцо, порожденное кольцом M; X - банахово пространство; $R^+ = [0, +\infty)$. Кроме того, пусть $(G, |\cdot|)$ - *абелева квазинормированная группа*, т.е. абелева группа G, в которой для каждого элемента $x \in G$ определено действительное число $|x| \geq 0$, удовлетворяющее условиям:

1^0. Если $x = 0$, то $|x| = 0$;

2^0. $|x| = |-x|$;

3^0. Если $x_1, x_2 \in G$, то $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$.

Абелеву квазинормированную группу $(G, |\cdot|)$ будем называть секвенциально полной, если для всякой последовательности $\{x_n\} \subset (G, |\cdot|)$, для которой $|x_n - x_m| \xrightarrow[n,m]{} 0$, существует предел $x_0 \in (G, |\cdot|)$. Секвенциально полную абелеву квазинормированную группу будем обозначать символом $(G, |\cdot|, \Pi)$.

Определения N - треугольной и квазилипшицевой функций множества, треугольной меры, N - полумеры, а также понятия непрерывности сверху в нуле, сбоку в нуле и в нуле для функции множества таковы же, как и в работе [I].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Под супремацией функции множества $\varphi : M \to (G, |\cdot|)$, заданной на кольце M, будем понимать функцию множества τ, определяемую условием

ВЫПУСК

19

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Изд-во Ленингр. ун-та, 1960, 263 с.
2. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
3. Островський Й. В. До теорії розкладань багатовимірних безмежно подільних законів, ДАН УРСР, серія А, 1972, т. 11, с. 997—1000.
4. Островский И. В. О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты.— «Вестник ХГУ, серия математическая». Вып. 32. Харьков, 1966, с. 51—72.
5. Островский И. В. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов.—«Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова», 1965, т. 79. с. 198—235.
6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963. 776 с.
7. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953. 396 с.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, М., «Наука». 1969, 576 с.
9. Cuppens R., Decomposition des fonctions caracteristiques indésiniment divisibles de plusieurs variables a spectre de Poisson continu, «Ann. Inst.H. Poincare, «5, № 2, 1969, p. 123—133.
10. Levy P., Theorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, Gauthier — Villars, 1937, 200 c.
11. Cramer H., Problems in probability theory, Ann. math. stat., 18, № 2, 1947, p. 165—193.

УДК 513.88

Г. Я. Лозановский, канд. физ.-мат. наук

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ВЕКТОРНЫХ СТРУКТУРАХ

Хорошо известно, что сопряженное пространство X^* к банахову функциональному пространству X разлагается в прямую сумму пространств $\overline{X}$ и $\overline{X}^d$, где $\overline{X}$ есть пространство всех вполне линейных функционалов (т. е. функционалов, допускающих интегральное представление такого же типа как функционалы в L^p при $1 < p < \infty$), а $\overline{X}^d$ (т. е. дизъюнктное дополнение к $\overline{X}$ в X^*) *совпадает* с пространством всех анормальных функционалов на X.

Настоящая работа посвящена в основном изучению пространства $\overline{X}^d$ для произвольной архимедовой векторной структуры X и для двух важных классов банаховых функциональных пространств — *пространств* Марцинкевича $M(\psi)$ и пространств $L^{(p,\,q)}$ со смешанной нормой. В § 1 изучаются два специальных класса функционалов — *локализованные функционалы* и (связанные с ними) функционалы счетного типа. Показано (§ 2, теорема 1), что в важнейших случаях анормальный функционал счетного типа локализован.

С помощью установленных свойств локализованных функционалов удается доказать отсутствие проекторов из довольно большого класса банаховых функциональных пространств на некоторые их нормальные подпространства (§ 3, теоремы 2, 3; § 5, теорема 6). Например (§ 5, теорема 6), при $1 \leqslant p < \infty$ не существует проектора из $L^{(p,\,\infty)}$ на $L_0^{(p,\,\infty)}$, где $L_0^{(p,\,\infty)}$ — замыкание в $L^{(p,\,\infty)}$ множества всех ограниченных функций из $L^{(p,\,\infty)}$. Для случая $X = M(\psi)$ и $X = L^{(p,\,q)}$ получены полные ответы на следующие вопросы: при каких условиях X^* есть KB-пространство, пространство счетного типа, когда X^* содержит нелокализованные анормальные функционалы (§ 4, теорема 4; § 5, теорема 5). Например, $M(\psi)^*$ есть KB-пространство при $\varliminf\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$ и не является даже пространством счетного типа при $\varliminf\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. Главные результаты работы суть теоремы 1—6.

§ 1. Терминология и обозначения

Через N обозначается множество всех натуральных чисел. Сопряженное к нормированному пространству X обозначается через X^*. Проектором из нормированного пространства X на его подпространство Y называется линейный непрерывный оператор из X на Y, оставляющий элементы из Y на месте. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы в основном следуем [1]. K-линеалом (K-пространством, K_σ-пространством) называется (условно полная, условно σ-полная) линейная структура. Элементы x, y K-линеала X *называются дизъюнктными (обозначение: xdy)*, если $|x| \wedge |y| = 0$. *Дизъюнктным* дополнением множества $H \subset X$ называется множество $H^d = \{x \in X : xdy$ для всех $y \in H\}$. *Множество* $H \subset X$ называется компонентой, если $H = H^{dd}$. Через $E(X)$ обозначается булева алгебра всех компонент K-линеала X.

Нормальным подлинеалом K-линеала X называется такое его линейное подмножество Y, что из $x \in X$, $y \in Y$, $|x| \leqslant |y|$ следует $x \in Y$. Если вдобавок $Y^d = \{0\}$, то Y называется фундаментом в X. Элемент x K-линеала X будем называть элементом счетного типа, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных, положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счетно. K-линеалом счетного типа называется K-линеал, все элементы которого счетного типа (см. также [1, с. 173]).

Если X — K-линеал, то $\tilde{X}$ ($\bar{X}$) есть пространство всех регулярных (вполне линейных) функционалов на X. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть функционалом счетного типа, если f счетного типа как элемент K-пространства $\tilde{X}$. KN-линеалом (KB-линеалом) называется K-линеал X, одновременно являющийся нормированным (банаховым) пространством, в котором из $|x| \leqslant |y|$ следует $\|x\| \leqslant$

$\leqslant \| y \|$. Напомним, что для любого KB-линеала X справедливо $X^* = \tilde{X}$. KN-пространством ($K_\sigma N$-пространством) называется KN-линеал, являющийся K-пространством (K_σ-пространством). KB-пространством называется $K_\sigma N$-пространство X, в котором выполнены следующие два условия [1, с. 207]:

$$(A) \text{ если } x_n \downarrow 0 \ (n \in N), \quad \text{то } \| x_n \| \to 0;$$
$$(B) \text{ если } 0 \leqslant x_n \uparrow (n \in N) \quad \text{и } \sup \| x_n \| < \infty,$$

то существует $\sup x_n \in X$.

Напомним, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон как банахово пространство (теорема Огасавара).

§ 2. О локализованных функционалах и функционалах счетного типа

Всюду в этом параграфе X есть произвольный архимедов K-линеал, удовлетворяющий там, где это указано, дополнительным ограничениям. Напомним, что функционал $f \in \tilde{X}$ называется анормальным, если существует такой фундамент Φ в X, что сужение $f|_\Phi = 0$. Совокупность $\tilde{X}_{an}$ всех анормальных функционалов на X есть фундамент в $\overline{X}^d$, но, вообще говоря, $\tilde{X}_{an} \neq \overline{X}^d$ ($\overline{X}^d$ есть дизъюнктное дополнение множества $\overline{X}$ в $\tilde{X}$).

Однако равенство $\tilde{X}_{an} = \overline{X}^d$ имеет место, например, в том важнейшем частном случае, когда существует фундамент Y в X, такой, что $\overline{Y}$ тотально на Y. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{an} = X^* \cap \tilde{X}_{an}$.

Определение 1. *Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть локализованным, если в булевой алгебре $E(X)$ существует идеал $Z(f)$, удовлетворяющий условиям:*

(а) *сужение $f|_K = 0$ для любой $K \in Z(f)$;*

(б) *$Z(f)$ плотен в $E(X)$, т. е. если $K \in E(X)$, $K \neq \{0\}$, то существует $K_1 \in Z(f)$, такая, что $K \cap K_1 \neq \{0\}$.*

Совокупность всех локализованных функционалов на X будем обозначать через $\tilde{X}_{loc}$. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{loc} = X^* \cap \tilde{X}_{loc}$.

Замечание. Если X есть K-пространство и $f \in \tilde{X}$, то множество $\{ K \in E(X) : f|_K = 0 \}$ есть идеал в $E(X)$. Поэтому $f \in \tilde{X}_{loc}$ тогда и только тогда, когда указанный идеал плотен в $E(X)$.

Лемма 1. *Пусть Y есть K-пополнение X, $F \in \tilde{Y}_+$, $f = F|_X$. Тогда*

(а) *если $F \in \tilde{Y}_{loc}$, то и $f \in \tilde{X}_{loc}$;*

(б) *если f счетного типа, то и F счетного типа.*

Несложное доказательство леммы 1 опускаем.

Предложение 1. *$\tilde{X}_{loc}$ есть фундамент в $\tilde{X}_{an}$.*

Доказательство. Очевидно, $\tilde{X}_{loc}$ есть нормальное подпространство в $\tilde{X}_{an}$. Возьмем произвольный $f \in \tilde{X}_{an}$, $f > 0$ и покажем, что существует $g \in \tilde{X}_{loc}$, такой, что $0 < g \leqslant f$. Пусть сначала X есть K-пространство. По условию существует фундамент Φ в X, такой, что $f|_\Phi = 0$. Фиксируем $u \in X_+$ такой, что $f(u) > 0$. Положим $H = \{h : h \wedge (u - h) = 0, \ u - h \in \Phi\}$. Ясно, что $\inf H = 0$. Положим $g(x) = \inf \{ f((h)x) : h \in H \}$ для $x \in X_+$ и $g(x) = g(x_+) - g(x_-)$ для любого $x \in X$. Ясно, что $g(u) > 0$ и что $g \in \tilde{X}_{loc}$. Общий случай. Пусть Y есть K-пополнение X. Тогда существует $F \in \tilde{Y}_+$ такой, что $F|_X = f$. Ясно, что $F \in \tilde{Y}_{an}$, поэтому по уже доказанному существует $G \in \tilde{Y}_{loc}$ такой, что $0 < G \leqslant F$. Остается положить $g = G|_X$ и воспользоваться леммой 1. Предложение 1 доказано.

Замечание. Вообще говоря, $\tilde{X}_{loc} \neq \tilde{X}_{an}$.

Предложение 2. *Пусть X есть K-пространство, в котором существует фундамент Φ с тотальным $\overline{\Phi}$. Если $f_n \in \tilde{X}_{loc}$ $(n \in N)$ и $0 \leqslant f_n \uparrow f \in \tilde{X}$, то $f \in \tilde{X}_{loc}$. Таким образом, в этом случае $\tilde{X}_{loc}$ есть σ-замкнутый фундамент в $\tilde{X}_{an}$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что для любой $K \in E(X)$, $K \neq \{0\}$ существует $P \in E(X)$, такая, что $P \neq \{0\}$, $P \subset K$ и $f|_P = 0$. Можно считать, что K счетного типа и с единицей. Для каждого $n \in N$ построим последовательность $P^n_k \in E(X)$ $(k \in N)$, полную в K и такую, что $P^n_k \subset P^n_{k+1} \subset K$ и $f_n|_{P^n_k} = 0$ $(k \in N)$. В силу теоремы о диагональной последовательности [1, с. 180] существует последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, такая, что $P = \bigcap_{n=m}^{\infty} P^n_{k_n} \neq \{0\}$ для достаточно больших m. Остается заметить, что $P \in E(X)$, $P \subset K$ и $f|_P = 0$. Предложение 2 доказано.

Мы далее установим связь между локализованными функционалами и функционалами счетного типа. Предварительно докажем следующие два предложения, имеющие и самостоятельный интерес.

Предложение 3. *Пусть по-прежнему X — архимедов K-линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Следующие два утверждающие эквивалентны:*

(а) *f-счетного типа;*

(б) существуют $u_n \in X_+$ $(n \in N)$, такие, что $u_n \uparrow$ и $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x \wedge n u_n)$ для любого $x \in X_+$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Для каждого $v \in X_+$ положим $f_v(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_+ \wedge nv) - \lim_{n \to \infty} f(x_- \wedge nv)$, $x \in X$. Ясно, что $f_v \in \tilde{X}_+$ и $\sup \{ f_v : v \in X_+ \} = f$. Так как f счетного типа, то существует последовательность $v_n \in X_+ (n \in N)$, такая, что $\sup \{f_{v_n} : n \in N\} = f$. Остается положить $u_n = v_1 + \ldots + v_n \; (n \in N)$.

Докажем (б)$\Rightarrow$(а). Для $m \in N$ положим $f_m(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_+ \wedge nu_m) - \lim\limits_{n \to \infty} f(x_- \wedge nu_m)$. Ясно, что $f_m \in \tilde{X}_+$ и $f_m \uparrow f$. Поэтому достаточно доказать, что f_m — счетного типа $(m \in N)$. Заметим, что если $g \in \tilde{X}_+$, $g \leqslant f_m$, $g(u_m) = 0$, то $g = 0$. Пусть теперь $g_t \in \tilde{X}_+ (t \in T)$ попарно дизъюнктны и $0 < g_t \leqslant f_m$. Тогда очевидно $\sum\limits_{t \in T} g_t(u_m) \leqslant f_m(u_m)$, поэтому T не более чем счетно. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть X — KB-линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

(а) f — счетного типа;

(б) существует $u \in X_+$, такое, что $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x \wedge nu)$ для любого $x \in X_+$.

Доказательство. Справедливость (б)$\Rightarrow$(а) прямо следует из предложения 3. Для доказательства (а)$\Rightarrow$(б) достаточно применить предложение 3 и положить $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, где числа $\alpha_n > 0$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|u_n\| < \infty$. Предложение 4 доказано.

Лемма 2. *Пусть X — K-пространство, в котором существует фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$. Пусть $f \in \tilde{X}_{an}$ и f счетного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. В силу предложения 1 $f = \sup \{g : 0 \leqslant g \leqslant f, \; g \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}\}$. Так как f счетного типа, то существует счетное множество $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, такое, что $0 \leqslant g_n \uparrow f$ и $g_n \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}} (n \in N)$. Остается применить предложение 2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть X — банахово KN-пространство, $f \in \tilde{X}_{an}$ и f счетного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Достаточно убедиться, что для любой $K \in E(X)$, $K \neq \{0\}$ существует $P \in E(X)$, $P \neq \{0\}$, такая, что $P \subset K$ и $f|_P = 0$. Пусть $u \in X_+$ из предложения 4, Φ — фундамент в X, такой, что $f|_\Phi = 0$. Если $u d K$, то $f|_K = 0$ и можно принять $P = K$. В противном случае существует $h \in \Phi$, такой, что $0 < h \in K$, $(u - h) \wedge h = 0$, и за P можно принять главную компоненту в X порожденную h. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть X есть архимедов K-линеал, в котором имеется фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$, или же X есть KB-линеал. Если $f \in \tilde{X}_{an}$ и f счетного типа, то $f \in \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Пусть Y есть K-пополнение X и $F \in Y_+$ таков, что $F|_X = f$. В силу леммы 1 достаточно показать, что $F \in Y_{\mathrm{loc}}$. Но по той же лемме 1 F счетного типа. Напомним, что K-пополнение KB-линеала при естественном распространении нормы (б) — полно [2]. Теперь требуемое легко следует из лемм 2 и 3. Теорема 1 доказана.

Замечание. Нетрудно привести пример архимедова K-линеала X и функционала $f \in \tilde{X}_{an}$ счетного типа, такого, что $f \notin \tilde{X}_{\mathrm{loc}}$. Кроме того, нетрудно привести пример локализованного функционала, не являющегося функционалом счетного типа.

В заключение этого параграфа остановимся на одном важном специальном классе функционалов счетного типа — дискретных функционалах. Напомним, что элемент x K-линеала X называется дискретным [1, с. 88], если не существует дизъюнктных между собой элементов $y \geqslant 0$ и $z > 0$ таких, что $y \leqslant |x|$ и $z \leqslant |x|$. K-пространство X называется дискретным, если каждый элемент из X есть соединение дискретных элементов. Пусть теперь X — K-линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Хорошо известно, что f является дискретным элементом K-пространства $\tilde{X}$ тогда и только тогда, когда $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ при всех $x, y \in X$. Из результатов Т. Андо [3] и несложных рассуждений следует, например, что на каждом несепарабельном пространстве Орлича на $[0, 1]$ имеется в определенном смысле «много» дискретных функционалов.

Предложение 5. *Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(а) X^* — дискретно;

(б) в X выполнено условие (A) из определения KB-пространства и X дискретно.

Предложение 6. *Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(а) в X^* нет ненулевых дискретных элементов;

(б) для любых $x \in X_+$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся попарно дизъюнктные $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_+$, такие, что $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $\|x_k\| \leqslant \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Несложные доказательства предложений 5 и 6 опускаем.

§ 3. Некоторые приложения

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с вполне конечной неотрицательной счетно аддитивной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — линеал всех конечных вещественных измеримых функций на нем, причем эквивалентные по мере μ множества и функции отождествляются. Если $E \subset T$, χ_E означает характеристическую функцию E. Для $x \in S$ полагаем $\mathrm{supp}\, x = \{t \in T : x(t) \neq 0\}$.

Банаховым функциональным пространством (б. ф. п) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство X, являющееся линейным под-

Через $M(\psi)$, как обычно, обозначается б. ф. п., состоящее из всех $x \in S$, таких, что

$$\| x \|_{M(\psi)} = \sup_{0<h<1} \frac{\int_0^h x^*(t)\,dt}{\psi(h)} < \infty,$$

где x^* есть невозрастающая перестановка функции $|x|$.

Следующая теорема показывает, в частности, что (в предположении справедливости континуум-гипотезы) при $\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$ в пространстве $M(\psi)$ существуют нелокализованные анормальные функционалы, но все анормальные функционалы локализованы при $\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$.

Теорема 4.

1. *Пусть* $\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$. *Тогда* $M(\psi)^*$ *есть* KB-*пространство*[1] *и потому для любого анормального функционала* $f \in M(\psi)^*$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует* $E \in \Sigma$ *такое, что* $\mu E < \varepsilon$ и $f = f_E$.

2. *Пусть* $\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. *Тогда* $M(\psi)^*$ *есть* K-*пространство несчетного типа и* (в предположении справедливости континуум-гипотезы) *существует анормальный функционал* $f \in M(\psi)^*_+$, такой, что

(а) *если* $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$, *то* $\| f_E \|_{M(\psi)^*} = 1$;

(б) $f(x) = 0$ *для любого* $x \in L^\infty[0, 1]$.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы, которое мы разобьем на ряд этапов.

1. Докажем сначала утверждение 1. При этом можно считать, что ψ строго возрастает на $[0, 1]$. Напомним, что KN-линеал X называется квазиравномерно выпуклым [6, с. 355], если существует такое число $\eta > 0$, что для любых дизъюнктных $x_1, x_2 \in X_+$ с $\| x_1 \| = \| x_2 \| = 1$ справедливо $\| x_1 + x_2 \| \leqslant 2 - \eta$. Известно, что для квазиравномерно выпуклого KN-линеала X пространство X^* является KB-пространством. Простые вычисления показывают, что для любых дизъюнктных $x_1, x_2 \in M(\psi)_+$ с $\| x_1 \|_{M(\psi)} = \| x_2 \|_{M(\psi)} = 1$ справедливо

$$\| x_1 + x_2 \|_{M(\psi)} \leqslant \frac{2}{\inf\limits_{0<t<1} \dfrac{\psi(t)}{\psi\left(\dfrac{t}{2}\right)}}.$$

[1] Напомним, что всякое KB-пространство есть K-пространство счетного типа.

Поэтому, в силу леммы 5 $M(\psi)$ квазиравномерно выпукло, следовательно, $M(\psi)^*$ есть KB-пространство. Остается применить теорему 1 и лемму 4. Утверждение 1 доказано.

2) Пусть теперь $\varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$ и поэтому $R(\psi) = 1$. Зафиксируем числовую последовательность a_n, такую, что

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n} \ (n \in N) \ \text{и} \ \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} = 1.$$

3) Положим для почти всех $t \in [0, 1]$ $\varphi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$. Ясно, что $\varphi \in M(\psi)$, причем $\| \varphi\chi_{[0,\varepsilon]} \|_{M(\psi)} = 1$ для всех $\varepsilon \in (0, 1]$.

4) Обозначим через Z множество всех $x \in M(\psi)_+$, таких, что для некоторого $\varepsilon \in (0, 1]$ (зависящего от x) функции x и $\varphi\chi_{[0,\varepsilon]}$ равноизмеримы.

5) Напомним, что Σ есть совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0, 1]$, причем эквивалентные множества отождествляются. Через Δ будем обозначать класс всех множеств нулевой меры. Зафиксируем какое-нибудь $\Sigma_0 \subset \Sigma$ такое, что $\Delta \notin \Sigma_0$ и мощность множества Σ_0 есть первое несчетное кардинальное число. В предположении справедливости континуум гипотезы можно принять $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \{\Delta\}$. Для доказательства теоремы достаточно установить существование такого $f \in M(\psi)^*_+$, что $f(x) = 0$ для любого $x \in L^\infty[0, 1]$, $\| f_E \|_{M(\psi)^*} = 1$ для любого $E \in \Sigma_0$ и f представим в виде

$$f(x) = \sum_{E \in \Sigma_0} f^E(x), \quad x \in M(\psi),$$

где $0 < f^E \in M(\psi)^*$ и $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ из Σ_0.

6) **Лемма 6.** *Существует отображение* $\Sigma_0 \ni E \to z^E \in Z$, *такое, что*

(а) *если* $E_1, E_2 \in \Sigma_0$ *и* $E_1 \neq E_2$, *то* $z^{E_1} \wedge z^{E_2} \in L^\infty[0, 1]$;

(б) *если* $E \in \Sigma_0$, *то* $\operatorname{supp} z^E \subset E$.

Справедливость леммы без труда устанавливается с помощью трансфинитной индукции.

7) Для $E \in \Sigma_0$ и $n \in N$ построим множество R_E^n следующим образом. Если $\mu(\operatorname{supp} z^E) \leqslant a_n$, то полагаем $R_E^n = \operatorname{supp} z^E$. Если же $\mu(\operatorname{supp} z^E) > a_n$, то за R_E^n принимаем любое измеримое множество, такое, что $\mu R_E^n = a_n$, $R_E^n \subset \operatorname{supp} z^E$ и

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t \in R_E^n} z^E(t) \geqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1] \setminus R_E^n} z^E(t).$$

Если E фиксировано, то, очевидно, $\mu R_E^n = a_n$ при достаточно больших n. Кроме того, если $E_1 \neq E_2$ из Σ_0, то $\mu(R_{E_1}^n \cap R_{E_2}^n) = 0$ при достаточно больших n.

8) Зафиксируем какой-нибудь обобщенный предел Lim, определенный на классе всех ограниченных числовых последовательностей [7, с. 144]. По каждому $E \in \Sigma_0$ построим функционал $f^E \in M(\psi)_+^*$, положив

$$f^E(x) = \operatorname{Lim}\left(\left\{\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_{R_E^n} x d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}\right), \quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $\| f^E \|_{M(\psi)^*} \leqslant 1$. Кроме того, $f^E(\chi_{[0,1]}) = 0$, ибо

$$\frac{1}{\psi(a_n)} \int\limits_{R_E^n} \chi_{[0,1]} d\mu \leqslant \frac{a_n}{\psi(a_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Заметим также, что $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ $(E_1, E_2 \in \Sigma_0)$.

9) Возьмем произвольные попарно различные $E_1, E_2, \ldots, E_m \in \Sigma_0$ и для $x \in M(\psi)_+$ оценим сумму

$$\sigma = f^{E_1}(x) + f^{E_2}(x) + \cdots + f^{E_m}(x).$$

Фиксируем номер $n_0 \geqslant m$, такой, что при $n \geqslant n_0$ справедливо

$$\mu(R_{E_i}^n \cap R_{E_j}^n) = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_{R_{E_k}^n} x d\mu \leqslant \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_0^{ma_n} x^* d\mu \leqslant \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_0^{na_n} x^* d\mu,$$

где x^* есть невозрастающая перестановка x. Отсюда

$$\gamma_n \leqslant \left[\frac{1}{\psi(na_n)} \cdot \int\limits_0^{na_n} x^* d\mu\right] \cdot \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} \leqslant \| x \|_{M(\psi)} \cdot \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)}.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} = 1$, то $\sigma = \operatorname{Lim} \gamma_n \leqslant \| x \|_{M(\psi)}$.

Отсюда ясно, что для любого $x \in M(\psi)$ справедливо

$$\sum_{E \in \Sigma_0} | f^E(x) | \leqslant \| x \|_{M(\psi)}.$$

10) Положим теперь

$$f(x) = \sum_{E \in \Sigma_0} f^E(x), \quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $f \in M(\psi)_+^*$, $\| f \|_{M(\psi)^*} \leqslant 1$ и $f(\chi_{[0,1]}) = 0$. Осталось показать, что $f^E \geqslant 0$ и $\| f^E \|_{M(\psi)^*} \geqslant 1$ при всех $E \in \Sigma_0$. Так как при достаточно больших $n \in N$

$$\frac{1}{\psi(a_n)} \int\limits_{R_E^n} z^E d\mu = \frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_0^{a_n} \varphi(t)\, dt = 1,$$

то

$$f^E(z^E) = \operatorname{Lim}\left(\left\{\frac{1}{\psi(a_n)} \cdot \int\limits_{R_E^n} z^E d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1.$$

Поэтому $\| f^E \|_{M(\psi)^*} \geqslant f(z^E) \geqslant f^E(z^E) \geqslant 1$.

Теорема доказана.

§ 5. О пространствах со смешанной нормой

В этом параграфе (T, Σ, μ) есть единичный квадрат $\{(t_1, t_2) : 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1\}$ с мерой Лебега. Пусть p, q суть числа, такие, что $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Через $L^{(p,q)}$ как обычно обозначаем пространство со смешанной нормой [8], элементы которого суть функции $x(t_1, t_2)$, определенные и измеримые на указанном квадрате, такие, что

$$\| x \|_{L^{(p,q)}} = \| \| x \|_{L^p(t_1)} \|_{L^q(t_2)} < \infty^1.$$

Теорема 5. *Пусть $X = L^{(p,q)}$. Тогда*

(а) *X^* есть КВ-пространство при $(1 < p \leqslant \infty,\ 1 < q \leqslant \infty)$;*

(б) *X^* счетного типа, но не является КВ-пространством при $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ q = 1)$ и при $(p = 1,\ 1 < q < \infty)$;*

(в) *X^* не есть пространство счетного типа при $(p = 1,\ q = \infty)$. При этом, тем не менее, в пространстве $L^{(1,\infty)}$ все анормальные функционалы локализованы.*

---

[1] Подробнее,

$$\| x \|_{L^{(p,q)}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 | x(t_1, t_2) |^p dt_1\right)^{\frac{q}{p}} dt_2\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \leqslant p, q < \infty; \\ \operatorname*{vraisup}\limits_{t_2} \left(\int\limits_0^1 | x(t_1, t_2) |^p dt_1\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty,\ q = \infty; \\ \left(\int\limits_0^1 (\operatorname*{vraisup}\limits_{t_1} | x(t_1, t_2) |)^q dt_2\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } p = \infty,\ 1 \leqslant q < \infty; \\ \operatorname*{vraisup}\limits_{(t_1, t_2)} | x(t_1, t_2) |, & \text{если } p = q = \infty. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5 разобьем на ряд этапов:

1) Простые вычисления показывают, что при $(1 < p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q < \infty)$ пространство X квазиравномерно выпукло, поэтому X^* есть KB-пространство. Утверждение (а) доказано.

2) В случае $(1 \leqslant p < \infty,\ q = 1)$ и в случае $(p = 1,\ 1 < q \leqslant \infty)$ X, очевидно, есть KB-пространство, в силу чего $X^* = \overline{X}$ счетного типа. Так как в указанных случаях X не рефлексивно [8], то по теореме Огасавара [1, с. 294] X^* не есть KB-пространство. В случае $(p = \infty,\ q = 1)$, т. е. в случае $X = L^{(\infty,1)}$ дуальное пространство $X' = L^{(1,\infty)}$ не есть KB-пространство (см., например, [9]). Поэтому и подавно X^* не есть KB-пространство. Заметим, что измеримые ограниченные функции плотны в $L^{(\infty,1)}$. Отсюда, в силу предложения 4, следует, что X^* счетного типа. Утверждение (б) доказано.

3) Всюду далее полагаем $X = L^{(1,\infty)}$. Зафиксируем какой-нибудь $F \in (L^\infty[0,1])^*$, такой, что при всех $y \in L^\infty[0,1]$ справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,[\operatorname{vraiinf}_{0<t<\varepsilon} y(t)] \leqslant F(y) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\,[\operatorname{vraisup}_{0<t<\varepsilon} y(t)].$$

Такой функционал, существует.

4) Пусть $\tau \in [0,1]$, $x \in X$. Для почти всех $t_2 \in [0,1]$ полагаем

$$z_{\tau,x}(t_2) = \int_{\tau-\tau t_2}^{\tau-\tau t_2+t_2} x(t_1,t_2)\,dt_1.$$

Ясно, что $z_{\tau,x} \in L^\infty[0,1]$.

5) Положим теперь для $\tau \in [0,1]$

$$\varphi_\tau(x) = F(z_{\tau,x}),\quad x \in X.$$

Ясно, что $\varphi_\tau \in X^*_+$, *причем* $\varphi_\tau > 0$.

6) Покажем, что для любого конечного числа попарно различных точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [0,1]$ справедливо неравенство $\|\sum_{k=1}^n \varphi_{\tau_k}\|_{X^*} \leqslant 1$. Действительно, пусть $x \in X_+$, $\|x\|_X \leqslant 1$. Для почти всех достаточно малых $t_2 > 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^n z_{\tau_k,x}(t_2) \leqslant \int_0^1 x(t_1,t_2)\,dt_1 \leqslant 1,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{\tau_k}(x) = F\left(\sum_{k=1}^n z_{\tau_k,x}\right) \leqslant 1.$$

7) Положим теперь

$$f(x) = \sum_{\tau\in[0,1]} \varphi_\tau(x),\quad x \in X.$$

Ясно, что $f \in X^*_+$ не есть функционал счетного типа, ибо функционалы φ_τ, $\tau \in [0,1]$ попарно дизъюнктны и $0 < \varphi_\tau \leqslant f$. Итак, X^* не есть пространство счетного типа.

8) *Лемма 6. Для любого* $f \in X^*_+$ *существует* $g \in (L^\infty[0,1])^*_+$ *такой, что*

$$f(x) \leqslant g\left(\int_0^1 x(t_1,t_2)\,dt_1\right) \text{ при всех } x \in X_+.$$

Доказательство. Так как множество $\{h \in \overline{X}_+ : \|h\|_{X^*} \leqslant 1\}$ слабо* плотно в множестве $\{h \in X^*_+ : \|h\|_{X^*} \leqslant 1\}$, то существует направление $K_\alpha \in L^{(\infty,1)}$ $(\alpha \in A)$, такое, что

$$\sup_{\alpha\in A} \|K_\alpha\|_{L^{(\infty,1)}} < \infty$$

и

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 K_\alpha(t_1,t_2)\,x(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 \xrightarrow[\alpha\in A]{} f(x) \text{ при всех } x \in X.$$

Положим для почти всех $t_2 \in [0,1]$

$$H_\alpha(t_2) = \operatorname{vraisup}_{0<t_1<1} K_\alpha(t_1,t_2).$$

Для $\alpha \in A$ определим функционал

$$h_\alpha(x) = \int_0^1\!\!\int_0^1 x(t_1,t_2)\,H_\alpha(t_2)\,dt_1\,dt_2,\quad x \in X.$$

Ясно, что $h_\alpha \in X^*_+$ и $\sup_{\alpha\in A}\|h_\alpha\|_{X^*} < \infty$. Пусть $\varphi \in X^*_+$ есть обобщенная предельная точка направления h_α $(\alpha \in A)$. Для $y \in L^\infty[0,1]$ положим

$$\hat{y}(t_1,t_2) = y(t_2) \text{ при } 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1.$$

Теперь взяв

$$g(y) = \varphi(\hat{y}),\quad y \in L^\infty[0,1],$$

получаем, как легко видеть, искомый функционал g. Лемма 6 доказана.

9) *Лемма 7.* Пусть $f \in X^*_{an}$. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое* $P \subset [0,1]$, *такое, что* $\nu P < \varepsilon$ (здесь ν — *мера Лебега на прямой*) *и* $f = f_E$, *где*

$$E = \{(t_1,t_2) : 0 \leqslant t_1 \leqslant 1,\ t_2 \in P\}.$$

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Пусть $g \in (L^\infty[0,1])^*_+$ — соответствующий ему функционал из леммы 6. Разложим $g = g_1 + g_2$, где g_1 анормальный, а g_2 вполне линейный функционал на $L^\infty[0, 1]$. Пусть $v \in L^1[0, 1]$ такова, что

$$g_2(x) = \int_0^1 y(t)\, v(t)\, dt, \quad y \in L^\infty[0, 1].$$

Тогда при всех $x \in X_+$ имеем

$$f(x) \leqslant g_1\left(\int_0^1 x(t_1, t_2)\, dt_1\right) + \int_0^1\int_0^1 x(t_1, t_2)\, v(t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Но функционал

$$G(x) = \int_0^1\int_0^1 x(t_1, t_2)\, v(t_2) dt_1 dt_2, \ x \in X,$$

очевидно, вполне линеен на X, поэтому $f dG$. Следовательно,

$$f(x) \leqslant g_1\left(\int_0^1 x(t_1, t_2)\, dt_1\right), \quad x \in X_+.$$

Но g_1 анормальный, а значит, и локализованный функционал на $L^\infty[0, 1]$. Поэтому существует $P \subset [0, 1]$, такое, что $\nu P < \varepsilon$ и $g_1 = (g_1)_P$. *Ясно*, что P — требуемое множество. *Лемма* 7, а с ней и теорема 5, доказаны.

Обозначим через $L_0^{(p, q)}$ замыкание в $L^{(p, q)}$ множества всех ограниченных функций из $L^{(p, q)}$. Нетрудно видеть, что $L_0^{(p, q)} \neq L^{(p, q)}$ тогда и только тогда, когда $(1 \leqslant p < \infty,\ q = \infty)$.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда не существует проектора из* $L^{(p, \infty)}$ *на* $L_0^{(p, \infty)}$.

Действительно, из теорем 1 и 5 следует, что $(L^{(p, \infty)})^*_{an} = (L^{(p, \infty)})^*_{loc}$, после чего остается применить теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., «Наука», 1961. с. 78.
2. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О метрической полноте нормированных и счетно-нормированных структур. — «Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат.» Вып. 19. № 4, 1966, с. 12—15.
3. Andô T. Linear functionals on Orlicz spaces. — Nieuw Archief Wiskunde. 1960, 3, VIII, p. 1—16.
4. Pelczynski A., Sudakov V. N. Remark on noncomplemented subspaces of the space $m(S)$. Coll. Math, 1962, т. 9, p. 85—88.
5. Семенов Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. — ДАН СССР. 1964, т. 156, № 6, с. 1292—1295.
6. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., «Наука», 1950. 546 с.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., «Наука», 1959. 684 с.
8. Banedek A., Panzone R. The spaces L^P with mixed norm. — Duke Math I. 28, 1961 p. 301—324.
9. Seever G. L. A peculiar Banach function space. — „Proc. Amer. Math. Soc". 16, 1965, p. 662—664.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 14
ВЫПУСК 5
НОЯБРЬ
1973

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 14, № 5 (1973), 723—732

УДК 513.8

О НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ KN-ЛИНЕАЛОВ

Ю. А. Абрамович, Г. Я. Лозановский

Изучаются свойства некоторых числовых характеристик в нормированной структуре, характеризующие ее сопряженное пространство. Типичный результат следующей. Пусть X есть K_0N-пространство или KB-линеал. Если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, состоящей из попарно дизъюнктных положительных элементов с нормами не превосходящими 1, справедливо

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\| = 0,$$

то все нечетные сопряженные пространства X^*, X^{***}, ... суть KB-пространства. Библ. 8 назв.

При рассмотрении нормированных пространств и, в частности, нормированных линейных структур (KN-линеалов) явное описание сопряженного пространства часто весьма затруднительно. В то же время иногда не требуется явного описания сопряженного пространства, а требуется лишь выяснить, обладает ли сопряженное пространство теми или иными *заданными свойствами*. Так, например, если X — KN-линеал, то весьма полезно знать, является ли X^* KB-пространством (определение см. в [1], стр. 207). Одно достаточное условие этого было дано Шимогаки [2]. Другое достаточное условие может быть дано с помощью числовых характеристик нормированного пространства с конусом, введенных Е. А. Лифшицем [3].

В настоящей работе изучаются указанные числовые характеристики KN-линеалов, даются некоторые усиления упомянутого результата Шимогаки и устанавливается связь между результатами работ [3] и [2]. Показано, в частности, что для любого квазиравномерно выпуклого

KN-линеала X пространство X^* есть KB-пространство (теорема 3). Некоторые из результатов этой работы были сформулированы (без доказательств) в краткой заметке [4] одного из авторов.

1. Терминология и обозначения. Если E — нормированное пространство, то $U_E = \{x \in E : \|x\|_E \leqslant 1\}$, E^* — сопряженное пространство. Если B — бикомпакт, т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство, то $C(B)$ есть пространство всех вещественных непрерывных функций на B. Через $\|\cdot\|_\infty$ будем обозначать обычную равномерную норму на $C(B)$.

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы полностью следуем монографии [1]. На протяжении всей работы под X понимается произвольный KN-линеал, удовлетворяющий, там, где это указано, некоторым дополнительным условиям, $U_X^+ \overset{\text{def}}{=} U_X \cap X_+$. KN-линеал X называется *интервально полным*, если всякая порядково ограниченная (b)-фундаментальная последовательность его элементов (b)-сходится. Если Y есть (b)-пополнение X, то мы считаем, что порядок в Y естественный и X вложено в Y естественным образом ([1], стр. 197). Для $u \in X$ полагаем $X_u = \{x \in X : |x| \leqslant \lambda |u|$ для некоторого $\lambda \geqslant 0\}$. Через N обозначается множество всех натуральных чисел.

2. Формулировки основных результатов.

Определение 1. Для любого $n \in N$ полагаем

$$l(X; n) = \frac{1}{n} \sup\{\|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\| : x_i \in U_X^+ (i = 1, \ldots, n)\},$$

$$l_d(X; n) = \frac{1}{n} \sup\{\|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\| : x_i \in U_X^+ (i = 1, \ldots, n),\ x_i \wedge x_j = 0 \ \text{при}\ i \neq j\}.$$

Отметим, что константы $l(X; n)$ отличаются лишь множителями $1/n$ от констант, введенных в [3].

Ясно, что $l_d(X; n) \leqslant l(X; n) \leqslant 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного KN-линеала X справедливы следующие утверждения:*

(a) $l(X; mn) \leqslant l(X; m) \cdot l(X; n)$ $(m, n \in N)$;

(b) $l(X; n+1) \leqslant l(X; n)$ $(n \in N)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} l(X; n)$ *равен* 0 *или* 1;

(d) $l(X; n) = l_d(X; n)$ $(n \in N)$.

Замечание. Если X есть $K_\sigma N$-пространство, то утверждение (d) тривиально.

Определение 2. Будем говорить, что в KN-линеале X выполнено условие (L), если $\lim\limits_{n\to\infty} l(X; n) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если в KN-линеале X выполнено условие (L), то все нечетные сопряженные пространства X^*, X^{***}, ... суть KB-пространства.*

Напомним ([5], стр. 355), что KN-линеал X называется *квазиравномерно выпуклым*, если существует число $\eta > 0$ такое, что для всякой пары дизъюнктных элементов $x_1, x_2 \in U_X^+$ справедливо неравенство $\|x_1 + x_2\| < 2 - \eta$.

Иначе говоря, X называется квазиравномерно выпуклым, если $l_d(X; 2) < 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Если X — квазиравномерно выпуклый KN-линеал, то в X выполнено условие (L) и, следовательно, X^*, X^{***}, ... суть KB-пространства.*

В работе Шимогаки [2] было введено следующее условие, которое мы обозначим через (S).

Определение 3. Будем говорить, что в KN-линеале X выполнено условие (S), если для любой последовательности $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|x_1 \vee \ldots \vee x_n\| = 0. \qquad (*)$$

Определение 4. Будем говорить, что в KN-линеале X выполнено условие (S_d), если для любой последовательности $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ такой, что $x_n \wedge x_m = 0$ при $n \neq m$, справедливо $(*)$.

Ясно, что $(S) \Rightarrow (S_d)$.

ТЕОРЕМА 4. *В любом KN-линеале X условия (L) и (S) равносильны.*

Замечание. В [2] показано, что, если X есть $K_\sigma N$-пространство с полунепрерывной нормой и в X выполнено условие (S), то X^* есть KB-пространство. Как следует из наших теорем 4 и 2, условие (S) (и притом без всяких дополнительных предположений о KN-линеале X) влечет за собой, что все нечетные сопряженные пространства к X суть KB-пространства.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство или интервально полный KN-линеал. Тогда в X условия (S) и (S_d) равносильны.*

З а м е ч а н и е. Нам не известно, будут ли условия (S) и (S_d) равносильны в произвольном KN-линеале.

3. Доказательство сформулированных теорем.

ЛЕММА 1. *Пусть Y есть (b)-пополнение KN-линеала X. Тогда $l(X; n) = l(Y; n)$; $l_d(X; n) = l_d(Y; n)$ при всех $n \in N$.*

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Справедливость п. (a) теоремы без труда следует из определения 1. Докажем (b). Пусть $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in U_X^+$. Ясно, что

$$n(x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee x_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \sup\{x_j : 1 \leqslant j \leqslant n+1, j \neq i\}.$$

Следовательно, $\frac{1}{n+1}(x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee x_{n+1}) \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n} \sup\{x_j : 1 \leqslant j \leqslant n+1,\ j \neq i\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} l(X;\ n) = l(X;\ n).$$

Отсюда, очевидно, вытекает требуемое.

(c). В силу (b) существует $\lim l(X; n) = l$ и $0 \leqslant l \leqslant 1$. Из (a) имеем $l(X; n^2) \leqslant [l(X; n)]^2$, откуда $l \leqslant l^2$. Поэтому $l = 0$ или $l = 1$.

(d). В силу леммы 1 можем считать, что X (b)-полон. Фиксируем произвольные $x_1, \ldots, x_n \in U_X^+$. Положим $u = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Пусть $f \in \overset{*}{X}_+$, причем $\|f\| = 1$ и $f(u) = \|u\|$. Так как X полон по норме, то X_u есть (r)-полный *K-линеал* ограниченных элементов. По теореме Крейнов-Какутани X_u алгебраически и порядково изоморфен пространству $C(B)$ на подходящем бикомпакте B. Сужение функционала f на $X_u = C(B)$ обозначим через φ. Для завершения доказательства, очевидно, достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть B — бикомпакт, $x_1, \ldots, x_n \in C(B)_+$ и $\varphi \in \overset{*}{C}(B)_+$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют $y_1, \ldots, y_n \in C(B)_+$ такие, что 1) $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; 2) $y_i \wedge y_j = 0$ при $i \neq j$; 3) $\varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_n) + \varepsilon \geqslant \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем вести доказательство леммы индукцией по n. Пусть $n = 2$. Положим $G_1 = \{t \in B: x_1(t) > x_2(t)\}$, $G_2 = \{t \in B: x_1(t) < x_2(t)\}$ и $F_0 = \{t \in B: x_1(t) = x_2(t)\}$. Пусть μ есть неотрицательная регулярная борелевская мера, отвечающая функционалу φ. Найдем замкнутые множества F_i такие, что $F_i \subset G_i$, $\mu(G_i \setminus F_i) < \delta$ $(i = 1, 2)$, где $\delta > 0$ пока произвольно. Для трех попарно непересекающихся замкнутых множеств F_0, F_1, F_2 существуют попарно непересекающиеся открытые множества G_0', G_1', G_2' такие, что $F_i \subset G_i'$ $(i = 0, 1, 2)$ и $G_i' \subset G_i$ $(i = 1, 2)$. В силу теоремы Урысона непрерывные неотрицательные функции $x_1|_{F_0}$, $x_1|_{F_1}$, $x_2|_{F_2}$ *можно продолжить с сохранением непрерывности и неотрицательности на все B так, что продолженные функции* (обозначим их x_0', x_1', x_2' соответственно) обращаются в нуль вне G_i' $(i = 0, 1, 2)$ и мажорируются функциями $x_1 \wedge x_2$, x_1, x_2 соответственно. Положим $y_1 = x_0' + x_1'$ и $y_2 = x_2'$. Ясно, что $y_1 \wedge y_2 = 0$ и $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, 2)$. Так как на $\bigcup_{i=0}^{2} F_i$ $x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2 = 0$, то имеем

$$\varphi(x_1 \vee x_2) - \varphi(y_1 \vee y_2) = \int_B [x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2]\, d\mu =$$

$$= \int_{(G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)} [x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2]\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_{(G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)} x_1 \vee x_2\, d\mu \leqslant \max_{t \in B} [x_1(t) \vee x_2(t)] \cdot$$

$$\cdot [\mu(G_1 \setminus F_1) + \mu(G_2 \setminus F_2)] \leqslant 2\delta \max_{t \in B} [x_1(t) \vee x_2(t)].$$

Следовательно, $\varphi(x_1 \vee x_2) - \varphi(y_1 \vee y_2) < \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. Допустим теперь, что наше утверждение доказано для всех $n \leqslant k$, и докажем его для $k + 1$. Рассмотрим два элемента $x_1 \vee \ldots \vee x_k$ и x_{k+1}. В силу уже доказанного найдутся v и w такие, что $0 \leqslant v \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_k$, $0 \leqslant w \leqslant x_{k+1}$, $v \wedge w = 0$ и $\varphi(v \vee w) + \varepsilon/2 \geqslant \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee x_{k+1})$. Далее рассмотрим элементы $v \wedge x_1$, $v \wedge x_2, \ldots, v \wedge x_k$. В силу индукционного предположения существуют попарно дизъюнктные $y_1, \ldots, y_k$ такие, что $0 \leqslant y_i \leqslant v \wedge x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $\varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_k) + \varepsilon/2 \geqslant \varphi[(v \wedge x_1) \vee (v \wedge x_2) \vee \ldots \vee (v \wedge x_k)] = \varphi(v)$. Отсюда ясно, что элементы $y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} = w$ — требуемые, ибо они попарно дизъюнктны, $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, k + 1)$ и $\varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_k \vee y_{k+1}) = \varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_k) + \varphi(y_{k+1}) \geqslant \varphi(v) - \varepsilon/2 + \varphi(w) \geqslant \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee x_{k+1}) - \varepsilon$. Лемма 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Из теоремы 1 и определения 2 вытекает следующая простая лемма.

ЛЕММА 3. *Если в X не выполнено условие (L), то $l_d(X; n) = l(X; n) = 1$ при всех $n \in N$.*

Действительно, в силу п. (c) теоремы 1 $\lim\limits_n l(X; n) = 1$, а тогда в силу пп. (d) и (c) той же теоремы $l_d(X; n) = l(X; n) = 1$.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 3 работы [3] следует, что $l(X; n) = l(X^{**}; n) = \ldots$ $(n \in N)$; следовательно, в каждом из пространств X, X^{**}, … выполнено условие (L), а потому ([3], теорема 1) конусы X_+^*, X_+^{***}, … вполне правильны. Остается напомнить, что *KN-линеал с вполне правильным конусом положительных элементов есть KB-пространство* [7].

Справедливость теоремы 3 теперь непосредственно вытекает из леммы 3 и теоремы 2.

ЛЕММА 4. *Пусть число $c > 0$ и пусть последовательность $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ такова, что для любого $k \in N$ $(1/2^{k-1}) \| x_{2^{k-1}} \vee x_{2^{k-1}+1} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| \geqslant c$. Тогда $\varliminf\limits_{n\to\infty} (1/n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/4\, c$.*

Доказательство. Фиксируем $n \in N$, $n \geqslant 2$. Пусть $k \in N$ таково, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда

$$\frac{\| x_1 \vee \ldots \vee x_n \|}{n} \geqslant \frac{\| x_{2^{k-1}} \vee x_{2^{k-1}+1} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \|}{2^{k+1}} \geqslant \frac{1}{4} c,$$

откуда и следует требуемое.

Доказательство теоремы 4. Справедливость импликации $(L) \Rightarrow (S)$ очевидна. Докажем, что $(S) \Rightarrow (L)$. Допустим, что в X не выполнено (L). Тогда по лемме 3 $l(X; n) = 1$ $(n \in N)$ и, следовательно, найдется последовательность $x_n \in U_X^+$ такая, что $\frac{1}{2^{k-1}} \| x_{2^{k-1}} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| \geqslant 1/2$ $(k \in N)$. Тогда в силу леммы 4 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/8$, что невозможно в силу (S). Полученное противоречие доказывает теорему 4.

Из теоремы 4 немедленно следует, что условие (S) равносильно следующему условию: *для любой последовательности $x_n \in U_X$ $(n \in N)$ справедливо соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) \cdot \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| = 0$.

Оставшаяся часть работы будет посвящена доказательству теоремы 5. Мы рассмотрим в отдельности случай (I) — X есть K_0N-пространство и случай (II) — X есть интервально полный KN-линеал.

(I) Пусть X — K_0N-пространство с условием (S_d). Докажем, что в X выполнено условие (S).

ЛЕММА 5. *Пусть в K_0N-пространстве X не выполнено условие (S). Тогда для любого $n \in N$ в X существует компонента Y такая, что 1) $X = Y + Y^d$* *); *2) в Y не выполнено условие (S); 3) $l(Y^d; n) > 1/2$.*

Доказательство. В силу леммы 3 $l_d(X; 2n) = 1$. Возьмем попарно дизъюнктные $x_1, \ldots, x_{2n} \in U_X^+$, такие что $(1/2n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_{2n} \| > 3/4$. Пусть K есть компонента, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $X = K + K^d$ и, следовательно, в одной из компонент K или K^d не выполнено условие (S). Остается заметить, что $(1/n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| > 1/2$ и $(1/n) \| x_{n+1} \vee \ldots \vee x_{2n} \| > 1/2$, откуда $l(K; n) > 1/2$ и $l(K^d; n) > 1/2$. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство п. (I). Допустим, что в X не выполнено условие (S). Пользуясь предыдущей леммой, построим такую последовательность $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$, что $x_n \wedge x_m = 0$ при $m \neq n$ и $(1/2^{k-1}) \| x_{2^{k-1}} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| > 1/2$ $(k \in N)$. Тогда по лемме 4 $\varliminf (1/n) \cdot \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/8$. Противоречие.

(II). Случай интервально полного KN-линеала X несколько сложнее. Нам понадобится ряд лемм.

Всюду в оставшейся части работы B означает некоторый бикомпакт, $\| \cdot \|_\infty$ — равномерную норму на $C(B)$ и $\| \cdot \|$ — некоторую монотонную норму на $C(B)$, т. е. такую, что $(x, y \in C(B),\ |x| \leqslant |y|) \Rightarrow (\|x\| \leqslant \|y\|)$.

Известно, что $\| \cdot \| \leqslant K \| \cdot \|_\infty$, где K — некоторая константа. Полагаем $Z = (C(B), \| \cdot \|)$. Для любого открытого подмножества G в B через $Z(G)$ обозначаем подпространство в Z, состоящее из всех функций из Z, которые обращаются в нуль вне G.

ЛЕММА 6. *Пусть в Z не выполнено условие (S). Тогда существует неизолированная точка $t_0 \in B$, обладающая*

*) Через Y^d обозначается, как обычно ([1], стр. 98), дизъюнктное дополнение к Y, т. е. $Y^d = \{x \in X : |x| \wedge |y| = 0$ для любого $y \in Y\}$.

следующим свойством: каково бы ни было открытое множество $G \ni t_0$, в $Z(G)$ не выполнено условие (S).

Доказательство. Допустим противное. Тогда в силу бикомпактности B найдутся точки $t_1, \ldots, t_n \in B$ и открытые множества $G_1, \ldots, G_n$ такие, что $t_i \in G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, в каждом $Z(G_i)$ выполнено условие (S) и $\bigcup_{i=1}^{n} G_i = B$. Хорошо известно ([6], стр. 231), что существуют функции $0 \leqslant u_i \in Z(G_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что $\Sigma_{i=1}^{n} u_i \equiv 1$. Фиксируем произвольное $m \in N$ и возьмем произвольные попарно дизъюнктные $x_1, \ldots, x_m \in U_Z^+$. Имеем $x_1 \vee \ldots \vee x_m = x_1 + \ldots + x_m = \Sigma_{i=1}^{n} [x_1 u_i + x_2 u_i + \ldots + x_m u_i]$. Отсюда легко следует, что $l_d(Z; m) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} l_d(Z(G_i); m)$ и, следовательно, $l(Z; m) = l_d(Z; m) \to 0$ при $m \to \infty$, что невозможно в силу теоремы 4. Существование требуемой точки t_0 доказано. Ясно, что точка t_0 не является изолированной точкой B.

ЛЕММА 7. *Пусть t — произвольная точка бикомпакта B и $0 \leqslant z \in Z$ такова, что $z(t) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $u \in Z$ такая, что 1) $0 \leqslant u \leqslant z$; 2) u обращается в нуль в некоторой окрестности точки t; 3) $\|u\| > \|z\| - \varepsilon$.*

Справедливость леммы легко следует из неравенства $\|\cdot\| \leqslant K \|\cdot\|_\infty$.

ЛЕММА 8. *Пусть в Z не выполнено условие (S) и пусть G — открытое множество, содержащее точку t_0 из леммы 6. Тогда для любого $n \in N$ в B найдется открытое множество V и функции $z_1, \ldots, z_n \in Z$ такие, что 1) $t_0 \in V \subset G$; 2) $z_k \geqslant 0$, $\|z_k\| \leqslant 1$, $z_k \in Z(G)$ $(k = 1, \ldots, n)$; 3) $z_i \wedge z_j = 0$ при $i \neq j$; 4) все z_k обращаются в нуль на V; 5) $(1/n)\|z_1 \vee \ldots \vee z_n\| > 2/3$.*

Доказательство. Так как в $Z(G)$ условие (S) не выполнено, то по теореме 4 не выполнено условие (L), а тогда по лемме 3 $l_d(Z(G); n+1) = 1$. Поэтому существуют $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in U_Z^+$ такие, что $y_k \in Z(G)$ $(k = 1, \ldots, n+1)$, $y_i \wedge y_j = 0$ при $i \neq j$ и $(1/n+1)\|y_1 \vee \ldots \vee y_n \vee y_{n+1}\| > 5/6$. Ясно, что по крайней мере n из $(n+1)$ чисел $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0), y_{n+1}(t_0)$ равны 0. Пусть $y_1(t_0) = y_2(t_0) = \ldots = y_n(t_0) = 0$. Кроме того, имеем $(1/n)\|y_1 \vee \ldots \vee y_n\| \geqslant 5/6\,(n+1)/n - 1/n = 5/6 - 1/6n$, откуда $(1/n)\|y_1 \vee \ldots \vee y_n\| > 2/3$. В силу леммы 7 существует $u \in Z$ такое, что $0 \leqslant u \leqslant y_1 \vee \ldots \vee y_n$, u обращается в нуль в некоторой окрестности V точки t_0 и $(1/n)\|u\| > 2/3$. Ясно, что можем считать, что $V \subset G$. Остается положить $z_k = u \wedge y_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

ЛЕММА 9. *Если в Z не выполнено условие (S), то не выполнено и условие (S_d).*

Доказательство. Для каждого $k \in N$ в бикомпакте B находим (в силу леммы 8) открытое множество $V_{k+1} \subset V_k$ $(V_1 = B)$ и положительные, попарно дизъюнктные функции x_n, $\|x_n\| \leqslant 1$ $(n = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k - 1)$, принадлежащие $Z(V_k)$, равные нулю на $V_{k+1} \ni t_0$ и такие, что $(1/2^{k-1})\|x_{2^{k-1}} \vee x_{2^{k-1}+1} \vee \ldots \vee x_{2^k-1}\| > 2/3$. Но тогда по лемме 4 $\varliminf_{n\to\infty} (1/n)\|x_1 \vee \ldots \vee x_n\| \geqslant 1/6$. Тем самым в Z не выполнено условие (S_d), поскольку все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно дизъюнктны по построению.

Теперь мы вернемся к доказательству п. (II). Пусть X — интервально полный KN-линеал с условием (S_d). Пусть Y есть (b)-пополнение X. Хорошо известно, что X есть плотный по норме фундамент в Y. Отсюда легко следует, что в Y тоже выполнено условие (S_d). Допустим, что в Y не выполнено условие (S). Тогда существует последовательность $y_n \in U_Y^+$ $(n \in N)$, для которой $\varliminf (1/n)\|y_1 \vee \ldots \vee y_n\| > 0$. Положим $z = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2(y_n)$. Тогда в Y_z выполнено условие (S_d), но не выполнено условие (S). С другой стороны, реализуя r-полный K-линеал ограниченных элементов Y_z по уже упоминавшейся теореме Крейнов-Какутани в виде пространства $C(B)$ на подходящем бикомпакте B, приходим к противоречию с леммой 9. Следовательно, в Y, а значит и в X, выполнено условие (S). Теорема 5 доказана полностью.

Из теоремы 5 и замечания, сделанного после доказательства теоремы 4, без труда выводится

Следствие. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство или интервально полный KN-линеал. Пусть существует последовательность $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ такая, что $\varlimsup_{n\to\infty} (1/n)\|x_1 \vee \ldots \vee x_n\| > 0$. Тогда существует последовательность $y_n \in U_X^+$ такая, что $y_n \wedge y_m = 0$ при $n \neq m$ и $\varlimsup_{n\to\infty} (1/n)\|y_1 \vee \ldots \vee y_n\| = 1$.*

4. Результаты настоящей работы, дающие достаточные условия того, что X^* есть KB-пространство, уместно сравнить с одной теоремой второго автора, дающей необходимые и достаточные условия того, что сопряженное пространство к (b)-полному KN-линеалу является KB-пространством.

ТЕОРЕМА. *Пусть X есть (b)-полный KN-линеал. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) X^* не является KB-пространством;

2) в X имеется линейная подструктура Y, на которую существует положительный проектор и которая линейно топологически и порядково изоморфна пространству l_1 суммируемых последовательностей.

Отметим, что в случае, когда X — просто банахово пространство, близкая теорема была получена Бессагой и Пелчинским [8], но в их работе никакого упорядочения не рассматривалось.

Поступило
13.IX.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Вулих Б. З., *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*, М., 1961.
[2] Shimogaki T., On the continuity and the monotonousness of norms, J. Fac. Sci. Hokk. Univ., Ser. I, **16** (1962), 225—237.
[3] Лифшиц Е. А., К теории полуупорядоченных банаховых пространств, Функц. анализ и его приложения, 3, № 1 (1969), 91—92.
[4] Лозановский Г. Я., Об одном результате Шимогаки, Вторая зональная конференция пединститутов по математике и методике ее преподавания, Тезисы, (1970), 43.
[5] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950.
[6] Келли Дж. Л., Общая топология, М., 1968.
[7] Вулих Б. З., О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой, Докл. АН СССР, **147**, № 2 (1962), 271—274.
[8] Bessaga C., Pelczynski A., Some remarks on conjugate spaces, containing subspace isomorphic to c_0, Bull. Acad. Polon. Sci., 6 (1958), 249—250.

Лозановский Г.Я.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Григорий Яковлевич ЛОЗАНОВСКИЙ

БАНАХОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(01.01.01 — Теория функций и функциональный анализ)

*Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук*

Диссертация написана на русском языке

Ленинград — 1973

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.А.ЖДАНОВА

Математико-механический факультет

На правах рукописи

Григорий Яковлевич Лозановский

БАНАХОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(01.01.01 - Теория функций и функциональный анализ)

Автореферат диссертации
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Диссертация написана на русском языке

Ленинград - 1973

[illegible]та выполнена на кафедре высшей математики ЛВИКА [illegible] А.Ф.Можайского.

[illegible]альные оппоненты:

[illegible]академик Академии Наук УзССР доктор физико-математических [illegible] наук профессор Т.А.САРЫМСАКОВ,

[illegible]доктор физико-математических наук профессор [illegible]ЙКО.

[illegible]доктор физико-математических наук профессор [illegible].

[illegible]ущее научно-исследовательское учреждение – Воронежский [illegible]дарственный университет.

[illegible]реферат разослан " "   1973 г.

[illegible]та диссертации состоится " "   1973 г. [illegible] на заседании Учёного Совета математико-механического [illegible] факультета ЛГУ имени А.А.Жданова (Ленинград, В.О., [illegible], дом 33).

[illegible] диссертацией можно ознакомиться в научной библио[illegible].

[illegible]ЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

[illegible] к печати 5.I.73 Печ.листов I,5 Уч.-изд.листов I,25
Бесплатно Ротапринт М-05016
Типография ВИКА имени А.Ф. Можайского

Теория линейных полуупорядоченных пространств, иначе – теория линейных структур, является одним из основных разделов функционального анализа. Эта теория была построена в работах Л.В.Канторовича, относящихся к 1935-1937 гг. В дальнейшем она получила плодотворное развитие в работах ленинградской школы полуупорядоченных пространств (Б.З.Вулих, А.Г.Пинскер, А.И.Юдин, Г.П.Акилов, А.И.Векслер и их ученики; сюда же примыкают работы В.И.Соболева из Воронежа). Из иностранных учёных большую роль в развитии теории линейных структур сыграли, главным образом, японские (Х.Накано, Т.Огасавара, И.Амемия, Т.Андо, К.Иосида, С.Какутани), а также американские (М.Стоун, Г.Биркгоф и др.). Значительное влияние на развитие теории оказали также работы голландского математика Г.Фрейденталя и венгерского математика Ф.Рисса.

К теории линейных структур тесно примыкают исследования М.Г.Крейна о нормированных пространствах с выделенным в них конусом положительных элементов, начатые во второй половине тридцатых годов и продолженные в воронежской школе (М.А.Красносельский и его ученики). Отметим также исследования по теории топологических полуполей, интенсивно проводившиеся, начиная с конца пятидесятых годов (М.Я.Антоновский, В.Г.Болтянский, Т.А.Сарымсаков и их ученики).

Важнейшей частью теории линейных структур (по крайней мере, с точки зрения классического функционального анализа) является теория банаховых структур. Дело не только в том, что многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются банаховыми структурами, но и в том, что аксиоматика теории банаховых структур достаточно гибка и богата, а её аппарат достаточно разработан для того, чтобы эта теория могла служить мощным средством исследования указанных пространств.

Настоящая диссертация посвящена теории банаховых структур. В ней изучаются следующие вопросы: функции от элементов линейной структуры и реализация пространств регулярных функционалов (гл.I); преобразования банаховых структур с помощью вогнутых функций (гл.II); строение и линейно-топологические свойства банаховых структур (гл.III); строение и свойства пространства, сопряжённого к банаховой структуре, а также некоторых его подпространств (гл.1У). В конце диссертации имеется приложение, посвящённое интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s}X_1^s$.

Основному тексту предшествует гл.0 "Предварительные сведения, терминология, обозначения".

В диссертации используется терминология монографии [1], которая несколько отличается от терминологии более ранней монографии [2]. Мы приведём здесь в удобной для нас форме некоторые сведения из теории полуупорядоченных пространств, необходимые для понимания основных результатов, отсылая за подробностями к [1].

К-ЛИНЕАЛОМ называется векторная структура (другие названия: векторная решётка, пространство Рисса). К-ПРОСТРАНСТВОМ (K_σ-ПРОСТРАНСТВОМ) называется К-линеал, в котором всякое (всякое счётное) ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю границу.

Пусть X – К-линеал. Элементы $x,y\in X$ называются ДИЗЪЮНКТНЫМИ (обозначение: $x\,d\,y$), если $|x|\wedge|y|=0$. ДИЗЪЮНКТНЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ произвольного $E\subset X$ называется $E^d=\{x\in X:$

$x\,d\,y$ для любого $y\in E\}$. КОМПОНЕНТОЙ в X называется всякое $Y\subset X$, являющееся дизъюнктным дополнением какого-нибудь $E\subset X$. Через $\mathfrak{A}(X)$ обозначается булева алгебра всех компонент в X. Линейное подмножество Y в X называется ИДЕАЛОМ или НОРМАЛЬНЫМ ПОДЛИНЕАЛОМ в X, если $\forall x\in X\,\forall y\in Y(|x|\le|y|\Rightarrow x\in Y)$. Идеал Y в X называется ФУНДАМЕНТОМ, если $Y^d=\{0\}$. Для $u\in X$ через X_u обозначается наименьший идеал в X, содержащий u. Если $x\in X, K\in\mathfrak{A}(X)$ и x можно представить в виде $x=y+z$, где $y\in K, z\,d\,K$, то y называется ПРОЕКЦИЕЙ x на K и обозначается $Pr_K x$. ОСКОЛКОМ произвольного $x\in X$ называется всякий $x'\in X$, являющийся проекцией x в какую-нибудь $K\in\mathfrak{A}(X)$. Элемент $x\in X$ называется элементом СЧЁТНОГО ТИПА, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счётно. X называется К-линеалом СЧЁТНОГО ТИПА, если все его элементы счётного типа. ЕДИНИЦЕЙ или СЛАБОЙ ЕДИНИЦЕЙ в X называется всякий $u\in X_+$, такой что $x\wedge u>0$ для любого $x>0$ $(x\in X)$.

Для произвольного архимедова К-линеала X через $\hat{X}$ обозначается его К-ПОПОЛНЕНИЕ по Дедекинду-Юдину (см. [1], стр.125-130), которое получается обычным методом сечений.

К-пространство называется РАСШИРЕННЫМ, если в нём всякое множество попарно дизъюнктных элементов ограничено.

МАКСИМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ произвольного К-пространства X мы будем обозначать через $\mathfrak{m}(X)$; $\mathfrak{m}(X)$ есть расширенное К-пространство, содержащее X в качестве фундамента (см. [1], стр.159).

Пусть Q – экстремально несвязный бикомпакт. Через $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех вещественных непрерывных функций на Q, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$; напомним, что $C_\infty(Q)$ есть расширенное К-пространство. Обратно, всякое расширенное К-пространство W допускает представление в виде $C_\infty(Q)$, где Q есть стоунов бикомпакт булевой алгебры $\mathfrak{A}(W)$ (см. [1], гл.У); это даёт возможность для любых $x, y \in W$ определить произведение $xy \in W$.

Сопряжённое к нормированному пространству E обозначается E^*.

KN-ЛИНЕАЛОМ (КВ-ЛИНЕАЛОМ) называется К-линеал, являющийся нормированным (банаховым) пространством, в котором $\forall x, y \in X (|x| \le |y| \Rightarrow \|x\| \le \|y\|)$. KN-ПРОСТРАНСТВОМ ($K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВОМ) называется KN-линеал, являющийся К-пространством (K_σ-пространством).

Норма в KN-линеале X называется НЕПРЕРЫВНОЙ, если

$$(A) \qquad (x_n \downarrow 0) \Longrightarrow (\|x_n\| \to 0);$$

МОНОТОННО ПОЛНОЙ, если

$$(B) \qquad (0 \le x_n \uparrow,\ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| < \infty) \Longrightarrow (\text{существует } \sup x_n \in X);$$

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ, если

$$(C) \qquad (0 \le x_n \uparrow x \in X) \Longrightarrow (\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|).$$

Заменив в $(A), (B), (C)$ последовательности направлениями, получим условия $(A'), (B'), (C')$, называемые условиями УНИВЕРСАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ, УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОНОТОННОЙ

ПОЛНОТЫ И УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ нормы, соответственно.

КВ-ПРОСТРАНСТВОМ или пространством Канторовича-Банаха называется KN-пространство, удовлетворяющее условиям (A) и (B).

Норма в КВ-пространстве L называется АДДИТИВНОЙ, если $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ для $x, y \in L_+$. При этом функционал $J(x) = \|x_+\| - \|x_-\|, x \in L$ будем называть функционалом, задающим норму на L.

Пусть X – произвольный К-линеал. Через $\tilde{X}$ обозначается пространство всех РЕГУЛЯРНЫХ функционалов на X, то есть функционалов, представимых в виде разности двух линейных положительных функционалов. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫМ, если из того, что направление $x_\alpha \downarrow 0$ в X вытекает, что $f(x_\alpha) \to 0$. Через $\bar{X}$ обозначается пространство всех вполне линейных функционалов на X. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНОРМАЛЬНЫМ, если он аннулируется на некотором фундаменте в X. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНТИНОРМАЛЬНЫМ, если он дизъюнктен $\bar{X}$. Через $\tilde{X}_{an}$ ($\tilde{X}_{ant}$) обозначается пространство всех анормальных (антинормальных) функционалов на X. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{an} = \tilde{X}_{an} \cap X^*$, $X^*_{ant} = \tilde{X}_{ant} \cap X^*$.

Особо остановимся на представлении вполне линейных функционалов. Пусть W – расширенное К-пространство с фиксированной единицей, в котором существует фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Пусть X –

произвольный идеал в W ; W_X - компонента в W, порождённая X. Пространство $X' = \{x' \in W_X : xx' \in L$ для любого $x \in X\}$ называется ДУАЛЬНЫМ пространством к X. По каждому $x' \in X'$ можно построить $f_{x'} \in \bar{X}$, положив $f_{x'}(x) = J(xx')$, $x \in X$. Отображение $x' \longrightarrow f_{x'}$ есть изоморфизм X' на $\bar{X}$. Если X вдобавок банахово KN -пространство, то формула $\|x'\|_{X'} = \sup\{J(|xx'|) : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ определяет норму $\|\cdot\|_{X'}$ на X', называемую ДУАЛЬНОЙ нормой по отношению к $\|\cdot\|_X$.

Переходим к изложению основных результатов диссертации.

В § 1 гл.1 изучаются ФУНКЦИИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ архимедова К-линеала. Это понятие было введено Л.В.Канторовичем. Оно является абстрактным аналогом понятия суперпозиции функций и играет важную роль как в самой теории линейных структур, так и, в особенности, в её приложениях. Например, оно, по существу, используется в теории меры и в теории операторов. Это понятие исследовалось, в частности, в [1], [2] и в работах М.Ф.Широхова, причём даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. Мы даём новое определение функции от элементов архимедова К-линеала, которое общее известных ранее и, как нам кажется, проще и более приспособлено для приложений. Приведём наше определение для важнейшего случая (К-пространство - расширенное, функция - бэровская). Пусть W - расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, f - бэровская функция на R^n. Не умаляя общности, можно считать, что $W = C_\infty(Q)$, где Q - экстремально несвязный бикомпакт, $\mathbb{1}$ - функция, тождественно равная единице на Q. Фиксируем любые $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C_\infty(Q)$. Мы доказываем, что существует единственный $x \in C_\infty(Q)$, такой что $x(q) = f(x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q))$ для всех $q \in Q$, кроме, может быть, некоторого множества первой категории из Q. Теперь полагаем $f(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{def}{=} x$. Тем самым, при нашем определении ВСЯКОЕ РАСШИРЕННОЕ К-ПРОСТРАНСТВО W ЗАМКНУТО ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ БЭРОВСКОЙ ФУНКЦИИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ из W ; при прежних определениях функции от элементов К-линеала это имело место лишь при некоторых ограничениях на W. В этом же параграфе получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный архимедов К-линеал X был замкнут относительно операции взятия непрерывной положительно однородной функции от элементов из X ; заметим, что Б.З.Вулихом, исследовавшим этот вопрос, найдены лишь достаточные условия.

В § 2 гл.1 строится реализация пространств регулярных функционалов. Напомним, что для любого КВ-линеала E справедливо $E^* = \tilde{E}$, поэтому построенная нами реализация пространства $\tilde{X}$ для произвольного К-пространства X является, в частности, и реализацией пространства E^* для произвольного банахова KN -пространства E. Уже отмечалось, что пространство $\bar{X}$ допускает простое представление в виде дуального пространства X'. Вопрос же о сколько-нибудь "удобном" представлении пространства $\tilde{X}$ существенно более труден. До сих пор, насколько нам известно, такое представление было получено лишь для пространств X очень специального типа (см., например, работы Н.Гретски и М.М.Рао), причём методами, принципиально не допускающими обобщения на случай произвольного К-пространства X. Опишем теперь вкратце нашу реализацию. Пусть W – расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, M – идеал ограниченных элементов в нём, X и Y – любые идеалы в W. Для $f\in\tilde{X}, u\in X_+$ полагаем $f_{(u)}(x)=f(xu), x\in M$. Ясно, что $f_{(u)}\in\tilde{M}$. Произвольные $f\in\tilde{X}, g\in\tilde{Y}$ будем называть ДИЗЪЮНКТНЫМИ (обозначение fDg), если $f_{(u)}, g_{(v)}$ дизъюнктны в обычном смысле как элементы К-пространства $\tilde{M}$ для любых $u\in X_+, v\in Y_+$. Подчеркнём, что о дизъюнктности f и g в обычном смысле говорить нельзя, ибо они не являются элементами одного и того же К-пространства. Зафиксируем теперь в $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ произвольные единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно).

Теорема 1.2.20. СУЩЕСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННАЯ ПАРА (R_X, V_X), где V_X – КОМПОНЕНТА в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, а R_X – ИЗОМОРФИЗМ К-ПРОСТРАНСТВА $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ НА V_X, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ УСЛОВИЯМ:

1) ДЛЯ ЛЮБЫХ $f\in\tilde{X}$ И $g\in\tilde{M}$ СООТНОШЕНИЯ fDg И $R_X f d g$ РАВНОСИЛЬНЫ (заметим, что здесь $R_X f$ и g суть элементы одного и того же К-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно говорить об их дизъюнктности в обычном смысле);

2) $$R_X(\mathbb{1}_1) = Pr_{V_X}\mathbb{1}_2.$$

Оператор R_X будем называть КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пространства $\tilde{X}$.

Теорема 1.2.22. ПУСТЬ $f\in\tilde{X}$. ТОГДА КОМПОНЕНТА В $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, ПОРОЖДЁННАЯ ЭЛЕМЕНТОМ $R_X f$, СОВПАДАЕТ С КОМПОНЕНТОЙ, ПОРОЖДЁННОЙ МНОЖЕСТВОМ $\{f_{(u)} : u\in X_+\}$.

Теорема 1.2.23. ДЛЯ ЛЮБЫХ $f\in\tilde{X}, g\in\tilde{Y}$ СПРАВЕДЛИВО

$$(fDg)\Longleftrightarrow(R_X f d R_Y g).$$

Итак, рассматривая различные идеалы в одном и том же К-пространстве W, мы смогли погрузить соответствующие пространства регулярных функционалов в одно К-пространство $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщённом смысле (D), переходят при погружении в элементы, дизъюнктные в обычном смысле.

В гл.П исследуется важная конструкция преобразования банаховых структур посредством вогнутых функций, введённая (для случая пространств измеримых функций) Кальдероном [3], и являющаяся широким обобщением известной конструкции пространств Орлича. Несмотря на довольно специальный характер, эта конструкция (по мнению автора диссертации) является весьма полезным средством исследования банаховых структур, особенно в тех ситуациях, когда одновременно рассматриваются несколько банаховых КN-пространств, являющихся идеалами в одном и том же К-пространстве. Наш метод исследования указанной конструкции принципиально отличается от метода Кальдерона: метод Кальдерона основан на теории аналитических функций, а наш – на теории полуупорядоченных пространств, в особенности, на аппарате канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанном в гл.I.

Гл.П состоит из восемнадцати параграфов; в §§ 1-6 приведены формулировки основных результатов, а в §§ 7-18 – их доказательства.

На протяжении всей главы II W — есть произвольное расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$; M — идеал ограниченных элементов в нём; X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся идеалами в W; s — произвольное число, такое что $0<s<1$.

В § 1 гл.II приведены основные определения и простейшие следствия из них. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначаем множество всех вещественных, непрерывных, вогнутых функций $\varphi(\xi,\eta)$ при $\xi,\eta\geq 0$, удовлетворяющих условиям: $\varphi(\xi,0)=\varphi(0,\eta)=0$ при $\xi,\eta\geq 0$; $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi(\xi,\alpha)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta,\eta)=+\infty$ при $\xi,\eta>0$. Через $\mathfrak{A}_2^0$ обозначаем множество всех положительно однородных функций из $\mathfrak{A}_2$.

Пусть $\varphi\in\mathfrak{A}_2$. Через $\varphi(X_0,X_1)$ обозначаем множество всех $x\in W$, таких что $|x|\leq\lambda\varphi(|x_0|,|x_1|)$ для некоторого $\lambda\in[0,+\infty)$ и каких-нибудь $x_i\in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i}\leq 1$ $(i=0,1)$. Через $\|x\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. Так построенное пространство $(\varphi(X_0,X_1),\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)})$ есть банахово KN-пространство и идеал в W. Если $\varphi(\xi,\eta)=\xi^{1-s}\eta^s$, то вместо $\varphi(X_0,X_1)$ пишем $X_0^{1-s}X_1^s$.

В § 2 гл.II строятся банахово сопряжённое и дуальное пространства к $X_0^{1-s}X_1^s$. Зафиксируем произвольно единицы в пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, $\mathfrak{M}(X_0^*)$, $\mathfrak{M}(X_1^*)$ и отождествим пространства X_0^*, X_1^* с их образами в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ при соответствующих канонических реализациях. Теперь X_0^*, X_1^* суть идеалы в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно образовать пространство $(X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$ точно так же как пространство $X_0^{1-s}X_1^s$ строится из про-

странств X_0 и X_1. ТОГДА (см.теорему 2.2.8) в $\mathfrak{M}((X_0^{1-s}X_1^s)^*)$ ЕДИНИЦУ МОЖНО ВЫБРАТЬ ТАК, ЧТО ПОСЛЕ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ С ЕГО ОБРАЗОМ В $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ ПРИ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ, РАВЕНСТВО $(X_0^{1-s}X_1^s)^*=(X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$ БУДЕТ ИМЕТЬ МЕСТО ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ И ПО НОРМЕ. Заметим, что в работе Кальдерона [3] с помощью векторнозначных аналитических функций получено некоторое представление пространства $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ через X_0^* и X_1^*, но лишь при довольно тяжёлых ограничениях на X_0 и X_1 (в частности, требуется, чтобы $X_0\cap X_1$ было плотно в $X_0^{1-s}X_1^s$); в нашей же теореме 2.2.8 никаких ограничений на X_0 и X_1 не накладывается.

Далее, говоря о результатах гл.II, всюду будем считать, что в W существует фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой (J обозначает функционал, задающий норму на L).

Теорема 2.2.12. РАВЕНСТВО $(X_0^{1-s}X_1^s)'=(X_0')^{1-s}(X_1')^s$ ИМЕЕТ МЕСТО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Подчеркнём, что в этой теореме на X_0 и X_1 также не накладывается никаких ограничений.

В § 3 гл.II рассматривается частный случай основной конструкции — степенное преобразование нормы. Пусть X есть произвольное банахово KN-пространство, p — произвольное число, такое что $1<p<+\infty$. Зафиксируем в $\mathfrak{M}(X)$ произвольную единицу и положим $X_p=\{x\in\mathfrak{M}(X): |x|^p\in X\}$ и $\|x\|_{X_p}=(\||x|^p\|_X)^{\frac{1}{p}}$ для $x\in X_p$.

В теореме 2.3.4 приведены некоторые свойства пространства X_p; в частности, ПРОСТРАНСТВО $(X_p)^{**}$ АЛГЕБРАИЧЕСКИ И

ПОРЯДКОВО ИЗОМОРФНО И ИЗОМЕТРИЧНО ПРОСТРАНСТВУ $(\overline{X^*})_b$, ГДЕ $\overline{X^*}$ ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА X^*, И $(\overline{X^*})_b$ ПОЛУЧАЕТСЯ ИЗ $\overline{X^*}$ ТОЧНО ТАК ЖЕ КАК X_b ПОЛУЧАЕТСЯ ИЗ X.

В § 4 гл.П изучаются пространства $\varphi(X_0,X_1)$ для произвольной $\varphi\in\mathfrak{A}_2$. В теореме 2.4.2 приводятся некоторые полезные свойства пространства $\varphi(X_0,X_1)$ для случая, когда $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$; например, ЕСЛИ НОРМЫ $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$ УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫ И УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНЫ, ТО ЭТИМИ ЖЕ ДВУМЯ СВОЙСТВАМИ ОБЛАДАЕТ И НОРМА $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$.

Пара функций (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$, называется СОГЛАСОВАННОЙ, если

$$((\varphi_1(X_0,X_1))', \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'})=(\varphi_2(X_0',X_1'),\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')})$$

при всевозможных $W, \mathfrak{X}(W), L, X_0, X_1$.

Пара функций (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$, называется СЛАБО СОГЛАСОВАННОЙ, если равенство

$$(\varphi_1(X_0,X_1))'=\varphi_2(X_0',X_1')$$

имеет место по запасу элементов при всевозможных $W, \mathfrak{X}(W), L, X_0, X_1$.

Оказывается (теорема 2.4.5), что ВСЕ СОГЛАСОВАННЫЕ ПАРЫ СУТЬ $\varphi_1(\xi,\eta)=A\xi^{1-s}\eta^s$, $\varphi_2(\xi,\eta)=A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s$, ГДЕ $A\in(0,+\infty)$, $s\in(0,1)$ – ЛЮБЫЕ.

СЛАБО СОГЛАСОВАННЫХ ПАР СУЩЕСТВЕННО БОЛЬШЕ. ЭТО ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ ПАРЫ, КОТОРЫЕ В ОПРЕДЕЛЁННОМ СМЫСЛЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫ ПАРАМ ВИДА $(\varphi,\hat{\varphi})$, ГДЕ $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$ – ПРОИЗВОЛЬНА, а

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)},\quad \xi,\eta\in[0,+\infty)$$

(см.теорему 2.4.6).

В § 5 гл.П содержатся приложения результатов § 2 гл.П к общей теории банаховых структур. Пусть X есть произвольное банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Теорема 2.5.1. ДЛЯ ЛЮБЫХ $f\in X^*_{ant}$ И $g\in(X')^*_{ant}$ СПРАВЕДЛИВО $f D g$, ТО ЕСТЬ f И g ДИЗЪЮНКТЫ В ОБОБЩЁННОМ СМЫСЛЕ.

Теорема 2.5.3. 1) ДЛЯ ЛЮБОГО $z\in L$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon>0$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $x\in X, x'\in X'$, ЧТО $z=xx'$ И

$$\|z\|_L\geq(1-\varepsilon)\|x\|_X\cdot\|x'\|_{X'}.$$

2) ЕСЛИ НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНА И УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНА, ТО УТВЕРЖДЕНИЕ 1) ДОПУСКАЕТ СЛЕДУЮЩЕЕ УСИЛЕНИЕ: ДЛЯ ЛЮБОГО $z\in L$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $x\in X, x'\in X'$, ЧТО $z=xx'$ И $\|z\|_L=\|x\|_X\cdot\|x'\|_{X'}$.

В связи с теоремой 2.5.3 заметим, что, если $z\in L$, $x\in X, x'\in X'$ и $z=xx'$, то $\|z\|_L\leq\|x\|_X\cdot\|x'\|_{X'}$ тривиальным образом.

Наконец, отметим следующий результат (см.теорему 2.5.5 и замечание 2.5.6): ВСЯКОЕ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО X, ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ФУНДАМЕНТОМ В ПРОСТРАНСТВЕ $S[0,1]$ ВСЕХ (КЛАССОВ) КОНЕЧНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НА $[0,1]$, ПУТЁМ УМНОЖЕНИЯ НА НЕКОТОРУЮ "ВЕСОВУЮ" ФУНКЦИЮ МОЖНО ПРЕВРАТИТЬ В ПРОСТРАНСТВО "ЗАЖАТОЕ" МЕЖДУ $L^\infty[0,1]$ И $L^1[0,1]$. ТОЧНЕЕ ГОВОРЯ, НАЙДЁТСЯ $y\in S[0,1]$, $y>0$, ТАКОЙ ЧТО $L^\infty[0,1]\subset\{xy: x\in X\}\subset L^1[0,1]$.

В § 6 гл.II приведены два результата о банаховых пространствах с безусловными базисами, которые являются следствиями теоремы 2.5.3. Сформулируем один из них. Пусть E есть банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$ и пусть $\{f_k\}$ – биортогональная с $\{e_k\}$ система в E^*. Тогда (теорема 2.6.1) существует константа $c>0$, обладающая следующим свойством: для любой числовой последовательности $\lambda=\{\lambda_k\}\in\ell^1$ найдутся числовые последовательности $\{u_k\},\{v_k\}$, такие что 1) $u_k v_k=\lambda_k$ при всех k; 2) ряды $\sum\limits_k u_k e_k, \sum\limits_k v_k f_k$ сходятся по нормам пространств E и E^* к некоторым $x\in E$ и $f\in E^*$; 3) справедливо неравенство $\|\lambda\|_{\ell^1}\geq c\|x\|_E\cdot\|f\|_{E^*}$.

Переходим к главе III. Хорошо известно, что банахова топология КВ-линеала полностью определяется имеющимся в нём частичным упорядочением. Точнее говоря, любые две монотонные банаховы нормы, заданные на одном и том же К-линеале, эквивалентны, то есть определяемые ими топологии совпадают (теорема Х.Накано). Напротив, банахова топология КВ-линеала несёт мало информации об его остальных свойствах. Дело в том, что если некоторое банахово пространство можно превратить в КВ-линеал путём введения в нём частичного упорядочения и эквивалентной перенормировки, то такое превращение обычно неединственно. Например, бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство можно превратить как в $L^2[0,1]$, так и в ℓ^2. Тем не менее, некоторые свойства частичного упорядочения в КВ-линеале всё же полностью определяются его банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является теорема

Огасавары: КВ-линеал является КВ-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон (напомним, что банахово пространство называется слабо секвенциально полным, если всякая слабо фундаментальная последовательность его элементов оказывается слабо сходящейся). Полученные нами в указанном направлении результаты и составляют содержание гл.III. Всюду в этой главе термины "изоморфизм" и "подпространство" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств.

В §1 гл.III показано, что непрерывность нормы (условие (A)) в банаховом $K_\sigma N$-пространстве есть линейно-топологическое свойство. Именно, справедлива

Теорема 3.1.2. Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) в X выполнено условие (A);

(б) в X выполнено условие (u) Пелчиньского (см. [4]), то есть для любой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ в X существует такая последовательность $\{y_n\}$ в X, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(y_n)|<\infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ для любого $f\in X^*$;

(в) в X нет подпространств изоморфных пространству ℓ^∞;

(г) в X нет подпространств изоморфных пространству $C[0,1]$;

(д) в X нет подпространств изоморфных пространству Джеймса J (см. [5], стр.123).

Заметим, что эквивалентность (а)$\Longleftrightarrow$(в) приведена оте Андо [6], но доказательство Андо содержит принципи-о ошибку.

Отметим также следующий результат этого параграфа: е банахово KN-пространство X, в котором выполнено ие (A), но не выполнено условие (B), не изоморфно. ому сопряжённому банахову пространству (теорема 3.1.8). оремы 3.1.8 следует, в частности, что пространство Орлич в случае, когда N-функция $M(\xi)$ не удовлетворя-Δ_2-условию, не изоморфно никакому сопряжённому банахову ранству (в терминологии из теории пространств Орлича мы эм [7]); точно также и пространство Марцинкевича $M_0(\psi)$ эморфно никакому сопряжённому банахову пространству (опэние пространства $M_0(\psi)$ см., например, в [8]).

В § 2 гл.Ш доказана

Теорема 3.2.1. Пусть X - банахово KN-пространство ильным $\mathfrak{X}$. В предположении справедливости континуумзы следующие утверждения эквивалентны:

(а) X - счётного типа;

(б) в X нет подпространства изоморфного пространству , где H есть множество мощности континуума;

(в) существует такое множество $\mathcal{N}\subset X^*$, что $\mathcal{N}$ то-) на X и для любого $x\in X$ множество $\{f\in\mathcal{N}:$ $\neq 0\}$ не более чем счётно.

Основным результатом § 3 гл.Ш является

Теорема 3.3.1. Пусть X - банахово $K_\sigma N$-пространство.

Тогда (в предположении справедливости континуум-гипотезы) следующие утверждения эквивалентны:

(а) единичный шар $\{f\in X^*: \|f\|_{X^*}\leq 1\}$ пространства X^* слабо* секвенциально компактен;

(б) в X выполнено условие (A) и X^* - счётного типа.

При этом импликация (б) $\Longrightarrow$ (а) справедлива и без предположения о справедливости континуум-гипотезы.

Наконец, в § 4 гл.Ш найдена линейно-топологическая характеризация пространства $\overline{X^*}$ всех вполне линейных функционалов на X^*, где X есть произвольный KN-линеал (теорема 3.4.12).

Именно, для любого нормированного пространства E через $(E^{**})^{\mathfrak{X}}$ обозначаем совокупность всех $F\in E^{**}$, таких что $\sum_{t\in T} F(f_t)=0$ для любого семейства $\{f_t: t\in T\}$ в E^*, удовлетворяющего условиям:

(а) $\sum_{t\in T}|G(f_t)|<+\infty$ для любого $G\in E^{**}$;

(б) $\sum_{t\in T} f_t(x)=0$ для любого $x\in E$.

Теорема 3.4.12. Для любого KN-линеала X справедливо равенство $\overline{X^*}=(X^{**})^{\mathfrak{X}}$.

В главе IУ рассматриваются разного рода вопросы, относящиеся к строению и свойствам пространства X^*, где X есть произвольное банахово $K_\sigma N$-пространство.

В § 1 гл.IУ изучаются вполне линейные функционалы на произвольном KN-пространстве X. Элемент $x\in X$ назовём сильным, если существует $f\in\overline{X}\cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*}=1$ и $f(x)=\|x\|_X$.

Следующая теорема является усилением одной важной теоремы Мори, Амемия, Накано [9].

Теорема 4.1.4. ПУСТЬ X — KN -ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ $\tilde{X}$. СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНА;

(б) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДЁТСЯ СИЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $y \in X$, ТАКОЙ ЧТО $\|x-y\| < \varepsilon$;

в) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДЁТСЯ СИЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $y \in X$, ТАКОЙ ЧТО $(1-\varepsilon)x \le y \le (1+\varepsilon)x$;

г) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ СИЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ $y, z \in X$, ТАКИЕ ЧТО

$$(1-\varepsilon)x \le y \le x \le z \le (1+\varepsilon)x.$$

В § 2 гл.1У рассматриваются, в основном, анормальные функционалы. Введён и изучен новый класс анормальных функционалов ("локализованные функционалы"). Приведём определение локализованного функционала для случая К-пространства. Пусть X есть К-пространство. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется ЛОКАЛИЗОВАННЫМ, если для любой компоненты $K \neq \{0\}$ пространства X найдётся такая компонента $K_1 \neq \{0\}$ в X, что $K_1 \subset K$ и $f(x)=0$ для любого $x \in K_1$. Показано, что в наиболее важных случаях всякий анормальный функционал счётного типа - локализованный (теорема 4.2.12).

В § 3 гл.1У рассматриваются, в основном, особенности строения пространства X^* для того случая, когда X есть банахово K_6N -пространство, не удовлетворяющее условию (A).

Теорема 4.3.1. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО K_6N-ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A), И ПУСТЬ $Y = X^*_{ant}$. ТОГДА

(а) В Y НЕТ СЛАБОЙ ЕДИНИЦЫ;

(б) В Y СУЩЕСТВУЕТ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА;

(в) ПРОСТРАНСТВО $\bar{Y}$ НЕ ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО СЧЁТНОГО ТИПА, БОЛЕЕ ТОГО, В $\bar{Y}$ СУЩЕСТВУЕТ ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА.

В этом же параграфе приведены критерии дискретности и непрерывности пространства X^* для произвольного банахова K_6N -пространства X. Отметим также следующий результат, являющийся усилением одного результата Т.Шимогаки: ЕСЛИ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ С ТОТАЛЬНЫМ $\bar{X}$ И ЕСЛИ $\bar{\bar{X}}$ ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО, ТО И X ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО (теорема 4.3.8 и следствие 4.3.9).

В §§ 4 и 5 гл.1У методами теории полуупорядоченных пространств изучаются банаховы сопряжённые пространства к пространствам Марцинкевича $M(\psi)$ и к пространствам со смешанной нормой $L^{(p,q)}$ на $[0,1] \times [0,1]$. В частности, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $M(\psi)^*$ и $(L^{(p,q)})^*$ были КВ-пространствами, пространствами счётного типа; показано, что все анормальные функционалы на $L^{(p,q)}$ - локализованные, но (в предположении справедливости континуум-гипотезы) на $M(\psi)$ могут существовать анормальные не локализованные функционалы.

Наконец, в § 6 гл.1У рассматривается задача проектирования банаховой структуры на её замкнутый идеал. В частности, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением одного результата Т.Андо.

Теорема 4.6.4. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО КN -ПРОСТРАНСТВО, $У$ - ЕГО ЗАМКНУТЫЙ ПО НОРМЕ ИДЕАЛ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЙ УСЛОВИЮ **(A)**. ЕСЛИ $У$ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПОНЕНТОЙ В X, ТО НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА $У$.

В этом же параграфе получен ещё один результат отрицательного характера, основанный на использовании локализованных функционалов, который затем применяется к пространствам Орлича и к пространствам со смешанной нормой.

В конце диссертации имеется приложение, в котором с помощью результатов гл.П доказана теорема об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s}X_1^s$, уточняющая некоторые результаты Кальдерона и П.П.Забрейко.

Все результаты диссертации докладывались на семинаре Б.З.Вулиха по полуупорядоченным пространствам при Ленинградском университете. Результаты диссертации докладывались также на заседаниях Ленинградского математического общества, на семинаре С.Г.Крейна по функциональному анализу при Воронежском университете и на семинаре Д.А.Райкова по топологическим векторным пространствам при Московском университете.

Основные результаты диссертации изложены в [10] - [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. В у л и х Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961.

2. К а н т о р о в и ч Л.В., В у л и х Б.З. и П и н с к е р А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.

3. К а л ь д е р о н (Calderon A.P.). Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. Математика (сб.переводов), 9:3 (1965), 56-129.

4. П е л ч и н ь с к и й (Pelczyn'ski A.). A connection between weakly unconditional convergence and weakly completeness of Banach spaces. Bull. Acad. Pol. Sci., série sci. math., astr. et phys., 6, № 4 (1958), 251-253).

5. Д е й (Day M.M.). Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961.

6. А н д о (Andô T.). Convexity and eveness in modulared semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido univ., ser. I, math., 14, № 2, 3, 4 (1959), 59-95.

7. К р а с н о с е л ь с к и й М.А. и Р у т и ц к и й Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.

8. С е м ё н о в Е.М. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докторская диссертация, Воронежский гос.ун-т, 1968.

9. М о р и, А м е м и я, Н а к а н о (Mori T.,

Amemiya I., Nakano H.) On the reflexivity of semicontinuous norms. Proc. Japan Acad., 31 (1955), 684--685.

10. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О банаховых структурах Кальдерона. ДАН СССР, 172:5 (1967), 1018-1020.

11. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности, ДАН СССР, 183:3 (1968), 521-523.

12. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О проекторах в некоторых банаховых структурах, Матем.Заметки, 4, № 1 (1968), 41-44.

13. Л о з а н о в с к и й Г.Я. Об изоморфных банаховых структурах, Сиб.Мат.ж., 10:1 (1969), 93-98.

14. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых её применениях. ДАН СССР, 188:3 (1969), 522-524.

15. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых банаховых структурах, Сиб.Мат.ж., 10:3 (1969), 584-599.

16. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О банаховых структурах с единицей. Изв.вузов, Математика, 1 (92), (1970), 65-69.

17. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О вполне линейных функционалах в полуупорядоченных пространствах, Матем.заметки, 8, № 2 (1970), 187-195.

18. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О нормированных структурах с полунепрерывной нормой, Сиб.Мат.ж., 12:1 (1971), 232--234.

19. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых банаховых структурах, П.Сиб.Мат.ж., 12:3 (1971), 562-567.

20. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О банаховых структурах и вогнутых функциях, ДАН СССР, 199 : 3 (1971), 536-539.

21. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О функциях от элементов линейной структуры. Изв.вузов, Математика (аннотация опубликована в 6 (109), 1971, стр.110).

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ОПТИМИЗАЦИЯ

12 (29)

НОВОСИБИРСК · 1973

УДК 513.88

О ВТОРОМ СОПРЯЖЕННОМ ПО НАКАНО ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ СТРУКТУРЕ

Г.Я.Лозановский

В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы следуем [1]. Банахово сопряженное пространство к нормированному пространству X обозначается X^*. Пространство, сопряженное в смысле Накано к K-линеалу E, обозначается $\bar{E}$.

Следующая теорема является существенным обобщением теоремы 5 из [2].

ТЕОРЕМА I. Пусть X - KB-линеал, E - замкнутое по норме нормальное подпространство в X^*, причем E тотально на X и $\bar{E}$ есть KB-пространство. Тогда X есть KB-пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H есть компонента в X^*, порожденная множеством E. Ясно, что KN-пространства $\bar{H}$ и $\bar{E}$ изоморфны и изометричны (чтобы в этом убедиться, достаточно каждому $f \in \bar{H}$ сопоставить его сужение на E), поэтому $\bar{H}$ есть KB-пространство. Обозначим через $\mathcal{U}$ замкнутый единичный шар пространства H. Так как пространство $\bar{\bar{H}} = (\bar{H})^*$ можно естественным образом отождествить с H, то множество $\mathcal{U}$ компактно в слабой топологии $\sigma(H, \bar{H})$. Но, очевидно, топология $\sigma(H, \bar{H}) \geq \sigma(H, X)$, ибо в естественной двойственности между X и H каждый элемент из X является вполне линейным функционалом на H. Следовательно, множество $\mathcal{U}$ компактно и в топологии $\sigma(H, X)$. Тем самым $\mathcal{U}$ замкнуто в $(X^*, \sigma(X^*, X))$. Так как H тотально на X, то из теоремы Крейна-Шмульяна (см. [3], стр. 77, теорема 5) теперь следует, что $H = X^*$. Напомним, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон (теорема Огасавара). Поэтому пространство $\bar{H} = X^{**}$ слабо секвенциально полно. Но при естественном вложении X в X^{**} пространство X оказывается замкнутым по норме подпространством в X^{**}. Следовательно, X слабо секвенциально полно, тем самым X есть KB-пространство. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X - KB-линеал, такой что $\bar{X}$ тотально на X и $\bar{X}$ есть KB-пространство. Тогда X есть KB-пространство.

Дадим приложение полученных результатов к теории банаховых функциональных пространств. Пусть (T, Σ, μ) - пространство с мерой, состоящее из множества T, некоторой σ-алгебры Σ его подмножеств и неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной меры μ на Σ. Через $S = S(T, \Sigma, \mu)$ обозначаем пространство всех вещественных, измеримых почти всюду конечных функций на T, причем эквивалентные функции, как обычно, отождествляются. Банаховым функциональным пространством (б.ф.п.) на (T, Σ, μ) называется банахово KN-пространство X, являющееся фундаментом в S. Дуальным пространством X' к б.ф.п. X называется пространство всех $x' \in S$, таких что

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{\int_T |x\, x'|\, d\mu : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty .$$

Пусть теперь X есть произвольное б.ф.п. Хорошо известно, что пространство $X'' = (X')'$, вообще говоря, не совпадает с X. Тем не менее справедлива следующая теорема, вытекающая из следствия к теореме I.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X есть б.ф.п. на (T, Σ, μ) и пусть X'' есть KB-пространство. Тогда $X = X''$.

ПРИМЕР. Пусть X есть б.ф.п. на (T, Σ, μ), такое что $X' = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Тогда $X = L^1(T, \Sigma, \mu)$, ибо

$X' - L^1(T, \Sigma, \mu)$ есть KB-пространство. В связи со сказанным заметим, что, вообще говоря, из $X' - L^1(T, \Sigma, \mu)$ не следует, что $X - L^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

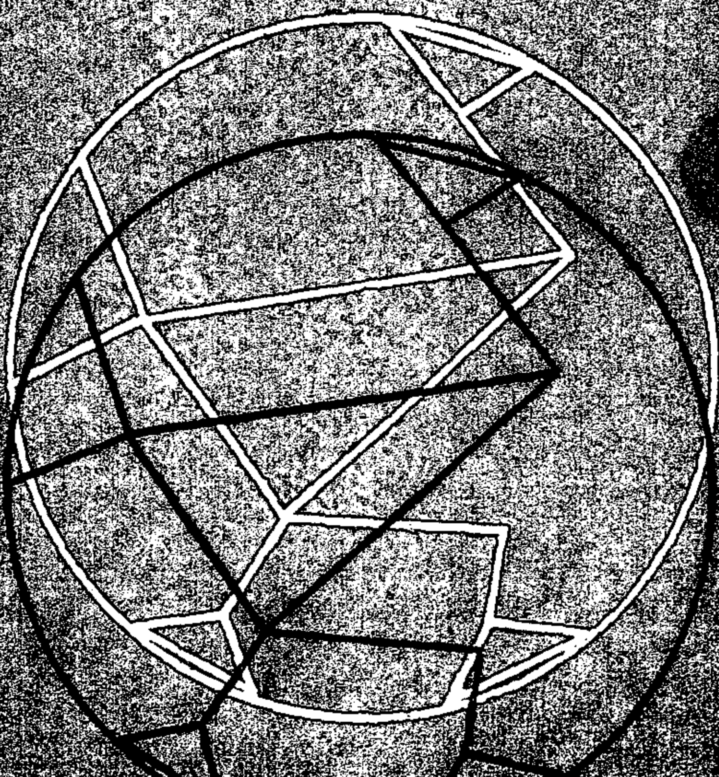
Литература

1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
2. SHIMOGAKI T., On the continuity and the monotonousness of norm, J.Fac.Sci.Hokkaido Univ., ser.I, 1962, v.16, p.225-237
3. ДЭЙ М.М. Нормированные линейные пространства, ИЛ., М., 1961.

Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.

III ТИРАСПОЛЬСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯМ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ШТИИНЦА» • КИШИНЕВ

Литература

1. K.Borsuk. Concerning homotopy properties of compacta. Fund. Math., 62, 1968, 223 - 254.
2. K.Borsuk. Theory of shape. Arhus, 1970, N 28.
3. Hu Sze-tsen. Mappings of normal space into an absolute neighbourhood retract. Trans. Amer. Math. Soc., 64, 1948, 336 - 358.

Г.Я.ЛОЗАНОВСКИЙ (Ленинград)

О НОРМАЛЬНЫХ МЕРАХ НА ПРОИЗВЕДЕНИИ БИКОМПАКТОВ

Под бикомпактом понимается бикомпактное хаусдорфово пространство. Под мерой на бикомпакте понимается регулярная борелевская мера. Мера μ на бикомпакте B называется нормальной, если $\mu(K)=0$ для любого замкнутого нигде неплотного множества K в B. Бикомпакт B называется гиперстоуновым, если каждое непустое открытое множество в нем содержит носитель ненулевой нормальной меры.

Т е о р е м а. Пусть B_1 и B_2 суть произвольные бикомпакты, не содержащие изолированных точек. Тогда на их произведении $B_1 \times B_2$ не существует ненулевой нормальной меры.

С л е д с т в и е. Для любых бикомпактов B_1 и B_2 следующие утверждения эквивалентны:

(1) бикомпакт $B_1 \times B_2$ - гиперстоунов;

(2) B_1 и B_2 - гиперстоуновы и в одном из них имеется плотное множество изолированных точек.

З а м е ч а н и е. Из нашей теоремы вытекает, что в произведении двух гиперстоуновых бикомпактов без изолированных точек существует плотное множество первой категории. А.И.Векслер обратил наше внимание на тот факт, что из этой же теоремы следует, что

в произведении трех таких бикомпактов существует даже плотное множество категории $\frac{1}{2}$. Здесь под множеством категории $\frac{1}{2}$ понимается всякое множество, погружающееся в объединение последовательности границ регулярных замкнутых (канонически замкнутых) множеств. Неизвестно, справедливо ли это для произведения двух таких бикомпактов.

А.А.МАЛЬЦЕВ, Б.С.НУРУТДИНОВ (Москва)

ОБЪЕКТЫ ТИПА ПОЛУГРУППЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.И МАЛЫХИН (Москва)

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНО-НЕСВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИЗМЕРИМЫЙ КАРДИНАЛ

Вопрос о том, когда произведение двух экстремально-несвязных пространств (ни одно из которых не дискретно) снова экстремально несвязно, эквивалентен гипотезе о существовании измеримого кардинала.

П р и м е р. Пусть ξ - счетно-центрированный ультрафильтр на множестве X_1 (и следовательно, $|X_1|$ - измеримый кардинал). Рассмотрим ξ как точку $\beta X_1 \setminus X_1$ и пусть $\tilde{X}_1 = X_1 \cup \{\xi\}$. Пусть также $\tilde{X}_2 = N \cup \{\eta\}$, где N - счетное дискретное пространство, а $\eta \in \beta N \setminus N$. Тогда, воспользовавшись теоремой 1 из [1], можно доказать, что $Z = \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ экстремально несвязно.

Т е о р е м а 1. Пусть X_i - экстремально-несвязные пространства, в которых есть неизолированные точки x_i. Если $|X_i|$ неизмеримы, то $Z = X_1 \times X_2$ не экстремально несвязно.

Доказательству теоремы предпослана

Л е м м а 1. Пусть в экстремально-несвязных пространствах X_i существуют системы Σ_i открыто-замкнутых подмножеств, $|\Sigma_i| = \aleph_0$ и $[\cup \Sigma_i]_{X_i} \neq \cup \Sigma_i$. Тогда $Z = X_1 \times X_2$ не экстремально несвязно.

Зак.430

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. И. ГЕРЦЕНА

XXIV ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

МАТЕМАТИКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДОКЛАДОВ

март — апрель 1971 г.

ЛЕНИНГРАД

равномерно относительно α.

Теорема. *Пусть на σ — кольце S заданы два семей- ства векторнозначных мер $\{\nu_\alpha(E)\}$ и $\{\varphi_\alpha(E)\}$, $\alpha \in I$. Если из условия $\varphi_\alpha(E) = 0$ следует $\nu_\alpha(E) = 0$ для каждого $\alpha \in I$ и $E \in S$ и семейство векторных мер $\{\nu_\alpha(E)\}$ равномерно аддитивно на кольце M, то векторнозначные меры семей- ства $\{\nu_\alpha(E)\}$ равностепенно абсолютно непрерывны отно- сительно системы векторных мер $\{\varphi_\alpha(E)\}$.*

Замечание 1. В случае, когда функции множества $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\nu_\alpha\}$ массы, причем $\varphi_\alpha \equiv \varphi$ для любого $\alpha \in I$ и $\{\nu_\alpha\}$ — равномерно аддитивны на σ — кольце S, из доказанной тео- ремы следует теорема 5 работы [1] В. М. Дубровского, а в случае, когда $\{\nu_\alpha(E)\}$ и $\{\varphi_\alpha(E)\}$ векторные меры, при- чем $\varphi_\alpha \equiv \varphi$ для любого α, теорема 2 работы [2]

Замечание 2. Доказанная теорема будет справедлива и в случае, если $\{\nu_\alpha(E)\}$ семейство масс, а $\{\varphi_\alpha(E)\}$ семей- ство обобщенных мер (§ 28 [3]), однако обратное утвержде- ние не имеет место, даже в случае, если $\varphi_\alpha \equiv \varphi$ для лю- бого α.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Дубровский В. М. Матем. сб., 1947, т. 20 (62), № 2, 317—330.
[2]. Климкин В. М. Уч. зап. Красноярского пед. ин-та, 1970, вы- пуск II, 46—59.
[3]. Халмош П. Теория меры, М, 1953.
[4]. Арешкин Г. Я., Климкин В. М. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1968, 387, 79—91.

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ КВ-ЛИНЕАЛАМ

Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [1].

Определение. Будем говорить, что банахово про- странство X эквивалентно KB-линеалу, если в X можно ввести частичное упорядочение таким образом, что после подходящей эквивалентной перенормировки X превращается в KB-линеал. Это равносильно тому, что в X существует миниэдральный, замкнутый, нормальный, воспроизводящий конус (см. [2]).

Известно, что всякое банахово пространство с безуслов- ным базисом эквивалентно KB-линеалу, причем за конус положительных элементов можно принять коническую обо- лочку базиса (см. [2], [3]). В то же время известное про- странство Джеймса (см. [4] стр. 123) является примером банахова пространства, не эквивалентного KB-линеалу. В работе Линденштраусса [5] показано, что в l^1 существуют подпространства, не имеющие безусловных базисов. Пока- жем, что каждое такое пространство не эквивалентно KB-ли- неалу.

Теорема 1. *Всякое подпространство U простран- ства l^1, не имеющее безусловного базиса, не эквивалентно KB — линеалу.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть после подходящих частичного упорядочения и эквивалентной пе- ренормировки U есть KB-линеал. Так как U слабо сек- венциально полно, то по теореме Огасавара U есть KB-пространство. Поэтому каждый порядковый интервал в U слабо компактен. Так как в l^1, а значит и в U, слабая схо- димость последовательностей совпадает со сходимостью по норме, то порядковые интервалы в U компактны и в норми- рованной топологии. Это влечет дискретность пространства U. Но в дискретном сепарабельном KB-пространстве орты образуют безусловный базис. Противоречие получено, теоре- ма доказана.

Это пространство U интересно тем, что является приме- ром банахова пространства не эквивалентного KB-линеалу, которое (в отличие от пространства Джеймса) слабо сек- венциально полно.

Из того факта, что банахово пространство с безусловным базисом эквивалентно KB-линеалу, а также из теоремы 6 работы [6] можно вывести следующие свойства банахова пространства с безусловным базисом.

Теорема 2. *Пусть E—банахово пространство с безу- словным базисом $\{e_k\}$ и пусть $\{f_k\}$ есть биортогональная система функционалов. Тогда существует константа $c > 0$, обладающая следующим свойством. Для любой последовательности $\lambda = \{\lambda_k\} \in l^1$ найдутся числовые после- довательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, такие, что:*

1) $u_k v_k = \lambda_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$;

2) ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k e_k$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k f_k$ сходятся в E и E^* в нормиро- ванных топологиях этих пространств;

3) *для* $x = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$, $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} v_k f_k$ *справедливо неравенство*

$$\|\lambda\|_{l^1} \geqslant c\,\|x\|_E \cdot \|\varphi\|_{E^*}.$$

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы пусть безусловный базис* $\{e_k\}$ *ограниченно полон и обладает следующим свойством: если числовые последовательности* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *таковы, что* $|a_k| \leqslant |b_k|$ *при всех* k *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k$ *сходится в* E *по норме, то*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\right\|_E.$$

Тогда для любой последовательности $\lambda = \{\lambda_k\} \in l^1$ *найдутся числовые последовательности* $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, *такие, что:*

1) $u_k v_k = \lambda_k$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots$;

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$ *сходится в* E *по норме, а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k f_k$ *слабо* сходится в* E^*;

3) *для* $x = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$, $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} v_k f_k$ *справедливо равенство*

$$\|\lambda\|_{l^1} = \|x\|_E \cdot \|\varphi\|_{E^*}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961.

[2]. Вулих Б. З. ДАН СССР, 1962, 147, № 2, 271—274.

[3]. Гуревич Л. А. Вопр. матем. физ. и теории функций. Сб. № 2 Киев, „Наукова думка", 1964, 12—21.

[4]. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства, 1961.

[5]. Lindenstrauss. T. Bull. Acad. Pol. Sci., sér. sci. math. astr. et phys., 1964, 12, № 9, 539—542.

[6]. Лозановский Г. Я. Сибирск. Матем. Ж., 1969, X, 3, 584—599.

А. А. МЕКЛЕР

О ПОГРУЖЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУР С СОХРАНЕНИЕМ ГРАНЕЙ

Мы пользуемся терминологией, принятой в монографии [1]. Булева алгебра компонент архимедова K — лине-

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1973

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIV, № 1 Январь — Февраль 1973

УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ, IV

Настоящая работа является продолжением работ ([1–3]). В ней продолжается исследование введенной Кальдероном ([4]) конструкции, позволяющей по заданным банаховым структурам, являющимся фундаментом (али) некоторого расширенного K-пространства, образовать большое число новых банаховых структур с помощью вогнутых функций, удовлетворяющих определенным условиям. Эта конструкция является существенным обобщением известной конструкции пространств Орлича ([5]). Напомним, что банаховы структуры измеримых функций на пространстве с мерой, так же как и банаховы структуры числовых последовательностей, суть частные случаи общего понятия абстрактной банаховой структуры. Поэтому приводимые в данной статье результаты нетрудно переформулировать для указанных частных случаев. Основные результаты работы (теоремы 1–3) сформулированы в разделе 2. В разделах 3–6 приведены их доказательства. В разделе 7 рассмотрены важные частные случаи основной конструкции. Некоторые из результатов работы были опубликованы без доказательств в ([6]).

1. Терминология и обозначения

Сопряженное к нормированному пространству X обозначается через X^*. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы, в основном, следуем монографии ([7]). Напомним, что K-пространство W называется *расширенным*, если любое множество попарно дизъюнктных его элементов ограничено по упорядочению. Пусть в расширенном K-пространстве W фиксирована *единица* 1. Тогда W допускает реализацию в виде пространства $C_\infty(Q)$ на подходящем *экстремально несвязном* бикомпакте Q так, что 1 превращается в функцию тождественно равную 1 на Q. Здесь $C_\infty(Q)$ есть пространство всех непрерывных на Q функций, которые на нигде не плотных в Q множествах могут принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Для $u \in C_\infty(Q)$ через Q_u обозначается открыто-замкнутый *носитель* элемента u. Напомним, что подобного рода реализация позволяет, например, для некоторых элементов $u, v \in W$ и функции $f(\xi, \eta)$ вещественных аргументов ξ и η определить элемент $f(u, v) \in W$. В частности, для любых $u, v \in W$ определено *произведение* $uv \in W$. *Следом* элемента $u \in W$ называется элемент $e_u = (u)1$, т. е. проекция 1 на компоненту в W порожденную u. Всюду в работе для любого $u \in W$ через u^{-1} обозначается элемент, удовлетворяющий условиям $e_{u^{-1}} = e_u = uu^{-1}$.

Нам понадобится понятие минимального распространения функционала ([8]). Пусть X — K-пространство, Y — его нормальное подпространство и пусть $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$. Функционал f называется *минимальным распространением* функционала g, если сужение $f|_Y = g$ и для любого $x \in X_+$ справедливы равенства

$$f_+(x) = \sup\{g_+(y) : 0 \leqslant y \leqslant x,\ y \in Y\},$$

$$f_-(x) = \sup\{g_-(y) : 0 \leqslant y \leqslant x,\ y \in Y\}.$$

Напомним также следующее. Пусть $\tilde{X}_Y = \{f \in \tilde{X} : f|_Y = 0\}$. Тогда $\tilde{X}_Y$ есть компонента в $\tilde{X}$ и ее дизъюнктное дополнение совпадает с множеством всех $f \in \tilde{X}$, таких что f есть минимальное распространение своего сужения $f|_Y$.

Если X есть K-пространство, $u \in X$, то через X_u обозначается множество всех $x \in X$, таких что $|x| \leqslant \lambda|u|$ для некоторого числа $\lambda \geqslant 0$. Если для $x \in X_u$ положить

$$\|x\|_{X_u} = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda|u|\},$$

то X_u превращается в *KN-пространство ограниченных элементов.*

Наконец, напомним следующее. Пусть X есть KN-пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Норма $\|\cdot\|_X$ называется *полунепрерывной*, если из того, что $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \uparrow x \in X_+$ следует, что $\sup\limits_n \|x_n\|_X = \|x\|_X$. Норма $\|\cdot\|_X$ называется *монотонно полной*, если из того что $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n\uparrow$ и $\sup\limits_n \|x_n\|_X < \infty$ следует, что существует $\sup\limits_n x_n \in X$. Заменив в этих определениях последовательности направлениями с произвольными множествами индексов, получим определения *универсально полунепрерывной* и *универсально монотонно полной* норм.

2. Формулировки основных результатов

Определение 1. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначим множество всех вещественных вогнутых функций $\varphi(\xi, \eta)$, заданных и непрерывных по совокупности аргументов при $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, таких что

$$\varphi(\xi, 0) = \varphi(0, \eta) = 0 \quad \text{при всех} \quad \xi, \eta \geqslant 0 \tag{1}$$

и

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\xi, \alpha) = \lim_{\beta \to +\infty} \varphi(\beta, \eta) = +\infty \quad \text{при всех } \xi, \eta > 0. \tag{2}$$

Через $\mathfrak{A}_2^0$ обозначим множество всех *положительно однородных* функций $\varphi \in \mathfrak{A}_2$.

Определение 2. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$. Положим

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varphi(\alpha, \beta)} \quad \text{для } \xi, \eta \geqslant 0. \tag{3}$$

Ясно, что $\hat{\varphi} \in \mathfrak{A}_2^0$. Заметим, что $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$.

Между функциями из $\mathfrak{A}_2^0$ и *N-функциями* в смысле монографии ([5]) существует тесная связь.

Предложение 1. a) *Пусть $M(\xi)$ и $N(\eta)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций. Положим для $\xi, \eta \geqslant 0$*

$$\varphi(\xi,\eta)=\begin{cases} 0 & \text{при } \eta=0. \\ \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) & \text{при } \eta>0. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, причем

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\begin{cases} 0 & \text{при } \xi=0. \\ \xi N^{-1}(\eta\xi^{-1}) & \text{при } \xi>0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь M^{-1} и N^{-1} суть функции обратные к M и N, рассматриваемым при неотрицательных значениях аргумента.

b) *Обратно, для любой $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ найдется единственная N-функция $M(\xi)$, такая что справедливо (4).*

Справедливость предложения 1 проверяется без труда.

На протяжении всей работы W означает произвольное расширенное K-пространство с единицей 1, X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в W.

Определение 3. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2$. Через $\varphi(X_0, X_1)$ обозначим множество всех таких $x \in W$, что

$$|x| \leqslant \lambda\varphi(|x_0|, |x_1|) \tag{6}$$

для некоторого числа $\lambda>0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i=0, 1)$. Через $\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ обозначим инфимум всех возможных λ в (6).

Так построенное пространство $\varphi(X_0, X_1)$ с нормой $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ есть банахово KN-пространство и фундамент в W, см. ([2]) *).

Напомним, что $X_0 \cap X_1$ и X_0+X_1 оказываются банаховыми KN-пространствами, если на них ввести следующие нормы:

$$\|x\|_{X_0\cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}, \quad x \in X_0 \cap X_1, \tag{7}$$

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1,\ |x_0|+|x_1|=|x|\}, \quad x \in X_0+X_1. \tag{8}$$

Прежде чем формулировать теорему 1, заметим следующее. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, $\psi=\hat{\varphi}$, $X=\varphi(X_0, X_1)$. Ясно, что $X_0 \cap X_1 \subset X$. Через $X^*_{\min}$ будем обозначать совокупность всех $F \in X^*$, таких что F есть минимальное распространение на X своего сужения $F|_{X_0\cap X_1}$. Тогда $X^*_{\min}$ естественно вкладывается как нормальное подпространство в $(X_0 \cap X_1)^*$, если каждому $F \in X^*_{\min}$ сопоставить $F|_{X_0\cap X_1}$. Аналогично, если $X_0 \cap X_1$ плотно в X_i $(i=0, 1)$, то, сопоставив каждому $f \in X_i^*$ его сужение на $X_0 \cap X_1$, мы получим вложение X_i^* в $(X_0 \cap X_1)^*$. В этом случае, вложив X_0^* и X_1^* в $(X_0 \cap X_1)^*$, можно (см. определение 3) образовать пространство $\psi(X_0^*, X_1^*)$, являющееся нормальным подпространством в $(X_0 \cap X_1)^*$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, $\psi=\hat{\varphi}$ и пусть $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и в X_1. Пусть $X=\varphi(X_0, X_1)$. Тогда после указанного вложения $X^*_{\min}$, X_0^* и X_1^**

*) Заметим, что определение 3 имеет смысл и тогда, когда X_0, X_1 суть произвольные нормальные подпространства (не обязательно фундаменты) в W. При этом $\varphi(X_0, X_1)$ оказывается нормальным подпространством в W.

в $(X_0 \cap X_1)^\bullet$ *справедливо равенство*

$$X^\bullet_{\min} = \psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet) \tag{9}$$

по запасу элементов и

$$\|F\|_{\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)} \leqslant \|F\|_{X^\bullet} \leqslant 2\|F\|_{\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)} \text{ при } F \in X^\bullet_{\min}. \tag{10}$$

Если, кроме того, M и N из (4) *и* (5) *удовлетворяют Δ_2-условию, то $X_0 \cap X_1$ плотно в X и, следовательно, $X^\bullet_{\min} = X^\bullet$.*

Далее в этом разделе не требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в X_0 или X_1.

Предложение 2. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$. Тогда*

a) Равенство

$$(\varphi_1(X_0, X_1),\ \|\cdot\|_{\varphi_1(X_0, X_1)}) = (\varphi_2(X_0, X_1),\ \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0, X_1)})$$

при всевозможных W, $\mathbb{1}$, X_0, X_1 имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_1 = \varphi_2$.

b) Равенство $\varphi_1(X_0, X_1) = \varphi_2(X_0, X_1)$ по запасу элементов при всевозможных W, $\mathbb{1}$, X_0, X_1 имеет место тогда и только тогда, когда существуют числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1\varphi_2 \leqslant \varphi_1 \leqslant c_2\varphi_2. \tag{11}$$

При этом, если это условие выполнено, то

$$c_1\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0, X_1)} \leqslant \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0, X_1)} \leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0, X_1)}. \tag{12}$$

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству теоремы 13.2 из ([5]), и мы его опускаем.

Определение 4. Функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$ будем называть *эквивалентными*, если для некоторых $c_1, c_2 > 0$ справедливо (11).

До конца этого раздела будем предполагать теперь, что в W имеется фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой (см. ([7]), гл. VII, § 7). Для $x \in L$ полагаем

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L. \tag{13}$$

Напомним, что J есть существенно положительный вполне линейный функционал на L. Если $x \in W_+$, но $x \notin L$, то для удобства полагаем $J(x) = +\infty$. Если Y есть произвольный фундамент в W, то пространство

$$Y' = \{y' \in W : yy' \in L \text{ для любого } y \in Y\} \tag{14}$$

называется пространством *дуальным* к Y. Напомним, что Y' естественным образом отождествляется с пространством $\overline{Y}$ всех вполне линейных функционалов на Y. Если, вдобавок, Y есть банахово KN-пространство, то на Y' рассматриваем *дуальную норму*

$$\|y'\|_{Y'} = \sup\{J(|yy'|) : y \in Y,\ \|y\|_Y \leqslant 1\}. \tag{15}$$

Определение 5. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$.

a) Пара (φ_1, φ_2) называется *согласованной*, если

$$((\varphi_1(X_0, X_1))',\ \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0, X_1))'}) = (\varphi_2(X_0', X_1'),\ \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0', X_1')}) \tag{16}$$

при всевозможных W, $\mathbb{1}$, L, J, X_0, X_1.

b) Пара (φ_1, φ_2) называется *слабо согласованной, если*

$$(\varphi_1(X_0, X_1))' = \varphi_2(X_0', X_1') \tag{17}$$

по запасу элементов при всевозможных W, 1, L, J, X_0, X_1.

В (²) показано, что все согласованные пары (φ_1, φ_2) суть

$$\varphi_1(\xi, \eta) = A\xi^{1-s}\eta^s, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s,$$

где $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$ — любые. В следующей теореме дается описание всех слабо согласованных пар.

Теорема 2. *a*) *Для любой* $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ *пара* $(\varphi, \hat{\varphi})$ *слабо согласована. При этом всегда*

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')}. \tag{18}$$

b) *Обратно, пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$ *и пара* (φ_1, φ_2) *слабо согласована. Тогда существует* $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, *такая что* φ *эквивалентна* φ_1, *а* $\hat{\varphi}$ *эквивалентна* φ_2.

Следующая теорема описывает некоторые полезные свойства пространства $\varphi(X_0, X_1)$.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$.

a) *Если нормы* $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ *универсально монотонно полны, то этим же свойством обладает норма* $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$.

b) *Пусть нормы* $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ *универсально монотонно полны и универсально полунепрерывны. Тогда этими же двумя свойствами обладает и норма* $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$. *При этом для любого* $x \in \varphi(X_0, X_1)$ *существуют* $x_i \in X_i$, *такие что* $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$ *и*

$$|x| \leqslant \|x\|_{\varphi(X_0, X_1)}\varphi(|x_0|, |x_1|). \tag{19}$$

Иными словами в этом случае среди чисел λ из определения 3 существует наименьшее.

Замечание. Из универсальной полунепрерывности норм $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ не следует, что норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ универсально полунепрерывна. Соответствующий пример приводится в разделе 7.

3. Некоторые вспомогательные предложения

Всюду в этом разделе пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ фиксирована, $\psi = \hat{\varphi}$, N-функции M и N из (4) и (5).

Лемма 1. *Пусть* $M_+'(\xi)$ *есть правая производная функции* $M(\xi)$. *Пусть* $u, v \in W_+$, *причем* $e_u = e_v$. *Положим*

$$w = M_+'(M^{-1}(uv^{-1})), \quad x = w^{-1}, \quad y = N(w)w^{-1}. \tag{20}$$

Тогда

$$\psi(x, y) = e_u, \ \varphi(u, v) = xu + yv. \tag{21}$$

Доказательство. Имеем (см. (³), стр. 24)

$$\xi M_+'(\xi) = M(\xi) + N(M_+'(\xi)) \text{ при всех } \xi \geqslant 0. \tag{22}$$

Имеем $\psi(x,\ y) = \psi(w^{-1},\ N(w)w^{-1}) = w^{-1}\psi(1,\ N(w)) = w^{-1}N^{-1}(N(w)) = w^{-1}w = e_w = e_u$. Аналогично доказывается второе равенство.

Лемма 2. *Пусть $u,\ v,\ w \in W_+$, причем $w \leqslant \varphi(u,\ v)$. Тогда существуют $u',\ v' \in W_+$ такие что $u' \leqslant u,\ v' \leqslant v,\ w = \varphi(u',\ v) = \varphi(u,\ v')$.*

Справедливость леммы очевидна в силу строгого возрастания функций M и N на $[0, +\infty)$.

Лемма 3. *Пусть K — произвольный бикомпакт, $E = C(K) \times C(K)$. Возьмем произвольный $h \in C(K)_+^{\bullet}$ и положим $H = \{(f,\ g) \in E_+^{\bullet} : \psi(f,\ g) \geqslant h\}$. Множество H непусто, выпукло и замкнуто в топологии $\sigma(E^{\bullet}, E)$.*

Эта лемма есть обобщение леммы 8 из [1]. Ее доказательство, подобное доказательству последней, мы опускаем.

Лемма 4. *Пусть K — произвольный бикомпакт, $f_0,\ f_1 \in C(K)_+^{\bullet}$, $z \in C(K)_+$, число $a > 0$. Пусть*

$$(u_0,\ u_1 \in C(K)_+,\ \varphi(u_0,\ u_1) \geqslant z) \Rightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \overset{\geqslant}{\cancel{\leqslant}} a). \tag{23}$$

Тогда $(\psi(f_0, f_1))(z) \overset{\geqslant}{\cancel{\leqslant}} a$.

Доказательство. Пусть μ — неотрицательная регулярная борелевская мера на K, $p_0,\ p_1$ неотрицательные борелевские функции на K, такие что

$$f_i(x) = \int_K x p_i d\mu \ \text{ при } x \in C(K) \quad (i = 0, 1).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $p_i^{(\varepsilon)} = p_i + \varepsilon$ $(i = 0,\ 1)$. В силу (22) и леммы 1 найдутся борелевские функции $q_i^{(\varepsilon)}$ $(i = 0, 1)$, такие что $\varphi(q_0^{(\varepsilon)}, q_1^{(\varepsilon)}) = 1$ на K, $\psi(p_0^{(\varepsilon)}, p_1^{(\varepsilon)}) = q_0^{(\varepsilon)}p_0^{(\varepsilon)} + q_1^{(\varepsilon)}p_1^{(\varepsilon)}$ и $c_1 \leqslant q_i^{(\varepsilon)} \leqslant c_2$ на K, где числа $c_1,\ c_2 > 0$ зависят от ε. Возьмем последовательность $y_n \in C(K)_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $y_n \to q_1^{(\varepsilon)}$ μ- почти всюду и $c_1 \leqslant y_n \leqslant c_2$ при всех n. Положим $x_n = y_n M(y_n^{-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что $x_n \in C(K)_+$, $\varphi(x_n,\ y_n) = 1$ на K, $x_n \to q_0^{(\varepsilon)}$ μ-почти всюду, причем $c_1' \leqslant x_n \leqslant c_2'$, где числа $c_1', c_2' > 0$. Положим $u_0^{(n)} = x_n z$, $u_1^{(n)} = y_n z$. Имеем $\varphi(u_0^{(n)}, u_1^{(n)}) = \varphi(x_n, y_n) z = z$. Поэтому $f_0(u_0^{(n)}) + f_1(u_1^{(n)}) \geqslant a$, т. е. $\int_K z(x_n p_0 + y_n p_1)\, d\mu \geqslant a$ при всех n.

Отсюда $\int_K z(q_0^{(\varepsilon)}p_0 + q_1^{(\varepsilon)}p_1)\, d\mu \geqslant a$. Тогда и подавно $\int_K z(q_0^{(\varepsilon)}p_0^{(\varepsilon)} + q_1^{(\varepsilon)}p_1^{(\varepsilon)}) \times d\mu \geqslant a$, т. е. $\int_K z\psi(p_0^{(\varepsilon)}, p_1^{(\varepsilon)})\, d\mu \geqslant a$.

Перейдя к пределу в последнем неравенстве при $\varepsilon \downarrow 0$, получим

$$\int_K z\psi(p_0, p_1)\, d\mu \geqslant a, \ \text{ т. е. } \ (\psi(f_0, f_1))(z) \geqslant a.$$

Следующие четыре леммы почти очевидны, их доказательства мы опускаем.

Лемма 5. *Пусть $Y_1,\ Y_2$ суть банаховы KN-пространства, причем Y_1 есть нормальное подпространство в Y_2 и $\|\cdot\|_{Y_1}$ эквивалентна сужению $\|\cdot\|_{Y_2}$*

на Y_1. *Тогда, если норма* $\|\cdot\|_Y$ *универсально монотонно полна, то* Y_1 *есть компонента в* Y_2.

Лемма 6. *Пусть* Y *есть банахово KN-пространство,* Y_1 — *его фундамент плотный по норме в* Y. *Тогда для любого* $y \in Y_+$ *существует такая последовательность* $y_n \in (Y_1)_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *что* $\|y - y_n\|_Y \to 0$, $y_n \uparrow y$ *и* $(y_{n+1} - y_n) \wedge y_n = 0$ *при всех* n.

Лемма 7. *Пусть* Y *есть KN-пространство,* $(Y^\cdot)_1$ *есть компонента в* $Y^\cdot$, $0 < F \in Y^\cdot$, *причем* F *дизъюнктен* $(Y^\cdot)_1$. *Тогда существует направление* $y_\alpha \in Y_+$ $(\alpha \in A)$, *такое что* $f(y_\alpha) \to 0$ *для любого* $f \in (Y^\cdot)_1$ *и* $F(y_\alpha) \geqslant 1$ *при всех* $\alpha \in A$.

Лемма 8. *Пусть* Y *есть банахово KN-пространство,* Y_1 — *его замкнутый по норме фундамент, причем* $\|\cdot\|_{Y_1} = \|\cdot\|_Y|_{Y_1}$. *На* $\overline{Y}$ *и* $\overline{Y}_1$ *рассматриваем нормы, индуцированные из* $Y^\cdot$ *и* $Y_1^\cdot$ *соответственно. Тогда отображение* $\overline{Y} \ni f \to f|_{Y_1}$ *есть изометрический изоморфизм* $\overline{Y}$ *на* $\overline{Y}_1$.

Лемма 9. *Если* M *и* N *удовлетворяют* Δ_2-*условию, то существует число* $b > 2$, *такое что*

$$\varphi(\xi, \eta) \leqslant \varphi(b\xi/2, \eta/2), \ \varphi(\xi, \eta) \leqslant \varphi(\xi/2, b\eta/2) \text{ при } \xi, \eta \geqslant 0.$$

Доказательство. Так как M удовлетворяет Δ_2-условию, то существует $k > 2$ такое, что $M(2\xi) \leqslant kM(\xi)$ при всех $\xi \geqslant 0$. Так как N удовлетворяет Δ_2-условию, то (см. ([5]), стр. 38, 39) существует $l > 1$ такое, что $M(\xi) \leqslant \frac{1}{2l} M(l\xi)$ при всех $\xi \geqslant 0$. Простые вычисления показывают, что можно принять $b = \max\{k, 2l\}$.

4. Доказательство теоремы 1

Положим для краткости $Z = X_0 \cap X_1$. Обозначим (временно) через π, π_0, π_1 указанные перед теоремой 1 операторы естественного вложения пространств $X^\cdot_{\min}$, $X_0^\cdot$, $X_1^\cdot$ в $Z^\cdot$.

Лемма 10. *Пусть* $f_i \in (X_i)_+^\cdot$ $(i = 0, 1)$. *Тогда*

$$\psi(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1) \in \pi(X^\cdot_{\min}) \tag{24}$$

и для $F = \pi^{-1}\psi(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1)$ *и любых* $u_i \in (X_i)_+$ $(i = 0, 1)$ *справедливо*

$$F(\varphi(u_0, u_1)) \leqslant f_0(u_0) + f_1(u_1), \tag{25}$$

$$\|F\|_{X^\cdot} \leqslant \|f_0\|_{X_0^\cdot} + \|f_1\|_{X_1^\cdot}. \tag{26}$$

Доказательство. Положим $G = \psi(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1)$. Имеем, очевидно, $G \in Z^\cdot$. Реализуем W в виде $C_\infty(Q)$ на подходящем экстремально несвязном бикомпакте Q так, что 1 есть функция на Q тождественно равная единице. Возьмем произвольные $z \in Z_+$, $u_0 \in (X_0)_+$, $u_1 \in (X_1)_+$ такие что $z \leqslant \varphi(u_0, u_1)$. Положим $w_i = z \vee u_i$ $(i = 0, 1)$. Пусть μ — неотрицательная регулярная борелевская мера на Q, l_i $(i = 0, 1)$ неотрицательные борелевские функции на Q, такие что

$$f_i(x) = \int_Q (xw_i^{-1}) l_i d\mu \text{ при } x \in W_{w_i} \quad (i = 0, 1). \tag{27}$$

Здесь $xw_i^{-1} \in C(Q)$ есть произведение в смысле умножения элементов расширенного K-пространства, а $(xw_i^{-1})l_i$ есть уже обычное поточечное произведение конечных функций (xw_i^{-1}) и l_i. Так как очевидно $xw_i^{-1} = (xz^{-1}) \times (zw_i^{-1})$ при $x \in W_z$, то из (27) следует что

$$f_i(x) = \int\limits_Q (xz^{-1})(zw_i^{-1})l_i d\mu \quad \text{при } x \in W_z \quad (i = 0, 1). \tag{28}$$

Отсюда

$$G(x) = \int\limits_Q (xz^{-1})\psi((zw_0^{-1})l_0, \ (zw_1^{-1})l_1)d\mu \text{ при } x \in W_z.$$

Тем самым

$$G(z) = \int\limits_{Q_z} \psi((zw_0^{-1})l_0, \ (zw_1^{-1})l_1)d\mu. \tag{29}$$

Положим

$$Q_z^0 = \{s \in Q_z: 0 < z(s) \leqslant w_i(s) < +\infty \text{ при } i = 0, 1\}.$$

Множество Q_z^0 открыто и плотно в Q_z. Положим

$$p(t) = \psi((zw_0^{-1})(t)l_0(t), \ (zw_1^{-1})(t)l_1(t)), \ t \in Q,$$

$$p_t(s) = \psi((zw_0^{-1})(s)l_0(t), \ (zw_1^{-1})(s)l_1(t)), \ t \in Q, \ s \in Q.$$

Пусть $s \in Q_z^0$. Тогда

$$(zw_i^{-1})(s) = z(s) / w_i(s) \leqslant \varphi(u_0(s), \ u_1(s)) / w_i(s).$$

Откуда

$$p_t(s) \leqslant \varphi(u_0(s), \ u_1(s))\psi(l_0(t) / w_0(s), \ l_1(t) / w_1(s)) \leqslant$$
$$\leqslant u_0(s)l_0(t) / w_0(s) + u_1(s)l_1(t) / w_1(s).$$

Но

$$p(t) = \lim_{\substack{s \to t_0 \\ s \in Q_z^0}} p_t(s) \quad \text{при} \quad t \in Q_z.$$

Из сказанного ясно, что

$$p(t) \leqslant (u_0w_0^{-1})(t)l_0(t) + (u_1w_1^{-1})(t)l_1(t) \text{ при всех } t \in Q. \tag{30}$$

Из (30) теперь следует, что

$$G(z) \leqslant \int\limits_{Q_z} (u_0w_0^{-1})l_0 d\mu + \int\limits_{Q_z} (u_1w_1^{-1})l_1 d\mu \leqslant f_0(u_0) + f_1(u_1). \tag{31}$$

Итак, для любых $u_0 \in (X_0)_+$, $u_1 \in (X_1)_+$ справедливо

$$\sup \{G(z): z \in Z_+, \ z \leqslant \varphi(u_0, \ u_1)\} \leqslant f_0(u_0) + f_1(u_1). \tag{32}$$

Поэтому G допускает положительное распространение на X. Пусть F есть минимальное распространение. Ясно, что $F \in X^*_{\min}$ и $\pi F = \psi(\pi_0 f_0, \ \pi_1 f_1)$. Теперь из (32) легко следуют (25) и (26).

Далее будем отождествлять пространства $X^*_{\min}$, X_0^*, X_1^* с их образами в Z^*. Теперь можно образовать пространство $\psi(X_0^*, \ X_1^*)$ с нормой $\|\cdot\|_{\psi(X_0^*, \ X_1^*)}$. Заметим, что из леммы 10 немедленно следует, что $\psi(X_0^*, X_1^*) \subset X^*_{\min}$ и

$$\|F\|_{X^*} \leqslant 2\|F\|_{\psi(X_0^*, \ X_1^*)} \text{ при } F \in \psi(X_0^*, \ X_1^*) \tag{33}$$

Далее полагаем $E = X_0 \times X_1$, причем

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \quad \text{для} \quad (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда естественным образом $E^\cdot = X_0^\cdot \times X_1^\cdot$, причем

$$\|(f_0, f_1)\|_{E^\cdot} = \max\{\|f_0\|_{X_0^\cdot}, \|f_1\|_{X_1^\cdot}\} \quad \text{для} \quad (f_0, f_1) \in E^\cdot.$$

Через τ будем обозначать топологию $\sigma(E^\cdot, Z \times Z)$ в $E^\cdot$. Заметим, что топология τ хаусдорфова и $\tau \leqslant \sigma(E^\cdot, E)$.

Лемма 11. *Пусть* $0 \leqslant F \in \psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)$. *Положим*

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^\cdot : \psi(f_0, f_1) \geqslant F\}.$$

Множество H непусто, выпукло и τ-замкнуто в $E^\cdot$.

Ясно, что лемма 11 есть следствие леммы 3.

Лемма 12. *Норма* $\|\cdot\|_{\psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)}$ *универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.*

Доказательство. Пусть направление $0 \leqslant F_\alpha \in \psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, $F_\alpha \uparrow$ и $\sup \|F_\alpha\|_{\psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)} = d < +\infty$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим

$$H_\alpha = \{(f_0, f_1) \in E_+^\cdot : \|f_i\|_{X_i^\cdot} \leqslant 1 \quad (i = 0, 1),\ F_\alpha \leqslant (d + \varepsilon)\psi(f_0, f_1)\}.$$

В силу леммы 11 H_α τ-компактно. Так как система множеств $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, очевидно, центрирована, то ее пересечение непусто. Пусть $(f_0, f_1) \in \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} H_\alpha$. Тогда $F_\alpha \leqslant (d + \varepsilon)\psi(f_0, f_1)$ при $\alpha \in \mathrm{A}$. Поэтому существует $\sup F_\alpha = F \in \psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)$ и $F \leqslant (d + \varepsilon)\psi(f_0, f_1)$. Тем самым $\|F\|_{\psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)} \leqslant d + \varepsilon$. Остается заметить, что $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Лемма 13. *Пусть* $0 \leqslant F \in \psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)$, $\|F\|_{\psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)} = 1$ *и пусть a — число, такое что* $0 < a < 1$. *Тогда существуют* $x_0, x_1 \in Z_+$, *такие что* $\|(x_0, x_1)\|_E = 1$ *и*

$$(f_0 \in (X_0)_+^\cdot,\ f_1 \in (X_1)_+^\cdot,\ \psi(f_0, f_1) \geqslant F) \Rightarrow (f_0(x_0) + f_1(x_1) \geqslant a). \quad (34)$$

Доказательство. Положим

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^\cdot : \psi(f_0, f_1) \geqslant F\},$$

$$B_a = \{(f_0, f_1) \in E^\cdot : \|(f_0, f_1)\|_{E^\cdot} \leqslant a\}.$$

Так как $H \cap B_a = \varnothing$, H τ-замкнуто, B_a τ-компактно, то H и B_a отделимы τ-замкнутой гиперплоскостью. Поэтому существует $(y_0, y_1) \in Z \times Z$, такой что $\|y_0\|_{X_0} + \|y_1\|_{X_1} = 1$ и

$$\inf_{(f_0, f_1) \in H} \{f_0(y_0) + f_1(y_1)\} \geqslant \sup_{(f_0, f_1) \in B_a} \{f_0(y_0) + f_1(y_1)\} = a.$$

Остается положить $x_0 = |y_0|$, $x_1 = |y_1|$.

Лемма 14. *Пусть* $0 \leqslant F \in \psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)$. *Тогда существует последовательность* $0 \leqslant F_n \in \psi(X_0^\cdot, X_1^\cdot)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *такая что* $F_n \uparrow F$ *и каждый* F_n *допускает (единственное) положительное распространение на* $X_0 + X_1$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что, как нетрудно видеть, Z плотно в $X_0 + X_1$. В силу леммы 2 существуют $f_i \in (X_i)_+^\cdot$ $(i = 0, 1)$, такие что $F = \psi(f_0, f_1)$. Так как мы условились считать, что $X_i^* \subset Z^*$, то существует $f_0 \wedge f_1 = g \in Z^*$. Ясно, что g допускает положительное распространение на $X_0 + X_1$ и потому $g \in \psi(X_0^*, X_1^*)$. Остается положить $F_n = F \wedge ng$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 15. *Для любого $F \in \psi(X_0^*, X_1^*)$ справедливо*

$$\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} \leqslant \|F\|_{X^*}. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $F \geqslant 0$. В силу лемм 12 и 14 можно считать, что F допускает положительное распространение на $X_0 + X_1$. Можно считать также, что $\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} = 1$. Фиксируем произвольное число a, такое что $0 < a < 1$. Пусть x_0, x_1 из леммы 13. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $u = x_0 + \varepsilon x_1$, $v = x_1 + \varepsilon x_0$. Положим $w = M_+'(M^{-1}(uv^{-1}))$, $p = w^{-1}$, $q = N(w)w^{-1}$. В силу леммы 1 имеем $\psi(p, q) = e_u$, $\varphi(u, v) = pu + qv$. Положим $r = \dfrac{1}{\psi(1,1)}(1 - e_u)$. Наконец, для $x \in X_0 + X_1$ полагаем

$$f_0(x) = F(px) + F(rx), \quad f_1(x) = F(qx) + F(rx).$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что $\psi(f_0, f_1) = F$. Тогда имеем $f_0(x_0) + f_1(x_1) \geqslant a$, откуда $f_0(u) + f_1(v) \geqslant a$, т. е. $F(pu + qv) \geqslant a$. Тем самым $F(\varphi(u, v)) \geqslant a$. Но очевидно $\|\varphi(u, v)\|_X \leqslant 1 + \varepsilon\theta$, где $\theta = \max\{\|x_1\|_{X_0}, \|x_0\|_{X_1}\}$, откуда

$$\|F\|_{X^*} \geqslant \frac{a}{1 + \varepsilon\theta}. \tag{36}$$

В силу произвольности $a \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ из (36) следует, что $\|F\|_{X^*} \geqslant 1$.

Лемма 16. *$\psi(X_0^*, X_1^*)$ есть компонента в $X^*_{\min}$ и*

$$\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} \leqslant \|F\|_{X^*} \leqslant 2\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} \text{ при } F \in \psi(X_0^*, X_1^*). \tag{37}$$

Доказательство. Неравенства (37) уже доказаны, см. (33) и (35). Остается применить леммы 5 и 12.

Лемма 17. *Пусть $f_i \in (X_i)_+^*$ $(i = 0, 1)$, $z \in Z_+$, число $a > 0$. Пусть*

$$(u_i \in (X_i)_+ \ (i = 0, 1), \ \varphi(u_0, u_1) \geqslant z) \Rightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geqslant a).$$

Тогда $(\psi(f_0, f_1))(z) \geqslant a$.

Ясно, что лемма 17 есть следствие леммы 4.

Лемма 18. $\psi(X_0^*, X_1^*) = X^*_{\min}$.

Доказательство. Пусть $0 < F \in X^*_{\min}$, причем F дизъюнктен $\psi(X_0^*, X_1^*)$. В силу леммы 7 найдется направление $z_\alpha \in Z_+$ $(\alpha \in A)$, такое что $f(z_\alpha) \to 0$ для любого $f \in \psi(X_0^*, X_1^*)$ и $F(z_\alpha) \geqslant 1$ при всех $\alpha \in A$. Пусть T есть выпуклая оболочка множества $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Ясно, что

$$\inf\{\|z\|_X : z \in T\} = a > 0. \tag{38}$$

Положим $D = \{(u_0, u_1) \in E_+ :$ существует $z \in T$, такое что $\varphi(u_0, u_1) \geqslant z\}$. Ясно, что D непусто, выпукло и $\|(u_0, u_1)\|_E \geqslant a$ для всех $(u_0, u_1) \in D$. Тогда существует $(f_0, f_1) \in E_+^*$ и число $\gamma > 0$, такие что $f_0(u_0) + f_1(u_1) \geqslant \gamma$ для всех $(u_0, u_1) \in D$. Тогда в силу леммы 17 имеем $(\psi(f_0, f_1))(z_\alpha) \geqslant \gamma$ при всех $\alpha \in A$, что невозможно, ибо $\psi(f_0, f_1) \in \psi(X_0^{\bullet}, X_1^{\bullet})$.

Для завершения доказательства теоремы 1 теперь осталось только установить справедливость следующей леммы.

Лемма 19. *Пусть M и N удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда Z плотно по норме в X.*

Доказательство. Пусть $x \in X_+$. В силу леммы 2 существуют $x_0 \in (X_0)_+$, $x_1 \in (X_1)_+$, такие что $\varphi(x_0, x_1) = x$. В силу леммы 6 для $i = 0, 1$ существуют последовательности $z_n^{(i)} \in Z_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, такие что $z_n^{(i)} \uparrow x_i$, $(z_{n+1}^{(i)} - z_n^{(i)}) \wedge z_n^{(i)} = 0$ и $\|x_i - z_n^{(i)}\|_{X_i} \to 0$. Так как $\varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) \in Z$, то осталось только показать, что $\|x - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)})\|_X \to 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть натуральное число m таково, что $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 2^m \varepsilon$ $(i = 0, 1)$. Пусть натуральное число n_0 таково, что $(b/2)^m \|x_i - z_n^{(i)}\|_{X_i} \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ $(i = 0, 1)$, где число b из леммы 9. Так как $x - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) = \varphi(x_0, x_1) - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) = \varphi(x_0, x_1) - \varphi(z_n^{(0)}, x_1) + \varphi(z_n^{(0)}, x_1) - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) = \varphi(x_0 - z_n^{(0)}, x_1) + \varphi(z_n^{(0)}, x_1 - z_n^{(1)}) \leqslant \varphi((b/2)^m (x_0 - z_n^{(0)}), x_1/2^m) + \varphi(z_n^{(0)}/2^m, (b/2)^m (x_1 - z_n^{(1)}))$, то при всех $n \geqslant n_0$ имеем $\|x - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)})\|_X \leqslant 2\varepsilon$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Докажем сначала утверждение а). Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, W, 1, L, J, X_0, X_1 фиксированы. Положим $\psi = \hat{\varphi}$. Нужно доказать, что

$$(\varphi(X_0, X_1))' = \psi(X_0', X_1') \tag{39}$$

и

$$\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')}. \tag{40}$$

Обозначим через Y_i замыкание $X_0 \cap X_1$ в X_i, причем пусть $\|\cdot\|_{Y_i} = \|\cdot\|_{X_i}|_{Y_i}$ $(i = 0, 1)$. Так как $Y_0 \cap Y_1$ плотно в Y_i $(i = 0, 1)$, то в силу теоремы 1 имеем

$$(\varphi(Y_0, Y_1))' = \psi(Y_0', Y_1') \tag{41}$$

и

$$\|\cdot\|_{\psi(Y_0', Y_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(Y_0, Y_1))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\psi(Y_0', Y_1')}. \tag{42}$$

Но $(Y_i', \|\cdot\|_{Y_i'}) = (X_i', \|\cdot\|_{X_i'})$ $(i = 0, 1)$ в силу леммы 8. Так как очевидно $\psi(X_0', X_1') \subset (\varphi(X_0, X_1))'$ и $\varphi(Y_0, Y_1) \subset \varphi(X_0, X_1)$, то $(\varphi(Y_0, Y_1))' \supset (\varphi(X_0, X_1))' \supset \psi(X_0', X_1') = \psi(Y_0', Y_1') = (\varphi(Y_0, Y_1))'$, откуда следует (39). Так как очевидно $\|y\|_{\varphi(Y_0, Y_1)} \geqslant \|y\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ при $y \in \varphi(Y_0, Y_1)$, то $\|\cdot\|_{(\varphi(Y_0, Y_1))'} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'}$, откуда $\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'}$ в силу левого неравенства из (42).

Таким образом левое неравенство из (40) доказано. Докажем правое. Пусть $0 \leqslant w' \in \psi(X_0', X_1')$, $\|w'\|_{\psi(X_0', X_1')} = \lambda$. Пусть $u_i' \in (X_i')_+$ $(i = 0, 1)$ таковы, что $\|u_i'\|_{X_i'} \leqslant 1$, $w' \leqslant (\lambda + \varepsilon)\psi(u_0', u_1')$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Возьмем теперь произвольный $w \in \varphi(X_0, X_1)$, такой что $w \geqslant 0$, $\|w\|_{\varphi(X_0, X_1)} \leqslant 1$. Найдутся $u_i \in (X_i)_+$ $(i = 0, 1)$, такие что $\|u_i\|_{X_i} \leqslant 1$, $w \leqslant (1 + \varepsilon) \times$

$\times\varphi(u_0,\ u_1)$. Тогда $J(ww')\leqslant(\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)J(\psi(u_0',\ u_1')\varphi(u_0,\ u_1))\leqslant$ $\leqslant(\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)J(u_0'u_0+u_1'u_1)\leqslant 2(\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)$. В силу произвольности ε и w отсюда получаем $\|w'\|_{(\varphi(X_0,\ X_1))'}\leqslant 2\lambda$.

Докажем теперь утверждение b). До конца этого раздела фиксируем произвольную слабо согласованную пару (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$.

Лемма 20. *Существуют числа* $c_1,\ c_2>0$, *такие что* $c_1\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',\ X_1')}\leqslant$ $\leqslant\|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,\ X_1))'}\leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',\ X_1')}$ *для любых* W, 1, L, J, X_0, X_1.

Несложное доказательство этой леммы, основанное на использовании нормированных произведений (см. ([9]), гл. II, § 2) мы опускаем.

Применив лемму 20 к тому случаю, когда W есть вещественная прямая, получим

$$c_1\leqslant\varphi_1(a,\ b)\varphi_2(a^{-1},\ b^{-1})\leqslant c_2\ \text{ при всех } a,\ b>0 \tag{43}$$

Лемма 21. *Пусть числовые последовательности* $a_n>0,\ b_n>0,\ \xi_n\geqslant$ $\geqslant 0,\eta_n\geqslant 0\ (n=1,2,\ldots)$ *таковы, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n a_n^{-1}\leqslant 1;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n b_n^{-1}\leqslant 1.\quad \text{\textit{Тогда}}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n,\eta_n)/\varphi_1(a_n,b_n)\leqslant c_2/c_1,$$

где числа c_1 и c_2 *из леммы* 20.

Доказательство. Примем за W K-пространство всех последовательностей вещественных чисел. Пусть X_0 есть множество всех $z=$ $=\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}\in W$ таких что

$$\|z\|_{X_0}=\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|a_n^{-1}<+\infty,$$

и пусть X_1 есть множество всех $z=\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}\in W$, таких что

$$\|z\|_{X_1}=\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|b_n^{-1}<+\infty.$$

Положим $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y=\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что $\varphi_1(x,\ y)\in\varphi_1(X_0,\ X_1)$ и $\|\varphi_1(x,\ y)\|_{\varphi_1(X_0,\ X_1)}\leqslant 1$. Несложные вычисления показывают, что $\varphi_2(a^{-1},\ b^{-1})\in\varphi_2(X_0',\ X_1')$ и $\|\varphi_2(a^{-1},\ b^{-1})\|_{\varphi_2(X_0',\ X_1')}\leqslant 1$. Тогда $\|\varphi_2(a^{-1},\ b^{-1})\|_{(\varphi_1(X_0,\ X_1))'}\leqslant c_2$ в силу леммы 20. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n,\eta_n)\varphi_2(a_n^{-1},b_n^{-1})\leqslant c_2.$$

Применив теперь (43), получим $1/\varphi_1(a_n,\ b_n)\leqslant\varphi_2(a_n^{-1},\ b_n^{-1})/c_1$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n,\eta_n)/\varphi_1(a_n,b_n)\leqslant c_2/c_1.$$

Лемма 22. *Для любых чисел λ, α, $\beta > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{\varphi_1(\lambda\alpha, \lambda\beta)}{\lambda\varphi_1(\alpha, \beta)} \leqslant K,$$

где $K = c_2 / c_1$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha, \beta > 0$ и рассмотрим функцию

$$\theta(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda\alpha, \lambda\beta)}{\lambda\varphi_1(\alpha, \beta)} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

Из вогнутости функции φ_1 следует, что θ убывает на $(0, +\infty)$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{\varphi_1(n^{-1}\alpha, n^{-1}\beta)}{n^{-1}\varphi_1(\alpha, \beta)} \leqslant K \tag{44}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Применим лемму 21, положив $a_k = \alpha$, $b_k = \beta$, $\xi_k = n^{-1}\alpha$, $\eta_k = n^{-1}\beta$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ и $a_k = b_k = 1$, $\xi_k = \eta_k = 0$ при $k = n + 1, n + 2, \ldots$. Получим (44). Положим теперь для $\xi, \eta \geqslant 0$

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 \text{ при } \xi = \eta = 0 \\ (\xi + \eta)\varphi_1\left(\dfrac{\xi}{\xi + \eta}, \dfrac{\eta}{\xi + \eta}\right) \text{ при } \xi + \eta > 0. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, причем из леммы 22 следует, что $K^{-1}\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant K\varphi_1$. Тем самым φ и φ_1 эквивалентны. Теперь нетрудно показать, что $\hat{\varphi}$ и φ_2 эквивалентны, это завершает доказательство теоремы 2.

6. Доказательство теоремы 3 и пример

Напомним следующий хорошо известный факт. Пусть R банахово KN-пространство с тотальным $\bar{R}$ и с универсально монотонно полной нормой. Тогда $\|\cdot\|_R$ эквивалентна монотонной норме, являющейся одновременно универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной. Отсюда следует, что а) есть следствие b). Итак, достаточно доказать утверждение b). Положим $\psi = \hat{\varphi}$. Заметим, что $(X_i)'' = X_i$ и $\|\cdot\|_{X_i''} = \|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ (см. [1], лемма 19), поэтому ясно, что можно поменять местами X_i с X_i' и φ с ψ, т. е. достаточно доказать следующие два утверждения.

B_1) Норма $\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

B_2) Пусть $x' \in \psi(X_0', X_1')_+$, $\|x'\|_{\psi(X_0', X_1')} = \lambda$. Тогда существуют $x_i' \in (X_i')_+$ с $\|x_i'\|_{X_i'} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$, такие что

$$x' \leqslant \lambda\psi(x_0', x_1'). \tag{45}$$

В силу леммы 8 можно считать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1. Тогда B_1) прямо следует из леммы 12.

Доказываем утверждение B_2). Как и ранее полагаем $E = X_0 \times X_1$, причем

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \quad \text{для } (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда $E^* = X_0^* \times X_1^*$, причем

$$\|(f_0, f_1)\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{X_0^*}, \|f_1\|_{X_1^*}\} \quad \text{для} \quad (f_0, f_1) \in E^*.$$

Положим

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : \psi(f_0, f_1) \geqslant F_{x'}\},$$

где $F_{x'}$ есть образ x' при естественном вложении $\psi(X_0', X_1') = (\varphi(X_0, X_1))'$ в $(\varphi(X_0, X_1))^*$. В силу леммы 11 множество H непусто, выпукло и $\sigma(E^*, E)$ — замкнуто. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдем $(f_0^{(n)}, f_1^{(n)}) \in H$, такой что $\|f_i^{(n)}\|_{X^*_i} \leqslant \lambda + n^{-1}$ $(i = 0, 1)$. Пусть (f_0, f_1) есть обобщенная предельная точка последовательности $\{(f_0^{(n)}, f_1^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ в топологии $\sigma(E^*, E)$. Тогда $(f_0, f_1) \in H$. Положим $f_i' = \Pr_{\overline{X}_i} f_i$ и пусть $u_i' \in X_i'$ есть прообраз f_i' при естественном вложении X_i' в X_i^* $(i = 0, 1)$. Остается положить $x_i' = \lambda^{-1} u_i'$ $(i = 0, 1)$. Теорема 3 доказана.

В заключение приведем пример, показывающий, что *из универсальной полунепрерывности норм* $\|\cdot\|_{X_0}$, $\|\cdot\|_{X_1}$ *не следует, что норма* $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ *полунепрерывна.*

Пример. Зафиксируем какую-нибудь N-функцию $M(\xi)$, удовлетворяющую следующим двум условиям.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} M(2^n)/M(2^{n+1}) = 0$;

b) $M((1 + m^{-1}) 2^n) / M(2^{n+1}) \geqslant 1/m$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$.

Существование такой N-функции не вызывает сомнений. Теперь функцию $\varphi(\xi, \eta)$ зададим по формуле (4). За W примем K-пространство всех последовательностей вещественных чисел. За X_0 примем пространство всех $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in W$, таких что

$$\|x\|_{X_0} = \sup_n |\xi_n| / M(2^{n+1}) < +\infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n / M(2^{n+1}) = 0.$$

За X_1 примем обычное пространство l^∞ всех ограниченных последовательностей вещественных чисел с равномерной нормой. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ произвольный элемент W. Ясно *), что $x \in \varphi(X_0, X_1)$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\lambda > 0$ справедливо $\{M(|\xi_n| / \lambda)\}_{n=1}^{\infty} \in X_0$ и, если это условие выполнено, то

$$\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)} = \inf\{\lambda > 0 : \|\{M(|\xi_n| / \lambda)\}_{n=1}^{\infty}\|_{X_0} \leqslant 1\}.$$

Пусть $u = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем, что $u \in \varphi(X_0, X_1)$ и $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} = 1$. Ясно, что $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} \leqslant 1$. Допустим, что $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} \neq 1$. Тогда существует натуральное число m, такое что $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} < \dfrac{m}{m+1}$. Следовательно

$$\{M((1 + m^{-1}) 2^n)\}_{n=1}^{\infty} \in X_0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{M((1 + m^{-1}) 2^n)}{M(2^{n+1})} = 0,$$

*) См. также раздел 7.

что невозможно. Итак, $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} = 1$. Положим $u^{(n)} = (2, 2^2, \ldots, 2^n, 0, 0, \ldots)$. Ясно, что $0 \leqslant u^{(n)} \uparrow u$, причем $\|u^{(n)}\|_{\varphi(X_0, X_1)} \leqslant 0{,}5$ при всех n. Тем самым норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ не является полунепрерывной. Остается заметить, что нормы $\|\cdot\|_{X_0}$, $\|\cdot\|_{X_1}$ очевидно, универсально полунепрерывны.

7. Некоторые частные случаи основной конструкции

Пусть $M(\xi)$ и $N(\eta)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций, $\varphi(\xi, \eta)$ и $\hat{\varphi}(\xi, \eta)$ вычислены по формулам (4) и (5). Пусть W, 1, L, J имеют тот же смысл что и в разделе 2, причем на W_1 рассматриваем обычную норму KN-пространства ограниченных элементов. Наконец, пусть X есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Определение 6. Полагаем

$$X_M = \{x \in W : M(|x| / \lambda) \in X \text{ для некоторого числа } \lambda > 0\}$$

и для $x \in X_M$

$$\|x\|_{X_M} = \inf \{\lambda > 0 : M(|x|/\lambda) \in X, \quad \|M(|x|/\lambda)\|_X \leqslant 1\}.$$

Определение 7. Через X^N обозначаем множество всех $x \in W$, таких, что $J(yN(\lambda^{-1}xy^{-1})) \leqslant 1$ для некоторого числа $\lambda > 0$ и некоторого $y \in X_+$ с $\|y\|_X \leqslant 1$ и $e_x \leqslant e_y$. Через $\|x\|_{X^N}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в этом неравенстве.

Предложение 3. *Справедливы равенства*

$$X_M = \varphi(X, W_1), \quad X^N = \hat{\varphi}(X, L)$$

по запасу элементов и по норме.

Несложное доказательство предложения 3 опускаем. Теперь из теоремы 2 прямо вытекает следующее предложение.

Предложение 4. *Справедливы равенства*

$$(X_M)' = (X')^N, \quad (X^N)' = (X')_M$$

по запасу элементов, причем

$$\|\cdot\|_{(X')^N} \leqslant \|\cdot\|_{(X_M)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')^N},$$

$$\|\cdot\|_{(X')_M} \leqslant \|\cdot\|_{(X^N)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')_M}.$$

Замечание. В частности, если взять $X = L$, то $X_M = L_M$ есть обычное пространство Орлича, а $\|\cdot\|_{X_M}$ совпадает с нормой Люксембурга в нем (см. ([5]), стр. 95). Таким образом пространство Орлича $L_M = \varphi(L, W_1)$.

Поступила в редакцию
28 сентября 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах, Сиб. матем. ж., X, № 3 (1969), 584—599.
2. Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах II, Сиб. матем. ж., XII, № 3 (1971), 582—587.
3. Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах III, Сиб. матем. ж., XIII, № 6 (1972), 1304—1313.
4. Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia math., 24, № 2 (1964), 113—190.
5. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958.
6. Лозановский Г. Я., О банаховых структурах и вогнутых функциях, Докл. АН СССР, 199, № 3 (1971), 536—539.
7. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.
8. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я., О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах. Матем. Сб., 84 (126), № 3 (1971), 331—352.
9. Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, ИЛ, М., 1961.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 7 (158)

УДК 513.83

Г. Я. Лозановский

О НОРМАЛЬНЫХ МЕРАХ НА ПРОИЗВЕДЕНИИ БИКОМПАКТОВ И ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ В. И. ПОНОМАРЕВА

I. Формулировки результатов

Под бикомпактом понимается бикомпактное хаусдорфово пространство. Регулярная борелевская мера[1] μ на бикомпакте B называется *нормальной*, если $\mu(K)=0$ для любого замкнутого нигде не плотного множества K в B.

Теорема. *Пусть B_1 и B_2 суть произвольные бикомпакты, не содержащие изолированных точек. Тогда на их топологическом произведении $B_1\times B_2$ не существует ненулевой нормальной меры.*

Этот результат был анонсирован в [2].

В. И. Пономаревым на третьем Тираспольском симпозиуме по общей топологии и ее приложениям [3] был поставлен ряд проблем, одна из которых (проблема 21) заключается в следующем: *построить наивный пример бикомпакта без изолированных точек, квадрат которого несоабсолютен ему.* Из нашей теоремы мгновенно следует полное решение проблемы В. И. Пономарева. Именно, таким бикомпактом является любой бикомпакт, не содержащий изолированных точек, на котором существует ненулевая нормальная мера (напомним, что между нормальными мерами на бикомпакте и на его абсолюте существует естественное взаимно однозначное соответствие).

Напомним теперь следующий хорошо известный факт[2]. Пусть B — произвольный бикомпакт, в котором всякое множество первой категории нигде не плотно. Если на B существует регулярная борелевская мера, носитель которой есть все B, то на B существует и нормальная мера, носитель которой также есть все B. Поэтому из нашей теоремы вытекают следующие результаты.

Следствие 1. *Пусть для $i=1, 2$ B_i есть произвольный бикомпакт без изолированных точек, причем на B_i существует регулярная борелевская мера, носитель которой есть все B_i. Тогда в $B_1\times B_2$ существует всюду плотное множество первой категории.*

Следствие 2. *Пусть B_1 и B_2 суть произвольные гиперстоуновы бикомпакты без изолированных точек. Тогда в $B_1\times B_2$ существует всюду плотное множество первой категории*[3].

II. Доказательство теоремы

Пусть B — произвольный бикомпакт. Через $C(B)$ обозначаем банахову решетку всех вещественных непрерывных функций на B. Через $\mathfrak{B}(B)$ обозначаем совокупность всех борелевских, а через $\mathfrak{B}_\sigma(B)$ — совокупность всех бэровских подмножеств в B. Через $\mathfrak{M}(B)$ обозначаем совокупность всех (неотрицательных)

[1] В терминологии из теории меры мы следуем [1].

[2] Он, по существу, содержится, напр., в [4].

[3] Напомним в связи с этим, что в гиперстоуновом бикомпакте всякое множество первой категории нигде не плотно (см. [4]).

регулярных борелевских мер на B, через $\mathfrak{M}_\sigma(B)$ — совокупность всех (неотрицательных) бэровских мер на B. Для $\mu \in \mathfrak{M}(B)$ через $\operatorname{supp}(\mu)$ обозначаем носитель μ, т. е. дополнение наибольшего открытого множества U из B, обладающего тем свойством, что $\mu(U)=0$. Для $\mu \in \mathfrak{M}(B)$ через μ^* обозначаем сужение μ на $\mathfrak{B}_\sigma(B)$. Для $\nu \in \mathfrak{M}_\sigma(B)$ через $\hat{\nu}$ обозначаем ту единственную $\mu \in \mathfrak{M}(B)$, для которой $\mu^*=\nu$. Через $\mathfrak{M}^n(B)$ обозначаем совокупность всех нормальных мер на B, через $\mathfrak{M}^s(B)$ — совокупность всех таких $\mu \in \mathfrak{M}(B)$, что $\operatorname{supp}(\mu)$ нигде не плотен в B.

Следующие три леммы хорошо известны из теории векторных решеток.

Лемма 1. *Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}^n(B)$, $\mu \neq 0$. *Тогда* $\operatorname{supp}(\mu)$ *содержит непустое открытое множество. Более того,* $\operatorname{supp}(\mu)$ — *регулярное замкнутое множество т. е. оно совпадает с замыканием своей внутренности.*

Лемма 2. *Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}^n(B)$, A *есть регулярное замкнутое подмножество в* B, $A \subset \operatorname{supp}(\mu)$. *Построим* $\nu \in \mathfrak{M}^n(A)$, *положив* $\nu(E)=\mu(E)$ для $E \in \mathfrak{B}(A)$. *Тогда* $\operatorname{supp}(\nu)=A$.

Лемма 3. *Пусть бикомпакт* B *обладает следующим свойством: множество* $U\{\operatorname{supp}(\mu): \mu \in \mathfrak{M}^n(B)\}$ *плотно в* B. *Тогда каждая* $\mu \in \mathfrak{M}(B)$ *допускает единственное разложение* $\mu=\mu_n+\mu_s$, *где* $\mu_n \in \mathfrak{M}^n(B)$, $\mu_s \in \mathfrak{M}^s(B)$.

Далее нам понадобится следующий результат о произведениях пространств с мерой, принадлежащий Эрдешу и Окстоби [5] (см. также [6], с. 277, упр. 2).

Лемма 4. *Пусть для* $i=1, 2$ (T_i, Σ_i, μ_i) *есть пространство с вполне конечной безатомной мерой и пусть* $(T, \Sigma, \mu)=(T_1, \Sigma_1, \mu_1)\times(T_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — *их произведение. Тогда существует такое* $A \in \Sigma$, *что* $\mu(A)>0$ *и из* $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$, $\mu((A_1 \times A_2)\setminus A)=0$ *следует* $\mu_1(A_1)=0$ *или* $\mu_2(A_2)=0$.

Будем доказывать теорему от противного. Допустим, что существуют такие бикомпакты B_1 и B_2 без изолированных точек, что на $B=B_1\times B_2$ существует ненулевая $\mu \in \mathfrak{M}^n(B)$. В силу лемм 1 и 2 можно считать, что $\operatorname{supp}(\mu)=B$. Действительно, если это не так, то вместо B_1 и B_2 можно рассмотреть их непустые регулярные замкнутые подмножества A_1 и A_2, такие что $A_1 \times A_2 \subset \operatorname{supp}(\mu)$, и заменить μ ее сужением на $\mathfrak{B}(A_1 \times A_2)$.

Итак, пусть $\mu \in \mathfrak{M}^n(B)$, $\operatorname{supp}(\mu)=B$. Положим

$$\mu_1(E)=\mu(E\times B_2),\ E \in \mathfrak{B}(B_1),\quad \mu_2(F)=\mu(B_1 \times F),\ F \in \mathfrak{B}(B_2).$$

Ясно, что $\mu_1 \in \mathfrak{M}^n(B_1)$, $\mu_2 \in \mathfrak{M}^n(B_2)$, $\operatorname{supp}(\mu_1)=B_1$, $\operatorname{supp}(\mu_2)=B_2$. Напомним, что $(B, \mathfrak{B}_\sigma(B))=(B_1, \mathfrak{B}_\sigma(B_1))\times(B_2, \mathfrak{B}_\sigma(B_2))$ (см. [1], с. 217). Положим $m=\mu_1^* \times \mu_2^*$. Тогда $m \in \mathfrak{M}_\sigma(B)$, причем $\operatorname{supp}(\hat{m})=B$. Пусть $\hat{m}=\hat{m}_n+\hat{m}_s$, где $\hat{m}_n \in \mathfrak{M}^n(B)$, $\hat{m}_s \in \mathfrak{M}^s(B)$; существование такого разложения следует из леммы 3. Пусть U — произвольное непустое открытое множество в B. Покажем, что $\hat{m}_s(U)>0$.

Найдутся такие непустые открытые бэровские множества U_1 и U_2 в B_1 и B_2, соответственно, что $U_1 \times U_2 \subset U$. Положим $\Sigma=\{A \in \mathfrak{B}_\sigma(B): A \subset U_1 \times U_2\}$, $\Sigma_i=\{A \in \mathfrak{B}_\sigma(B_i): A \subset U_i\}$ $(i=1, 2)$. Через ν, ν_1, ν_2 обозначим, соответственно, сужения мер m, μ_1^*, μ_2^* на Σ, Σ_1, Σ_2. Ясно, что $(U_1 \times U_2, \Sigma, \nu)=(U_1, \Sigma_1, \nu_1)\times(U_2, \Sigma_2, \nu_2)$. Применим теперь лемму 4. В силу этой леммы найдется такое $V \in \Sigma$, что $\nu(V)>0$ и из $V_1 \in \Sigma_1$, $V_2 \in \Sigma_2$, $\nu((V_1 \times V_2)\setminus V)=0$ следует $\nu_1(V_1)=0$ или $\nu_2(V_2)=0$, т. е. одно из множеств V_1, V_2 нигде не плотно. Так как $m(V)=\nu(V)>0$, то в силу регулярности бэровской меры найдется такое замкнутое бэровское множество T в B, что $T \subset V$ и $m(T)>0$. Но T нигде не плотно в B, ибо T замкнуто и содержится в V. Следовательно, $\hat{m}_n(T)=0$, откуда $\hat{m}_s(T)>0$. Поэтому $\hat{m}_s(U)>0$.

Итак, $\hat{m}_s(U) > 0$ для любого непустого открытого множества U в B. Тем самым $\operatorname{supp}(\hat{m}_s) = B$, что противоречит самому определению множества $\mathfrak{M}^s(B)$. Противоречие получено, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. Р. Теория меры. М., ИИЛ, 1953.
2. Лозановский Г. Я. О нормальных мерах на произведении бикомпактов. Третий Тираспольский симпозиум по общ. топологии и ее прилож. Кишинев, 1973, с. 64—65.
3. Пономарев В. И. О проблематике в теории топологических пространств. Третий Тираспольский симпозиум по общ. топологии и ее прилож. Кишинев, 1973, с. 100—102.
4. Kelley J. L. Measures on Boolean algebras. Pacif. J. Math., v. 9, № 4, 1959, p. 1165—1177.
5. Erdös P., Oxtoby J. C. Partitions of the plane into sets having positive measure in every nonnull measurable product set. Trans. Amer. Math. Soc., v. 79, № 1, 1955, p. 91—102.
6. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М., „Наука", 1969.

г. Ленинград

Поступила
16 X 1973

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Григорий Яковлевич ЛОЗАНОВСКИЙ

БАНАХОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(01.01.01—Теория функций и функциональный анализ)

*Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук*

Диссертация написана на русском языке

Ленинград—1973

Дорогому автору —
на память от В. Судакова,
изучившего уже много лишних слов.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А.А.ЖДАНОВА

Математико-механический факультет

На правах рукописи

Григорий Яковлевич Лозановский

БАНАХОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(01.01.01 – Теория функций и функциональный анализ)

Автореферат диссертации
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Диссертация написана на русском языке

Ленинград – 1973

Работа выполнена на кафедре высшей математики ЛВИКА имени А.Ф.Можайского.

Официальные оппоненты:

- академик Академии Наук УзССР доктор физико-математических наук профессор Т.А.САРЫМСАКОВ,

- доктор физико-математических наук профессор П.П.ЗАБРЕЙКО,

- доктор физико-математических наук профессор Д.А.РАЙКОВ.

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Воронежский государственный университет.

Автореферат разослан " " 1973 г.

Защита диссертации состоится " " 1973 г. в 17 часов на заседании Учёного Совета математико-механического факультета ЛГУ имени А.А.Жданова (Ленинград, В.О., 10-я линия, дом 33).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ЛГУ.

УЧЁНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Подписано к печати 5.I.73 Печ.листов 1,5 Уч.-изд.листов 1,25
Зак.2254 Бесплатно Ротапринт М-05016

Типография ВИКА имени А.Ф. Можайского

Теория линейных полуупорядоченных пространств, иначе - теория линейных структур, является одним из основных разделов функционального анализа. Эта теория была построена в работах Л.В.Канторовича, относящихся к 1935-1937 гг. В дальнейшем она получила плодотворное развитие в работах ленинградской школы полуупорядоченных пространств (Б.З.Вулих, А.Г.Пинскер, А.И.Юдин, Г.П.Акилов, А.И.Векслер и их ученики; сюда же примыкают работы В.И.Соболева из Воронежа). Из иностранных учёных большую роль в развитии теории линейных структур сыграли, главным образом, японские (Х.Накано, Т.Огасавара, И.Амемия, Т.Андо, К.Иосида, С.Какутани), а также американские (М.Стоун, Г.Биркгоф и др.). Значительное влияние на развитие теории оказали также работы голландского математика Г.Фрейденталя и венгерского математика Ф.Рисса.

К теории линейных структур тесно примыкают исследования М.Г.Крейна о нормированных пространствах с выделенным в них конусом положительных элементов, начатые во второй половине тридцатых годов и продолженные в воронежской школе (М.А.Красносельский и его ученики). Отметим также исследования по теории топологических полуполей, интенсивно проводившиеся, начиная с конца пятидесятых годов (М.Я.Антоновский, В.Г.Болтянский, Т.А.Сарымсаков и их ученики).

Важнейшей частью теории линейных структур (по крайней мере, с точки зрения классического функционального анализа) является теория банаховых структур. Дело не только в том, что многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются банаховыми структурами, но и в том, что аксиоматика теории банаховых структур достаточно гибка и богата, а её аппарат достаточно разработан для того, чтобы эта теория могла служить мощным средством исследования указанных пространств.

Настоящая диссертация посвящена теории банаховых структур. В ней изучаются следующие вопросы: функции от элементов линейной структуры и реализация пространств регулярных функционалов (гл.I); преобразования банаховых структур с помощью вогнутых функций (гл.II); строение и линейно-топологические свойства банаховых структур (гл.III); строение и свойства пространства, сопряжённого к банаховой структуре, а также некоторых его подпространств (гл.IУ). В конце диссертации имеется приложение, посвящённое интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s}X_1^s$.

Основному тексту предшествует гл.0 "Предварительные сведения, терминология, обозначения".

В диссертации используется терминология монографии [1], которая несколько отличается от терминологии более ранней монографии [2]. Мы приведём здесь в удобной для нас форме некоторые сведения из теории полуупорядоченных пространств, необходимые для понимания основных результатов, отсылая за подробностями к [1].

К-ЛИНЕАЛОМ называется векторная структура (другие названия: векторная решётка, пространство Рисса). К-ПРОСТРАНСТВОМ (K_σ-ПРОСТРАНСТВОМ) называется К-линеал, в котором всякое (всякое счётное) ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю границу.

Пусть X - К-линеал. Элементы $x, y \in X$ называются ДИЗЪЮНКТНЫМИ (обозначение: $x d y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. ДИЗЪЮНКТНЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ произвольного $E \subset X$ называется $E^d = \{x \in X :$

$: x d y$ для любого $y \in E\}$. КОМПОНЕНТОЙ в X называется всякое $Y \subset X$, являющееся дизъюнктным дополнением какого-нибудь $E \subset X$. Через $\mathfrak{A}(X)$ обозначается булева алгебра всех компонент в X. Линейное подмножество Y в X называется ИДЕАЛОМ или НОРМАЛЬНЫМ ПОДЛИНЕАЛОМ в X, если $\forall x \in X \, \forall y \in Y (|x| \leq |y| \Rightarrow x \in Y)$. Идеал Y в X называется ФУНДАМЕНТОМ, если $Y^d = \{0\}$. Для $u \in X$ через X_u обозначается наименьший идеал в X, содержащий u. Если $x \in X, K \in \mathfrak{A}(X)$ и x можно представить в виде $x = y + z$, где $y \in K, z d K$, то y называется ПРОЕКЦИЕЙ x на K и обозначается $Pr_K x$. ОСКОЛКОМ произвольного $x \in X$ называется всякий $x' \in X$, являющийся проекцией x в какую-нибудь $K \in \mathfrak{A}(X)$. Элемент $x \in X$ называется элементом СЧЁТНОГО ТИПА, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счётно. X называется К-линеалом СЧЁТНОГО ТИПА, если все его элементы счётного типа. ЕДИНИЦЕЙ или СЛАБОЙ ЕДИНИЦЕЙ в X называется всякий $u \in X_+$, такой что $x \wedge u > 0$ для любого $x > 0$ $(x \in X)$.

Для произвольного архимедова К-линеала X через $\hat{X}$ обозначается его К-ПОПОЛНЕНИЕ по Дедекинду-Юдину (см. [1], стр.125-130), которое получается обычным методом сечений.

К-пространство называется РАСШИРЕННЫМ, если в нём всякое множество попарно дизъюнктных элементов ограничено.

МАКСИМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ произвольного К-пространства X мы будем обозначать через $\mathfrak{m}(X)$; $\mathfrak{m}(X)$ есть расширенное К-пространство, содержащее X в качестве фундамента (см. [1], стр.159).

Пусть Q – экстремально несвязный бикомпакт. Через $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех вещественных непрерывных функций на Q, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$; напомним, что $C_\infty(Q)$ есть расширенное К-пространство. Обратно, всякое расширенное К-пространство W допускает представление в виде $C_\infty(Q)$, где Q есть стоунов бикомпакт булевой алгебры $\mathfrak{U}(W)$ (см. [1], гл.У); это даёт возможность для любых $x, y \in W$ определить произведение $xy \in W$.

Сопряжённое к нормированному пространству E обозначается E^*.

KN-ЛИНЕАЛОМ (КВ-ЛИНЕАЛОМ) называется К-линеал, являющийся нормированным (банаховым) пространством, в котором $\forall x, y \in X (|x| \le |y| \Rightarrow \|x\| \le \|y\|)$. KN-ПРОСТРАНСТВОМ ($K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВОМ) называется KN-линеал, являющийся К-пространством (K_σ-пространством).

Норма в KN-линеале X называется НЕПРЕРЫВНОЙ, если

$$(A) \qquad (x_n \downarrow 0) \Longrightarrow (\|x_n\| \to 0);$$

МОНОТОННО ПОЛНОЙ, если

$$(B) \qquad (0 \le x_n \uparrow,\ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| < \infty) \Longrightarrow (\text{существует } \sup x_n \in X);$$

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ, если

$$(C) \qquad (0 \le x_n \uparrow x \in X) \Longrightarrow (\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|).$$

Заменив в $(A), (B), (C)$ последовательности направлениями, получим условия $(A'), (B'), (C')$, называемые условиями УНИВЕРСАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ, УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОНОТОННОЙ

ПОЛНОТЫ И УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ нормы, соответственно.

КВ-ПРОСТРАНСТВОМ или пространством Канторовича-Банаха называется KN-пространство, удовлетворяющее условиям (A) и (B).

Норма в КВ-пространстве L называется АДДИТИВНОЙ, если $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ для $x, y \in L_+$. При этом функционал $J(x) = \|x_+\| - \|x_-\|, x \in L$ будем называть функционалом, задающим норму на L.

Пусть X – произвольный К-линеал. Через $\tilde{X}$ обозначается пространство всех РЕГУЛЯРНЫХ функционалов на X, то есть функционалов, представимых в виде разности двух линейных положительных функционалов. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫМ, если из того, что направление $x_\alpha \downarrow 0$ в X вытекает, что $f(x_\alpha) \to 0$. Через $\bar{X}$ обозначается пространство всех вполне линейных функционалов на X. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНОРМАЛЬНЫМ, если он аннулируется на некотором фундаменте в X. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНТИНОРМАЛЬНЫМ, если он дизъюнктен $\bar{X}$. Через $\tilde{X}_{an}$ ($\tilde{X}_{ant}$) обозначается пространство всех анормальных (антинормальных) функционалов на X. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{an} = \tilde{X}_{an} \cap X^*$, $X^*_{ant} = \tilde{X}_{ant} \cap X^*$.

Особо остановимся на представлении вполне линейных функционалов. Пусть W – расширенное К-пространство с фиксированной единицей, в котором существует фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Пусть X –

произвольный идеал в W ; W_X - компонента в W , порождённая X . Пространство $X' = \{x' \in W_X : xx' \in L$ для любого $x \in X\}$ называется ДУАЛЬНЫМ пространством к X . По каждому $x' \in X'$ можно построить $f_{x'} \in \bar{X}$, положив $f_{x'}(x) = J(xx')$, $x \in X$. Отображение $x' \longrightarrow f_{x'}$ есть изоморфизм X' на $\bar{X}$. Если X вдобавок банахово КN -пространство, то формула $\|x'\|_{X'} = \sup\{J(|xx'|) : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$ определяет норму $\|\cdot\|_{X'}$ на X' , называемую ДУАЛЬНОЙ нормой по отношению к $\|\cdot\|_X$.

Переходим к изложению основных результатов диссертации.

В § 1 гл.1 изучаются ФУНКЦИИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ архимедова К-линеала. Это понятие было введено Л.В.Канторовичем. Оно является абстрактным аналогом понятия суперпозиции функций и играет важную роль как в самой теории линейных структур, так и, в особенности, в её приложениях. Например, оно, по существу, используется в теории меры и в теории операторов. Это понятие исследовалось, в частности, в [1], [2] и в работах М.Ф.Широхова, причём даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. Мы даём новое определение функции от элементов архимедова К-линеала, которое общее известных ранее и, как нам кажется, проще и более приспособлено для приложений. Приведём наше определение для важнейшего случая (К-пространство - расширенное, функция - бэровская). Пусть W - расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, f - бэровская функция на R^n . Не умаляя общности, можно считать, что $W = C_\infty(Q)$, где Q - экстремально несвязный бикомпакт, $\mathbb{1}$ - функция, тождественно равная единице на Q . Фиксируем любые $x_1, x_2, \dots, x_n \in C_\infty(Q)$. Мы доказываем, что существует единственный $x \in C_\infty(Q)$, такой что $x(q) = f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q))$ для всех $q \in Q$, кроме, может быть, некоторого множества первой категории из Q . Теперь полагаем $f(x_1, \dots, x_n) \overset{def}{=} x$. Тем самым, при нашем определении ВСЯКОЕ РАСШИРЕННОЕ К-ПРОСТРАНСТВО W ЗАМКНУТО ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ БЭРОВСКОЙ ФУНКЦИИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ из W ; при прежних определениях функции от элементов К-линеала это имело место лишь при некоторых ограничениях на W . В этом же параграфе получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный архимедов К-линеал X был замкнут относительно операции взятия непрерывной положительно однородной функции от элементов из X ; заметим, что Б.З.Вулихом, исследовавшим этот вопрос, найдены лишь достаточные условия.

В § 2 гл.1 строится реализация пространств регулярных функционалов. Напомним, что для любого КВ-линеала E справедливо $E^* = \tilde{E}$, поэтому построенная нами реализация пространства $\tilde{X}$ для произвольного К-пространства X является, в частности, и реализацией пространства E^* для произвольного банахова КN -пространства E . Уже отмечалось, что пространство $\bar{X}$ допускает простое представление в виде дуального пространства X' . Вопрос же о сколько-нибудь "удобном" представлении пространства $\tilde{X}$ существенно более труден. До сих пор, насколько нам известно, такое представление было получено лишь для пространств X очень специального типа (см., например, работы Н.Гретски и М.М.Рао), причём методами, принципиально не допускающими обобщения на случай произвольного K-пространства X. Опишем теперь вкратце нашу реализацию. Пусть W – расширенное K-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, M – идеал ограниченных элементов в нём, X и Y – любые идеалы в W. Для $f\in\tilde{X}, u\in X_+$ полагаем $f_{(u)}(x)=f(xu), x\in M$. Ясно, что $f_{(u)}\in\tilde{M}$. Произвольные $f\in\tilde{X}, g\in\tilde{Y}$ будем называть ДИЗЪЮНКТНЫМИ (обозначение fDg), если $f_{(u)}, g_{(v)}$ дизъюнктны в обычном смысле как элементы K-пространства $\tilde{M}$ для любых $u\in X_+, v\in Y_+$. Подчеркнём, что о дизъюнктности f и g в обычном смысле говорить нельзя, ибо они не являются элементами одного и того же K-пространства. Зафиксируем теперь в $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ произвольные единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно).

Теорема 1.2.20. СУЩЕСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННАЯ ПАРА (R_X, V_X), где V_X – КОМПОНЕНТА в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, а R_X – ИЗОМОРФИЗМ K-ПРОСТРАНСТВА $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ НА V_X, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ УСЛОВИЯМ:

1) ДЛЯ ЛЮБЫХ $f\in\tilde{X}$ И $g\in\tilde{M}$ СООТНОШЕНИЯ fDg И $R_X f d g$ РАВНОСИЛЬНЫ (заметим, что здесь $R_X f$ и g суть элементы одного и того же K-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно говорить об их дизъюнктности в обычном смысле);

2) $$R_X(\mathbb{1}_1)=\mathrm{Pr}_{V_X}\mathbb{1}_2.$$

Оператор R_X будем называть КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пространства $\tilde{X}$.

Теорема 1.2.22. ПУСТЬ $f\in\tilde{X}$. ТОГДА КОМПОНЕНТА В $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, ПОРОЖДЁННАЯ ЭЛЕМЕНТОМ $R_X f$, СОВПАДАЕТ С КОМПОНЕНТОЙ, ПОРОЖДЁННОЙ МНОЖЕСТВОМ $\{f_{(u)} : u\in X_+\}$.

Теорема 1.2.23. ДЛЯ ЛЮБЫХ $f\in\tilde{X}, g\in\tilde{Y}$ СПРАВЕДЛИВО

$$(fDg)\Longleftrightarrow(R_X f d R_Y g).$$

Итак, рассматривая различные идеалы в одном и том же K-пространстве W, мы смогли погрузить соответствующие пространства регулярных функционалов в одно K-пространство $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщённом смысле (D), переходят при погружении в элементы, дизъюнктные в обычном смысле.

В гл.II исследуется важная конструкция преобразования банаховых структур посредством вогнутых функций, введённая (для случая пространств измеримых функций) Кальдероном [3], и являющаяся широким обобщением известной конструкции пространств Орлича. Несмотря на довольно специальный характер, эта конструкция (по мнению автора диссертации) является весьма полезным средством исследования банаховых структур, особенно в тех ситуациях, когда одновременно рассматриваются несколько банаховых KN-пространств, являющихся идеалами в одном и том же K-пространстве. Наш метод исследования указанной конструкции принципиально отличается от метода Кальдерона: метод Кальдерона основан на теории аналитических функций, а наш – на теории полуупорядоченных пространств, в особенности, на аппарате канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанном в гл.I.

Гл.II состоит из восемнадцати параграфов; в §§ 1-6 приведены формулировки основных результатов, а в §§ 7-18 – их доказательства.

На протяжении всей главы П W есть произвольное расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$; M - идеал ограниченных элементов в нём; X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся идеалами в W ; s - произвольное число, такое что $0<s<1$.

В § 1 гл.П приведены основные определения и простейшие следствия из них. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначаем множество всех вещественных, непрерывных, вогнутых функций $\varphi(\xi,\eta)$ при $\xi,\eta\geq 0$, удовлетворяющих условиям: $\varphi(\xi,0)=\varphi(0,\eta)=0$ при $\xi,\eta\geq 0$; $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi(\xi,\alpha)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta,\eta)=+\infty$ при $\xi,\eta>0$. Через $\mathfrak{A}_2^0$ обозначаем множество всех положительно однородных функций из $\mathfrak{A}_2$.

Пусть $\varphi\in\mathfrak{A}_2$. Через $\varphi(X_0,X_1)$ обозначаем множество всех $x\in W$, таких что $|x|\leq\lambda\varphi(|x_0|,|x_1|)$ для некоторого $\lambda\in[0,+\infty)$ и каких-нибудь $x_i\in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i}\leq 1$ $(i=0,1)$. Через $\|x\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. Так, построенное пространство $(\varphi(X_0,X_1),\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)})$ есть банахово KN-пространство и идеал в W . Если $\varphi(\xi,\eta)=\xi^{1-s}\eta^s$, то вместо $\varphi(X_0,X_1)$ пишем $X_0^{1-s}X_1^s$.

В § 2 гл.П строятся банахово сопряжённое и дуальное пространства к $X_0^{1-s}X_1^s$. Зафиксируем произвольно единицы в пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{M}), \mathfrak{M}(X_0^*), \mathfrak{M}(X_1^*)$ и отождествим пространства X_0^*, X_1^* с их образами в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ при соответствующих канонических реализациях. Теперь X_0^*, X_1^* суть идеалы в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно образовать пространство $(X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$ точно так же как пространство $X_0^{1-s}X_1^s$ строится из пространств X_0 и X_1 . ТОГДА (см.теорему 2.2.8) в $\mathfrak{M}((X_0^{1-s}X_1^s)^*)$ ЕДИНИЦУ МОЖНО ВЫБРАТЬ ТАК, ЧТО ПОСЛЕ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ С ЕГО ОБРАЗОМ В $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ ПРИ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ, РАВЕНСТВО $(X_0^{1-s}X_1^s)^*=(X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$ БУДЕТ ИМЕТЬ МЕСТО ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ И ПО НОРМЕ. Заметим, что в работе Кальдерона [3] с помощью векторнозначных аналитических функций получено некоторое представление пространства $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ через X_0^* и X_1^* , но лишь при довольно тяжёлых ограничениях на X_0 и X_1 (в частности, требуется, чтобы $X_0\cap X_1$ было плотно в $X_0^{1-s}X_1^s$); в нашей же теореме 2.2.8 никаких ограничений на X_0 и X_1 не накладывается.

Далее, говоря о результатах гл.П, всюду будем считать, что в W существует фундамент L , являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой (J обозначает функционал, задающий норму на L).

Теорема 2.2.12. РАВЕНСТВО $(X_0^{1-s}X_1^s)'=(X_0')^{1-s}(X_1')^s$ ИМЕЕТ МЕСТО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Подчеркнём, что в этой теореме на X_0 и X_1 также не накладывается никаких ограничений.

В § 3 гл.П рассматривается частный случай основной конструкции - степенное преобразование нормы. Пусть X есть произвольное банахово KN-пространство, p - произвольное число, такое что $1<p<+\infty$. Зафиксируем в $\mathfrak{M}(X)$ произвольную единицу и положим $X_p=\{x\in\mathfrak{M}(X):|x|^p\in X\}$ и $\|x\|_{X_p}=(\||x|^p\|_X)^{\frac{1}{p}}$ для $x\in X_p$.

В теореме 2.3.4 приведены некоторые свойства пространства X_p ; в частности, ПРОСТРАНСТВО $(X_p)^{**}$ АЛГЕБРАИЧЕСКИ И порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X^*})_p$, где $\overline{X^*}$ есть пространство вполне линейных функционалов на X^*, и $(\overline{X^*})_p$ получается из $\overline{X^*}$ точно так же как X_p получается из X.

В § 4 гл.II изучаются пространства $\varphi(X_0,X_1)$ для произвольной $\varphi\in\mathfrak{A}_2$. В теореме 2.4.2 приводятся некоторые полезные свойства пространства $\varphi(X_0,X_1)$ для случая, когда $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$; например, если нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$ универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны, то этими же двумя свойствами обладает и норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$.

Пара функций (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$, называется согласованной, если

$$((\varphi_1(X_0,X_1))',\|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'})=(\varphi_2(X_0',X_1'),\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')})$$

при всевозможных $W,\mathbb{1}(W),L,X_0,X_1$.

Пара функций (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$, называется слабо согласованной, если равенство

$$(\varphi_1(X_0,X_1))'=\varphi_2(X_0',X_1')$$

имеет место по запасу элементов при всевозможных $W,\mathbb{1}(W),L,$ X_0,X_1.

Оказывается (теорема 2.4.5), что все согласованные пары суть $\varphi_1(\xi,\eta)=A\xi^{1-s}\eta^s$, $\varphi_2(\xi,\eta)=A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s$, где $A\in(0,+\infty)$, $s\in(0,1)$ – любые.

Слабо согласованных пар существенно больше. Это те и только те пары, которые в определённом смысле эквивалентны парам вида $(\varphi,\hat{\varphi})$, где $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$ – произвольна, а

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)},\quad \xi,\eta\in[0,+\infty)$$

(см.теорему 2.4.6).

В § 5 гл.II содержатся приложения результатов § 2 гл.II к общей теории банаховых структур. Пусть X есть произвольное банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Теорема 2.5.1. Для любых $f\in X^*_{ant}$ и $g\in(X')^*_{ant}$ справедливо $f\,\mathrm{D}\,g$, то есть f и g дизъюнктны в обобщённом смысле.

Теорема 2.5.3. 1) Для любого $z\in L$ и любого числа $\varepsilon>0$ найдутся такие $x\in X, x'\in X'$, что $z=xx'$ и

$$\|z\|_L\geq(1-\varepsilon)\|x\|_X\cdot\|x'\|_{X'}.$$

2) Если норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна, то утверждение 1) допускает следующее усиление: для любого $z\in L$ найдутся такие $x\in X, x'\in X'$, что $z=xx'$ и $\|z\|_L=\|x\|_X\cdot\|x'\|_{X'}$.

В связи с теоремой 2.5.3 заметим, что, если $z\in L$, $x\in X, x'\in X'$ и $z=xx'$, то $\|z\|_L\leq\|x\|_X\cdot\|x'\|_{X'}$ тривиальным образом.

Наконец, отметим следующий результат (см.теорему 2.5.5 и замечание 2.5.6): всякое банахово KN-пространство X, являющееся фундаментом в пространстве $S[0,1]$ всех (классов) конечных измеримых функций на $[0,1]$, путём умножения на некоторую "весовую" функцию можно превратить в пространство "зажатое" между $L^\infty[0,1]$ и $L^1[0,1]$. Точнее говоря, найдётся $y\in S[0,1]$, $y>0$, такой что $L^\infty[0,1]\subset\{xy: x\in X\}\subset L^1[0,1]$.

В § 6 гл.II приведены два результата о банаховых пространствах с безусловными базисами, которые являются следствиями теоремы 2.5.3. Сформулируем один из них. Пусть E есть банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$ и пусть $\{f_k\}$ – биортогональная с $\{e_k\}$ система в E^*. Тогда (теорема 2.6.1) существует константа $c>0$, обладающая следующим свойством: для любой числовой последовательности $\lambda=\{\lambda_k\}\in\ell^1$ найдутся числовые последовательности $\{u_k\},\{v_k\}$, такие что 1) $u_k v_k=\lambda_k$ при всех k; 2) ряды $\sum_k u_k e_k, \sum_k v_k f_k$ сходятся по нормам пространств E и E^* к некоторым $x\in E$ и $f\in E^*$; 3) справедливо неравенство $\|\lambda\|_{\ell^1}\geq c\|x\|_E\cdot\|f\|_{E^*}$.

Переходим к главе III. Хорошо известно, что банахова топология КВ-линеала полностью определяется имеющимся в нём частичным упорядочением. Точнее говоря, любые две монотонные банаховы нормы, заданные на одном и том же К-линеале, – эквивалентны, то есть определяемые ими топологии совпадают (теорема Х.Накано). Напротив, банахова топология КВ-линеала несёт мало информации об его остальных свойствах. Дело в том, что если некоторое банахово пространство можно превратить в КВ-линеал путём введения в нём частичного упорядочения и эквивалентной перенормировки, то такое превращение обычно неединственно. Например, бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство можно превратить как в $L^2[0,1]$, так и в ℓ^2. Тем не менее, некоторые свойства частичного упорядочения в КВ-линеале всё же полностью определяются его банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является теорема

Огасавары: КВ-линеал является КВ-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон (напомним, что банахово пространство называется слабо секвенциально полным, если всякая слабо фундаментальная последовательность его элементов оказывается слабо сходящейся). Полученные нами в указанном направлении результаты и составляют содержание гл.III. Всюду в этой главе термины "изоморфизм" и "подпространство" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств.

В §1 гл.III показано, что непрерывность нормы (условие (A)) в банаховом $K_\sigma N$-пространстве есть линейно-топологическое свойство. Именно, справедлива

Теорема 3.1.2. Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) В X выполнено условие (A);

(б) В X выполнено условие (u) Пелчиньского (см. [4]), то есть для любой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ в X существует такая последовательность $\{y_n\}$ в X, что $\sum_{n=1}^{\infty}|f(y_n)|<\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ для любого $f\in X^*$;

(в) В X нет подпространств изоморфных пространству ℓ^∞;

(г) В X нет подпространств изоморфных пространству $C[0,1]$;

(д) В X нет подпространств изоморфных пространству Джеймса J (см. [5], стр.123).

Заметим, что эквивалентность $(a)\Longleftrightarrow(б)$ приведена в работе Андо [6], но доказательство Андо содержит принципиальную ошибку.

Отметим также следующий результат этого параграфа: ВСЯКОЕ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО X, В КОТОРОМ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A), НО НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (B), НЕ ИЗОМОРФНО НИКАКОМУ СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ (теорема 3.1.8). Из теоремы 3.1.8 следует, в частности, что пространство Орлича E_M в случае, когда N-функция $M(\xi)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, не изоморфно никакому сопряжённому банахову пространству (в терминологии из теории пространств Орлича мы следуем [7]); точно также и пространство Марцинкевича $M_0(\psi)$ не изоморфно никакому сопряжённому банахову пространству (определение пространства $M_0(\psi)$ см., например, в [8]).

В § 2 гл.III доказана

Теорема 3.2.1. ПУСТЬ X - БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ $\bar{X}$. В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) X - СЧЁТНОГО ТИПА;

(б) В X НЕТ ПОДПРОСТРАНСТВА ИЗОМОРФНОГО ПРОСТРАНСТВУ l^∞_H, ГДЕ H ЕСТЬ МНОЖЕСТВО МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА;

(в) СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЕ МНОЖЕСТВО $\pi\subset X^*$, ЧТО π ТОТАЛЬНО НА X И ДЛЯ ЛЮБОГО $x\in X$ МНОЖЕСТВО $\{f\in\pi : f(x)\neq 0\}$ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНО.

Основным результатом § 3 гл.III является

Теорема 3.3.1. ПУСТЬ X - БАНАХОВО $K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВО.

ТОГДА (В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ) СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) ЕДИНИЧНЫЙ ШАР $\{f\in X^*: \|f\|_{X^*}\le 1\}$ ПРОСТРАНСТВА X^* СЛАБО* СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТЕН;

(б) В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A) И X^* - СЧЁТНОГО ТИПА.

При этом импликация (б) $\Longrightarrow$ (а) справедлива и без предположения о справедливости континуум-гипотезы.

Наконец, в § 4 гл.III найдена линейно-топологическая характеризация пространства $\overline{X^*}$ всех вполне линейных функционалов на X^*, где X есть произвольный KN-линеал (теорема 3.4.12).

Именно, для любого нормированного пространства E через $(E^{**})^\pi$ обозначаем совокупность всех $F\in E^{**}$, таких что $\sum\limits_{t\in T} F(f_t)=0$ для любого семейства $\{f_t : t\in T\}$ в E^*, удовлетворяющего условиям:

(а) $\sum\limits_{t\in T}|G(f_t)|<+\infty$ для любого $G\in E^{**}$;

(б) $\sum\limits_{t\in T} f_t(x)=0$ для любого $x\in E$.

Теорема 3.4.12. ДЛЯ ЛЮБОГО KN-ЛИНЕАЛА X СПРАВЕДЛИВО РАВЕНСТВО $\overline{X^*}=(X^{**})^\pi$.

В главе IV рассматриваются разного рода вопросы, относящиеся к строению и свойствам пространства X^*, где X есть произвольное банахово $K_\sigma N$-пространство.

В § 1 гл.IV изучаются вполне линейные функционалы на произвольном KN-пространстве X. Элемент $x\in X$ назовём СИЛЬНЫМ, если существует $f\in\bar{X}\cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*}=1$ и $f(x)=\|x\|_X$.

Следующая теорема является усилением одной важной теоремы Мори, Амемия, Накано [9].

Теорема 4.1.4. ПУСТЬ X - KN -ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ $\tilde{X}$. СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНА;

(б) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДЁТСЯ СИЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $y \in X$, ТАКОЙ ЧТО $\|x - y\| < \varepsilon$;

в) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДЁТСЯ СИЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $y \in X$, ТАКОЙ ЧТО $(1-\varepsilon)x \leq y \leq (1+\varepsilon)x$;

г) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ СИЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ $y, z \in X$, ТАКИЕ ЧТО

$$(1-\varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1+\varepsilon)x.$$

В § 2 гл.1У рассматриваются в основном анормальные функционалы. Введён и изучен новый класс анормальных функционалов ("локализованные функционалы"). Приведём определение локализованного функционала для случая К-пространства. Пусть X есть К-пространство. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется ЛОКАЛИЗОВАННЫМ, если для любой компоненты $K \neq \{0\}$ пространства X найдётся такая компонента $K_1 \neq \{0\}$ в X , что $K_1 \subset K$ и $f(x) = 0$ для любого $x \in K_1$. Показано, что в наиболее важных случаях всякий анормальный функционал счётного типа - локализованный (теорема 4.2.12).

В § 3 гл.1У рассматриваются в основном особенности строения пространства X^* для того случая, когда X есть банахово $K_\sigma N$ -пространство, не удовлетворяющее условию (A) .

Теорема 4.3.1. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО $K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A) , И ПУСТЬ $Y = X^*_{an}$. ТОГДА

(а) В Y НЕТ СЛАБОЙ ЕДИНИЦЫ;

(б) В Y СУЩЕСТВУЕТ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА;

(в) ПРОСТРАНСТВО $\bar{Y}$ НЕ ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО СЧЁТНОГО ТИПА, БОЛЕЕ ТОГО, В $\bar{Y}$ СУЩЕСТВУЕТ ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА.

В этом же параграфе приведены критерии дискретности и непрерывности пространства X^* для произвольного банахова $K_\sigma N$ -пространства X . Отметим также следующий результат, являющийся усилением одного результата Т.Шимогаки: ЕСЛИ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ С ТОТАЛЬНЫМ $\tilde{X}$ И ЕСЛИ $\tilde{\tilde{X}}$ ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО, ТО И X ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО (теорема 4.3.8 и следствие 4.3.9).

В §§ 4 и 5 гл.1У методами теории полуупорядоченных пространств изучаются банаховы сопряжённые пространства к пространствам Марцинкевича $M(\psi)$ и к пространствам со смешанной нормой $L^{(p,q)}$ на $[0,1] \times [0,1]$. В частности, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $M(\psi)^*$ и $(L^{(p,q)})^*$ были КВ-пространствами, пространствами счётного типа; показано, что все анормальные функционалы на $L^{(p,q)}$ - локализованные, но (в предположении справедливости континуум-гипотезы) на $M(\psi)$ могут существовать анормальные не локализованные функционалы.

Наконец, в § 6 гл.IУ рассматривается задача проектирования банаховой структуры на её замкнутый идеал. В частности, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением одного результата Т.Андо.

Теорема 4.6.4. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО, Y - ЕГО ЗАМКНУТЫЙ ПО НОРМЕ ИДЕАЛ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЙ УСЛОВИЮ **(A)**. ЕСЛИ Y НЕ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПОНЕНТОЙ В X, ТО НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y.

В этом же параграфе получен ещё один результат отрицательного характера, основанный на использовании локализованных функционалов, который затем применяется к пространствам Орлича и к пространствам со смешанной нормой.

В конце диссертации имеется приложение, в котором с помощью результатов гл.П доказана теорема об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s}X_1^s$, уточняющая некоторые результаты Кальдерона и П.П.Забрейко.

Все результаты диссертации докладывались на семинаре Б.З.Вулиха по полуупорядоченным пространствам при Ленинградском университете. Результаты диссертации докладывались также на заседаниях Ленинградского математического общества, на семинаре С.Г.Крейна по функциональному анализу при Воронежском университете и на семинаре Д.А.Райкова по топологическим векторным пространствам при Московском университете.

Основные результаты диссертации изложены в [10] - [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. В у л и х Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961.

2. К а н т о р о в и ч Л.В., В у л и х Б.З. и П и н с к е р А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.

3. К а л ь д е р о н (Calderon A.P.). Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. Математика (сб.переводов), 9:3 (1965), 56-129.

4. П е л ч и н ь с к и й (Pełczyński A.). A connection between weakly unconditional convergence and weakly completeness of Banach spaces. Bull. Acad. Pol. Sci., série sci. math., astr. et phys., 6, № 4 (1958), 251-253).

5. Д э й (Day M.M.). Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961.

6. А н д о (Andô T.). Convexity and eveness in modulared semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido univ., ser. I, math., 14, № 2, 3, 4 (1959), 59-95.

7. К р а с н о с е л ь с к и й М.А. и Р у т и ц к и й Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.

8. С е м ё н о в Е.М. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докторская диссертация, Воронежский гос.ун-т, 1968.

9. М о р и, А м е м и я, Н а к а н о (Mori T.,

Amemiya I., Nakano H.) On the reflexivity of semicontinuous norms. Proc. Japan Acad., 31 (1955), 684-685.

10. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О банаховых структурах Кальдерона. ДАН СССР, 172:5 (1967), 1018-1020.

11. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности, ДАН СССР, 183:3 (1968), 521-523.

12. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О проекторах в некоторых банаховых структурах, Матем.Заметки, 4, № 1 (1968), 41-44.

13. Л о з а н о в с к и й Г.Я. Об изоморфных банаховых структурах, Сиб.Мат.ж., 10:1 (1969), 93-98.

14. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых её применениях. ДАН СССР, 188:3 (1969), 522-524.

15. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых банаховых структурах, Сиб.Мат.ж., 10:3 (1969), 584-599.

16. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О банаховых структурах с единицей. Изв.вузов, Математика, 1 (92), (1970), 65-69.

17. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О вполне линейных функционалах в полуупорядоченных пространствах, Матем.заметки, 8, № 2 (1970), 187-195.

18. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О нормированных структурах с полунепрерывной нормой, Сиб.Мат.ж., 12:1 (1971), 232-234.

19. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых банаховых структурах, II.Сиб.Мат.ж., 12:3 (1971), 562-567.

20. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О банаховых структурах и вогнутых функциях, ДАН СССР, 199 : 3 (1971), 536-539.

21. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О функциях от элементов линейной структуры, Изв.вузов, Математика (аннотация опубликована в 6 (109), 1971, стр.110).

Бесплатно

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 14
ВЫПУСК 5
НОЯБРЬ
1973

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 14, № 5 (1973), 723—732

УДК 513.8

О НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ KN-ЛИНЕАЛОВ

Ю. А. Абрамович, Г. Я. Лозановский

Изучаются свойства некоторых числовых характеристик в нормированной структуре, характеризующие ее сопряженное пространство. Типичный результат следующей. Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство или KB-линеал. Если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, состоящей из попарно дизъюнктных положительных элементов с нормами не превосходящими 1, справедливо

$$\lim_{\overline{n\to\infty}} \frac{1}{n} \|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\| = 0,$$

то все нечетные сопряженные пространства X^*, X^{***}, ... суть KB-пространства. Библ. 8 назв.

При рассмотрении нормированных пространств и, в частности, нормированных линейных структур (KN-линеалов) явное описание сопряженного пространства часто весьма затруднительно. В то же время иногда не требуется явного описания сопряженного пространства, а требуется лишь выяснить, обладает ли сопряженное пространство теми или иными заданными свойствами. Так, например, если X — KN-линеал, то весьма полезно знать, является ли X^* KB-пространством (определение см. в [1], стр. 207). Одно достаточное условие этого было дано Шимогаки [2]. Другое достаточное условие может быть дано с помощью числовых характеристик нормированного пространства с конусом, введенных Е. А. Лифшицем [3].

В настоящей работе изучаются указанные числовые характеристики KN-линеалов, даются некоторые усиления упомянутого результата Шимогаки и устанавливается связь между результатами работ [3] и [2]. Показано, в частности, что для любого квазиравномерно выпуклого

KN-линеала X пространство X^* есть KB-пространство (теорема 3). Некоторые из результатов этой работы были сформулированы (без доказательств) в краткой заметке [4] одного из авторов.

1. Терминология и обозначения. Если E — нормированное пространство, то $U_E = \{x \in E : \| x \|_E \leqslant 1\}$, E^* — сопряженное пространство. Если B — бикомпакт, т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство, то $C(B)$ есть пространство всех вещественных непрерывных функций на B. Через $\| \cdot \|_\infty$ будем обозначать обычную равномерную норму на $C(B)$.

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы полностью следуем монографии [1]. На протяжении всей работы под X понимается произвольный KN-линеал, удовлетворяющий, там, где это указано, некоторым дополнительным условиям, $U_X^+ \overset{\text{def}}{=} U_X \cap X_+$. KN-линеал X называется *интервально полным*, если всякая порядково ограниченная (b)-фундаментальная последовательность его элементов (b)-сходится. Если Y есть (b)-пополнение X, то мы считаем, что порядок в Y естественный и X вложено в Y естественным образом ([1], стр. 197). Для $u \in X$ полагаем $X_u = \{x \in X : |x| \leqslant \lambda |u|$ для некоторого $\lambda \geqslant 0\}$. Через N обозначается множество всех натуральных чисел.

2. Формулировки основных результатов.

Определение 1. Для любого $n \in N$ полагаем

$$l(X; n) = \frac{1}{n} \sup \{\| x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \| : x_i \in U_X^+ \ (i = 1, \ldots, n)\},$$

$$l_d(X; n) = \frac{1}{n} \sup \{\| x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \| : x_i \in U_X^+ \ (i = 1, \ldots, n), \ x_i \wedge x_j = 0 \ \text{при} \ i \neq j\}.$$

Отметим, что константы $l(X; n)$ отличаются лишь множителями $1/n$ от констант, введенных в [3].

Ясно, что $l_d(X; n) \leqslant l(X; n) \leqslant 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного KN-линеала X справедливы следующие утверждения:*

(a) $l(X; mn) \leqslant l(X; m) \cdot l(X; n)$ $(m, n \in N)$;

(b) $l(X; n+1) \leqslant l(X; n)$ $(n \in N)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} l(X; n)$ *равен* 0 *или* 1;

(d) $l(X; n) = l_d(X; n)$ $(n \in N)$.

Замечание. Если X есть $K_\sigma N$-пространство, то утверждение (d) тривиально.

Определение 2. Будем говорить, что в KN-линеале X выполнено условие (L), если $\lim\limits_{n\to\infty} l(X; n) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если в KN-линеале X выполнено условие (L), то все нечетные сопряженные пространства X^*, X^{***}, ... суть KB-пространства.*

Напомним ([5], стр. 355), что KN-линеал X называется *квазиравномерно выпуклым*, если существует число $\eta > 0$ такое, что для всякой пары дизъюнктных элементов $x_1, x_2 \in U_X^+$ справедливо неравенство $\| x_1 + x_2 \| < 2 - \eta$.

Иначе говоря, X называется квазиравномерно выпуклым, если $l_d(X; 2) < 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Если X — квазиравномерно выпуклый KN-линеал, то в X выполнено условие (L) и, следовательно, X^*, X^{***}, ... суть KB-пространства.*

В работе Шимогаки [2] было введено следующее условие, которое мы обозначим через (S).

Определение 3. Будем говорить, что в KN-линеале X выполнено условие (S), если для любой последовательности $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| = 0. \qquad (*)$$

Определение 4. Будем говорить, что в KN-линеале X выполнено условие (S_d), если для любой последовательности $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ такой, что $x_n \wedge x_m = 0$ при $n \neq m$, справедливо $(*)$.

Ясно, что $(S) \Rightarrow (S_d)$.

ТЕОРЕМА 4. *В любом KN-линеале X условия (L) и (S) равносильны.*

Замечание. В [2] показано, что, если X есть $K_\sigma N$-пространство с полунепрерывной нормой и в X выполнено условие (S), то X^* есть KB-пространство. Как следует из наших теорем 4 и 2, условие (S) (и притом без всяких дополнительных предположений о KN-линеале X) влечет за собой, что все нечетные сопряженные пространства к X суть KB-пространства.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство или интервально полный KN-линеал. Тогда в X условия (S) и (S_d) равносильны.*

Замечание. Нам не известно, будут ли условия (S) и (S_d) равносильны в произвольном KN-линеале.

3. Доказательство сформулированных теорем.

ЛЕММА 1. *Пусть Y есть (b)-пополнение KN-линеала X. Тогда $l(X;\, n) = l(Y;\, n)$, $l_d(X;\, n) = l_d(Y;\, n)$ при всех $n \in N$.*

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Доказательство теоремы 1. Справедливость п. (a) теоремы без труда следует из определения 1. Докажем (b). Пусть $x_1, \ldots, x_n,\ x_{n+1} \in U_X^+$. Ясно, что

$$n(x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee x_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \sup\{x_j : 1 \leqslant j \leqslant n+1,\ j \neq i\}.$$

Следовательно, $\frac{1}{n+1}(x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee x_{n+1}) \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n} \sup\{x_j : 1 \leqslant j \leqslant n+1,\ j \neq i\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} l(X;\ n) = l(X;\ n).$$

Отсюда, очевидно, вытекает требуемое.

(c). В силу (b) существует $\lim l(X;\, n) = l$ и $0 \leqslant l \leqslant 1$. Из (a) имеем $l(X;\, n^2) \leqslant [l(X;\, n)]^2$, откуда $l \leqslant l^2$. Поэтому $l = 0$ или $l = 1$.

(d). В силу леммы 1 можем считать, что X (b)-полон. Фиксируем произвольные $x_1, \ldots, x_n \in U_X^+$. Положим $u = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Пусть $f \in X_+^*$, причем $\|f\| = 1$ и $f(u) = \|u\|$. Так как X полон по норме, то X_u есть (r)-полный K-линеал ограниченных элементов. По теореме Крейнов-Какутани X_u алгебраически и порядково изоморфен пространству $C(B)$ на подходящем бикомпакте B. Сужение функционала f на $X_u = C(B)$ обозначим через φ. Для завершения доказательства, очевидно, достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть B — бикомпакт, $x_1, \ldots, x_n \in C(B)_+$ и $\varphi \in C(B)_+^*$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют $y_1, \ldots, y_n \in C(B)_+$ такие, что 1) $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; 2) $y_i \wedge y_j = 0$ при $i \neq j$; 3) $\varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_n) + \varepsilon \geqslant \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_n)$.*

Доказательство. Будем вести доказательство леммы индукцией по n. Пусть $n = 2$. Положим $G_1 = \{t \in B : x_1(t) > x_2(t)\}$, $G_2 = \{t \in B : x_1(t) < x_2(t)\}$ и $F_0 = \{t \in B : x_1(t) = x_2(t)\}$. Пусть μ есть неотрицательная регулярная борелевская мера, отвечающая функционалу φ. Найдем замкнутые множества F_i такие, что $F_i \subset G_i$, $\mu(G_i \setminus F_i) < \delta$ $(i = 1, 2)$, где $\delta > 0$ пока произвольно. Для трех попарно непересекающихся замкнутых множеств F_0, F_1, F_2 существуют попарно непересекающиеся открытые множества G_0', G_1', G_2' такие, что $F_i \subset G_i'$ $(i = 0, 1, 2)$ и $G_i' \subset G_i$ $(i = 1, 2)$. В силу теоремы Урысона непрерывные неотрицательные функции $x_1|_{F_0}$, $x_1|_{F_1}$, $x_2|_{F_2}$ можно продолжить с сохранением непрерывности и неотрицательности на все B так, что продолженные функции (обозначим их x_0', x_1', x_2' соответственно) обращаются в нуль вне G_i' $(i = 0, 1, 2)$ и мажорируются функциями $x_1 \wedge x_2$, x_1, x_2 соответственно. Положим $y_1 = x_0' + x_1'$ и $y_2 = x_2'$. Ясно, что $y_1 \wedge y_2 = 0$ и $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, 2)$. Так как на $\bigcup_{i=0}^{2} F_i$ $x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2 = 0$, то имеем

$$\varphi(x_1 \vee x_2) - \varphi(y_1 \vee y_2) = \int_B [x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2]\, d\mu =$$

$$= \int_{(G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)} [x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2]\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_{(G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)} x_1 \vee x_2\, d\mu \leqslant \max_{t \in B} [x_1(t) \vee x_2(t)] \cdot$$

$$\cdot [\mu(G_1 \setminus F_1) + \mu(G_2 \setminus F_2)] \leqslant 2\delta \max_{t \in B} [x_1(t) \vee x_2(t)].$$

Следовательно, $\varphi(x_1 \vee x_2) - \varphi(y_1 \vee y_2) < \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. Допустим теперь, что наше утверждение доказано для всех $n \leqslant k$, и докажем его для $k + 1$. Рассмотрим два элемента $x_1 \vee \ldots \vee x_k$ и x_{k+1}. В силу уже доказанного найдутся v и w такие, что $0 \leqslant v \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_k$, $0 \leqslant w \leqslant x_{k+1}$, $v \wedge w = 0$ и $\varphi(v \vee w) + \varepsilon/2 \geqslant \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee x_{k+1})$. Далее рассмотрим элементы $v \wedge x_1$, $v \wedge x_2, \ldots, v \wedge x_k$. В силу индукционного предположения существуют попарно дизъюнктные $y_1, \ldots, y_k$ такие, что $0 \leqslant y_i \leqslant v \wedge x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $\varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_k) + \varepsilon/2 \geqslant \varphi[(v \wedge x_1) \vee (v \wedge x_2) \vee \ldots \vee (v \wedge x_k)] = \varphi(v)$. Отсюда ясно, что элементы $y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} = w$ — требуемые, ибо они попарно дизъюнктны, $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, k+1)$ и $\varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_k \vee y_{k+1}) = \varphi(y_1 \vee \ldots \vee y_k) + \varphi(y_{k+1}) \geqslant \varphi(v) - \varepsilon/2 + \varphi(w) \geqslant \varphi(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee x_{k+1}) - \varepsilon$. Лемма 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Из теоремы 1 и определения 2 вытекает следующая простая лемма.

ЛЕММА 3. *Если в X не выполнено условие (L), то $l_d(X; n) = l(X; n) = 1$ при всех $n \in N$.*

Действительно, в силу п. (c) теоремы 1 $\lim_n l(X; n) = 1$, а тогда в силу пп. (d) и (c) той же теоремы $l_d(X; n) = l(X; n) = 1$.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 3 работы [3] следует, что $l(X; n) = l(X^{**}; n) = \ldots$ $(n \in N)$; следовательно, в каждом из пространств X, X^{**}, … выполнено условие (L), а потому ([3], теорема 1) конусы X_+^{*}, X_+^{***}, … вполне правильны. Остается напомнить, что KN-линеал с вполне правильным конусом положительных элементов есть KB-пространство [7].

Справедливость теоремы 3 теперь непосредственно вытекает из леммы 3 и теоремы 2.

ЛЕММА 4. *Пусть число $c > 0$ и пусть последовательность $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ такова, что для любого $k \in N$ $(1/2^{k-1}) \| x_{2^{k-1}} \vee x_{2^{k-1}+1} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| \geqslant c$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} (1/n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/4\, c$.*

Доказательство. Фиксируем $n \in N$, $n \geqslant 2$. Пусть $k \in N$ таково, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда

$$\frac{\| x_1 \vee \ldots \vee x_n \|}{n} \geqslant \frac{\| x_{2^{k-1}} \vee x_{2^{k-1}+1} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \|}{2^{k+1}} \geqslant \frac{1}{4} c,$$

откуда и следует требуемое.

Доказательство теоремы 4. Справедливость импликации $(L) \Rightarrow (S)$ очевидна. Докажем, что $(S) \Rightarrow (L)$. Допустим, что в X не выполнено (L). Тогда по лемме 3 $l(X; n) = 1$ $(n \in N)$ и, следовательно, найдется последовательность $x_n \in U_X^+$ такая, что $\frac{1}{2^{k-1}} \| x_{2^{k-1}} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| \geqslant 1/2$ $(k \in N)$. Тогда в силу леммы 4 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/8$, что невозможно в силу (S). Полученное противоречие доказывает теорему 4.

Из теоремы 4 немедленно следует, что условие (S) равносильно следующему условию: *для любой последовательности $x_n \in U_X$ $(n \in N)$ справедливо соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} (1/n) \cdot \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| = 0$.*

Оставшаяся часть работы будет посвящена доказательству теоремы 5. Мы рассмотрим в отдельности случай (I) — X есть $K_\sigma N$-пространство и случай (II) — X есть интервально полный KN-линеал.

(I) Пусть X — $K_\sigma N$-пространство с условием (S_d). Докажем, что в X выполнено условие (S).

ЛЕММА 5. *Пусть в $K_\sigma N$-пространстве X не выполнено условие (S). Тогда для любого $n \in N$ в X существует компонента Y такая, что 1) $X = Y + Y^d$* *); *2) в Y не выполнено условие (S); 3) $l(Y^d; n) > 1/2$.*

Доказательство. В силу леммы 3 $l_d(X; 2n) = 1$. Возьмем попарно дизъюнктные $x_1, \ldots, x_{2n} \in U_X^+$, такие что $(1/2n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_{2n} \| > 3/4$. Пусть K есть компонента, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $X = K + K^d$ и, следовательно, в одной из компонент K или K^d не выполнено условие (S). Остается заметить, что $(1/n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/2$ и $(1/n) \| x_{n+1} \vee \ldots \vee x_{2n} \| > 1/2$, откуда $l(K; n) > 1/2$ и $l(K^d; n) > 1/2$. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство п. (I). Допустим, что в X не выполнено условие (S). Пользуясь предыдущей леммой, построим такую последовательность $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$, что $x_n \wedge x_m = 0$ при $m \neq n$ и $(1/2^{k-1}) \| x_{2^{k-1}} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| > 1/2$ $(k \in N)$. Тогда по лемме 4 $\lim (1/n) \cdot \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/8$. Противоречие.

(II). Случай интервально полного KN-линеала X несколько сложнее. Нам понадобится ряд лемм.

Всюду в оставшейся части работы B означает некоторый бикомпакт, $\| \cdot \|_\infty$ — равномерную норму на $C(B)$ и $\| \cdot \|$ — некоторую монотонную норму на $C(B)$, т. е. такую, что $(x, y \in C(B), \; |x| \leqslant |y|) \Rightarrow (\|x\| \leqslant \|y\|)$.

Известно, что $\| \cdot \| \leqslant K \| \cdot \|_\infty$, где K — некоторая константа. Полагаем $Z = (C(B), \| \cdot \|)$. Для любого открытого подмножества G в B через $Z(G)$ обозначаем подпространство в Z, состоящее из всех функций из Z, которые обращаются в нуль вне G.

ЛЕММА 6. *Пусть в Z не выполнено условие (S). Тогда существует неизолированная точка $t_0 \in B$, обладающая*

*) Через Y^d обозначается, как обычно ([1], стр. 98), дизъюнктное дополнение к Y, т. е. $Y^d = \{x \in X : |x| \wedge |y| = 0$ для любого $y \in Y\}$.

следующим свойством: каково бы ни было открытое множество $G \ni t_0$, в $Z(G)$ не выполнено условие (S).

Доказательство. Допустим противное. Тогда в силу бикомпактности B найдутся точки $t_1, \ldots, t_n \in B$ и открытые множества $G_1, \ldots, G_n$ такие, что $t_i \in G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, в каждом $Z(G_i)$ выполнено условие (S) и $\bigcup_{i=1}^{n} G_i = B$. Хорошо известно ([6], стр. 231), что существуют функции $0 \leqslant u_i \in Z(G_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что $\Sigma_{i=1}^{n} u_i \equiv 1$. Фиксируем произвольное $m \in N$ и возьмем произвольные попарно дизъюнктные $x_1, \ldots, x_m \in U_Z^+$. Имеем $x_1 \vee \ldots \vee x_m = x_1 + \ldots + x_m = \Sigma_{i=1}^{n} [x_1 u_i + x_2 u_i + \ldots + x_m u_i]$. Отсюда легко следует, что $l_d(Z; m) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} l_d(Z(G_i); m)$ и, следовательно, $l(Z; m) = l_d(Z; m) \to 0$ при $m \to \infty$, что невозможно в силу теоремы 4. Существование требуемой точки t_0 доказано. Ясно, что точка t_0 не является изолированной точкой B.

ЛЕММА 7. *Пусть t — произвольная точка бикомпакта B и $0 \leqslant z \in Z$ такова, что $z(t) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $u \in Z$ такая, что 1) $0 \leqslant u \leqslant z$; 2) u обращается в нуль в некоторой окрестности точки t; 3) $\| u \| > \| z \| - \varepsilon$.*

Справедливость леммы легко следует из неравенства $\| \cdot \| \leqslant K \| \cdot \|_\infty$.

ЛЕММА 8. *Пусть в Z не выполнено условие (S) и пусть G — открытое множество, содержащее точку t_0 из леммы 6. Тогда для любого $n \in N$ в B найдется открытое множество V и функции $z_1, \ldots, z_n \in Z$ такие, что 1) $t_0 \in V \subset G$; 2) $z_k \geqslant 0$, $\| z_k \| \leqslant 1$, $z_k \in Z(G)$ $(k = 1, \ldots, n)$; 3) $z_i \wedge z_j = 0$ при $i \neq j$; 4) все z_k обращаются в нуль на V; 5) $(1/n) \| z_1 \vee \ldots \vee z_n \| > 2/3$.*

Доказательство. Так как в $Z(G)$ условие (S) не выполнено, то по теореме 4 не выполнено условие (L), а тогда по лемме 3 $l_d(Z(G); n+1) = 1$. Поэтому существуют $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in U_Z^+$ такие, что $y_k \in Z(G)$ $(k = 1, \ldots, n+1)$, $y_i \wedge y_j = 0$ при $i \neq j$ и $(1/n+1) \| y_1 \vee \ldots \vee y_n \vee y_{n+1} \| > 5/6$. Ясно, что по крайней мере n из $(n+1)$ чисел $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0), y_{n+1}(t_0)$ равны 0. Пусть $y_1(t_0) = y_2(t_0) = \ldots = y_n(t_0) = 0$. Кроме того, имеем $(1/n) \| y_1 \vee \ldots \vee y_n \| \geqslant 5/6\,(n+1)/n - 1/n = 5/6 - 1/6n$, откуда $(1/n) \| y_1 \vee \ldots \vee y_n \| > 2/3$. В силу леммы 7 существует $u \in Z$ такое, что $0 \leqslant u \leqslant y_1 \vee \ldots \vee y_n$, и обращается в нуль в некоторой окрестности V точки t_0 и $(1/n) \| u \| > 2/3$. Ясно, что можем считать, что $V \subset G$. Остается положить $z_k = u \wedge y_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

ЛЕММА 9. *Если в Z не выполнено условие (S), то не выполнено и условие (S_d).*

Доказательство. Для каждого $k \in N$ в бикомпакте B находим (в силу леммы 8) открытое множество $V_{k+1} \subset V_k$ $(V_1 = B)$ и положительные, попарно дизъюнктные функции x_n, $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n = 2^{k-1}, 2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k - 1)$, принадлежащие $Z(V_k)$, равные нулю на $V_{k+1} \ni t_0$ и такие, что $(1/2^{k-1}) \| x_{2^{k-1}} \vee x_{2^{k-1}+1} \vee \ldots \vee x_{2^k-1} \| > 2/3$. Но тогда по лемме 4 $\varlimsup_{n\to\infty} (1/n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| \geqslant 1/6$. Тем самым в Z не выполнено условие (S_d), поскольку все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно дизъюнктны по построению.

Теперь мы вернемся к доказательству п. (II). Пусть X — интервально полный KN-линеал с условием (S_d). Пусть Y есть (b)-пополнение X. Хорошо известно, что X есть плотный по норме фундамент в Y. Отсюда легко следует, что в Y тоже выполнено условие (S_d). Допустим, что в Y не выполнено условие (S). Тогда существует последовательность $y_n \in U_Y^+$ $(n \in N)$, для которой $\varlimsup (1/n) \| y_1 \vee \ldots \vee y_n \| > 0$. Положим $z = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 (y_n)$. Тогда в Y_z выполнено условие (S_d), но не выполнено условие (S). С другой стороны, реализуя r-полный K-линеал ограниченных элементов Y_z по уже упоминавшейся теореме Крейнов-Какутани в виде пространства $C(B)$ на подходящем бикомпакте B, приходим к противоречию с леммой 9. Следовательно, в Y, а значит и в X, выполнено условие (S). Теорема 5 доказана полностью.

Из теоремы 5 и замечания, сделанного после доказательства теоремы 4, без труда выводится

Следствие. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство или интервально полный KN-линеал. Пусть существует последовательность $x_n \in U_X^+$ $(n \in N)$ такая, что $\varlimsup_{n\to\infty} (1/n) \| x_1 \vee \ldots \vee x_n \| > 0$. Тогда существует последовательность $y_n \in U_X^+$ такая, что $y_n \wedge y_m = 0$ при $n \neq m$ и $\varlimsup_{n\to\infty} (1/n) \| y_1 \vee \ldots \vee y_n \| = 1$.*

4. Результаты настоящей работы, дающие достаточные условия того, что X^* есть KB-пространство, уместно сравнить с одной теоремой второго автора, дающей необходимые и достаточные условия того, что сопряженное пространство к (b)-полному KN-линеалу является KB-пространством.

ТЕОРЕМА. *Пусть X есть (b)-полный KN-линеал. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) X^* не является KB-пространством;

2) в X имеется линейная подструктура Y, на которую существует положительный проектор и которая линейно топологически и порядково изоморфна пространству l_1 суммируемых последовательностей.

Отметим, что в случае, когда X — просто банахово пространство, близкая теорема была получена Бессагой и Пелчинским [8], но в их работе никакого упорядочения не рассматривалось.

Поступило
13.IX.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
[2] Shimogaki T., On the continuity and the monotonousness of norms, J. Fac. Sci. Hokk. Univ., Ser. I, 16 (1962), 225—237.
[3] Лифшиц Е. А., К теории полуупорядоченных банаховых пространств, Функц. анализ и его приложения, 3, № 1 (1969), 91—92.
[4] Лозановский Г. Я., Об одном результате Шимогаки, Вторая зональная конференция пединститутов по математике и методике ее преподавания, Тезисы, (1970), 43.
[5] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950.
[6] Келли Дж. Л., Общая топология, М., 1968.
[7] Вулих Б. З., О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой, Докл. АН СССР, 147, № 2 (1962), 271—274.
[8] Bessaga C., Pelczynski A., Some remarks on conjugate spaces, containing subspace isomorphic to c_0, Bull. Acad. Polon. Sci., 6 (1958), 249—250.

СОДЕРЖАНИЕ

Доклады, прочитанные на общем собрании отделения математики АН СССР

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1973

т. 212, № 6

Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

А. В. БУХВАЛОВ, Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О ЗАМКНУТЫХ ПО МЕРЕ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 III 1973)

В работе показывается, что ограниченные выпуклые множества, замкнутые относительно сходимости по мере в «хороших» пространствах измеримых функций, обладают рядом полезных свойств, выполнение которых ранее чаще всего связывалось с условием компактности. Результаты сформулированы для широкого класса пространств измеримых функций, но, по-видимому, они являются новыми даже для пространства $L^1[0, 1]$.

1. Обозначения и терминология. В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы следуем [1]. Напомним некоторые сведения. Пусть E — K-линеал (векторная решетка). Для $M\subset E$ полагаем $M^d=\{x\in E\colon |x|\wedge|y|=0$ для любого $y\in M\}$. Множество $M\subset E$ называется нормальным, если $(x\in E,\ y\in M,\ |x|\leqslant|y|)\Rightarrow(x\in M)$. Линейное нормальное множество в E называется идеалом. Идеал Y в E называется фундаментом, если $Y^d=\{0\}$. Идеал Y в E называется компонентой, если $Y=(Y^d)^d$. Через $\tilde{E}$ (соответственно $\bar{E}$) обозначается пространство регулярных (соответственно вполне линейных) функционалов на E. Если E есть K-пространство (условно полная векторная решетка), Y — компонента в E, то через Pr_Y обозначается оператор проектирования E на Y (см. [1], гл. IV, § 3). KN-пространством называется K-пространство, являющееся нормированным пространством, с монотонной нормой. Сопряженное к нормированному пространству E обозначается E^*. Напомним, что для банахова KN-пространства E справедливо $E^*=\tilde{E}$.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, где T — множество, Σ — некоторая σ-алгебра его подмножеств, μ — неотрицательная счетно-аддитивная мера на Σ. Полагаем $\Sigma(\mu)=\{A\in\Sigma\colon \mu(A)<\infty\}$. Через $S=S(T, \Sigma, \mu)$ обозначается пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций с отождествлением эквивалентных и естественным упорядочением. Через τ обозначаем топологию μ-сходимости на S, базис окрестностей нуля которой состоит из множеств вида $U(A;\varepsilon)=\left\{x\in S\colon \int\limits_A \frac{|x|}{1+|x|}\,d\mu<\varepsilon\right\}$, где $A\in\Sigma(\mu)$ и число $\varepsilon>0$ произвольны. Для $X\subset S$ через $\tau(X)$ обозначается топология на X, индуцированная топологией τ.

На протяжении всей работы (T, Σ, μ) есть пространство с мерой, удовлетворяющее следующим условиям: а) $(A\subset B\in\Sigma,\ \mu(B)=0)\Rightarrow(A\in\Sigma)$; б) если для некоторого $A\subset T$ при любом $B\in\Sigma(\mu)$ справедливо $B\cap A\in\Sigma$, то $A\in\Sigma$; в) для $A\in\Sigma$ справедливо $\mu(A)=\sup\{\mu(B)\colon B\in\Sigma(\mu),\ B\subset A\}$; г) $S(T, \Sigma, \mu)$ есть K-пространство. Напомним, что если μ σ-конечна, то условия б), в), г) выполнены автоматически.

Пусть X есть фундамент в $S=S(T, \Sigma, \mu)$. Полагаем

$$X'=\left\{x'\in S\colon \int\limits_T |xx'|\,d\mu<\infty \text{ для любого } x\in X\right\}.$$

Напомним, что X' можно отождествить с $\overline{X}$, если $x' \in X'$ сопоставить $f_{x'} \in \overline{X}$, действующий по формуле $f_{x'}(x) = \int xx'\,d\mu$, $x \in X$ ([2]). Через π обозначаем оператор естественного вложения X в $\overline{\overline{X}}$. Фундамент X в S называется рефлексивным по Накано, если X' есть фундамент в S и $X'' = X$ (т. е. если $\overline{X}$ тотально на X и $\pi(X) = \overline{\overline{X}}$). Через $\mathfrak{R}$ обозначаем совокупность всех фундаментов в S, рефлексивных по Накано. Напомним, что для $X \in \mathfrak{R}$ пространство $\pi(X)$ есть компонента в пространстве $\overline{\overline{X}}$ всех регулярных функционалов на $\overline{X}$, поэтому имеет смысл оператор проектирования $\mathrm{Pr}_{\pi(X)}$: $\overline{\overline{X}} \to \pi(X)$.

Отметим, что если $X \in \mathfrak{R}$ и множество $M \subset X$ ограничено в слабой топологии $\sigma(X, \overline{X})$, то M замкнуто в $(X, \tau(X))$ тогда и только тогда, когда M замкнуто в (S, τ).

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, V — непустое выпуклое множество в X, W — замыкание множества $\pi(V)$ в $\overline{\overline{X}}$ в топологии $\sigma(\overline{\overline{X}}, \overline{X})$. Тогда*

а) *если V замкнуто в $(X, \tau(X))$, то*

$$\mathrm{Pr}_{\pi(X)} W = \pi(V); \qquad (*)$$

б) *если V ограничено в топологии $\sigma(X, \overline{X})$ и удовлетворяет условию $(*)$, то V замкнуто в $(X, \tau(X))$.*

Замечание. В теореме 1б) условие $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченности множества V опустить нельзя (достаточно рассмотреть случай $X = L^2[0, 1]$, $V = \{x \in X: \int_0^1 x(t)\,dt = 0\}$).

Теорема 2. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, Z — фундамент в $\overline{X}$. Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в X, замкнутые в $(X, \tau(X))$. Если одно из них $\sigma(X, \overline{X})$-ограничено, то существует функционал $f \in Z$ такой, что $\sup f(V_1) < \inf f(V_2)$.*

Теорема 3. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — центрированная система выпуклых, $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченных, замкнутых в $(X, \tau(X))$ подмножеств пространства X. Тогда $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi \neq \phi$.*

Теорема 4. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, V_1 и V_2 — выпуклые, $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченные, замкнутые в $(X, \tau(X))$ подмножества пространства X.*

Тогда множество $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2: v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Теорема 5. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, V — непустое, выпуклое, $\sigma(X, \overline{X})$-ограниченное множество в X, замкнутое в $(X, \tau(X))$. Пусть $A \in \Sigma$, χ_A — характеристическая функция множества A.*

Тогда множество $\{x\chi_A: x \in V\}$ замкнуто в $(X, \tau(X))$.

Теорема 6. *Пусть $X \in \mathfrak{R}$, X есть KN-пространство и в X выполнено следующее условие: если направление $\{x_\alpha\}$ в X таково, что $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ и $\sup \|x_\alpha\| < \infty$, то существует $x = \sup x_\alpha \in X$ и $\|x\| = \sup \|x_\alpha\|$. Пусть V_1 и V_2 — непустые, выпуклые множества в X, замкнутые в $(X, \tau(X))$. Если одно из них ограничено по норме в X, то существуют такие $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, что*

$$\|x_1 - x_2\| = \inf\{\|y_1 - y_2\|: y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}.$$

Следующая теорема дополняет в несепарабельном случае известный результат Ч. Бессаги и А. Пелчиньского об экстремальных точках выпуклых множеств в сепарабельных сопряженных пространствах.

Теорема 7. *Пусть E — произвольное банахово KN-пространство такое, что в E и E^* нормы непрерывны *.*

Тогда замкнутый единичный шар пространства E^* совпадает с замкнутой (относительно нормированной топологии пространства E^*) выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

* Норма в KN-пространстве E называется непрерывной, если из $x_n \downarrow 0$ в E следует, что $\|x_n\| \to 0$.

3. О пространстве $L^1[0, 1]$. В теоремах 1 — 6 за (T, Σ, μ) можно принять, в частности, отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега, а за X принять пространство $L^1[0, 1]$. Тогда $\overline{X}=X^*$, $\overline{\overline{X}}=X^{**}$, топология $\sigma(X, \overline{X})$ есть обычная слабая топология пространства $L^1[0, 1]$. Сформулируем для указанного частного случая, например, теоремы 2, 3 и 6.

Теорема 2'. *Пусть V_1 и V_2 — непустые выпуклые непересекающиеся множества в $L^1[0, 1]$, замкнутые в $L^1[0, 1]$ относительно сходимости по мере. Если одно из них ограничено по норме, то существует такой функционал $f\in(L^1[0, 1])^*$, что $\sup f(V_1)<\inf f(V_2)$.*

Теорема 3'. *Всякая центрированная система выпуклых, ограниченных по норме, замкнутых относительно сходимости по мере множеств в $L^1[0, 1]$ имеет непустое пересечение.*

Теорема 6'. *Пусть V_1 и V_2 — непустые выпуклые множества в $L^1[0, 1]$, замкнутые в $L^1[0, 1]$ относительно сходимости по мере. Если одно из них ограничено по норме, то существуют такие $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$, что*

$$\|x_1-x_2\|=\inf\{\|y_1-y_2\|:\ y_1\in V_1,\ y_2\in V_2\}.$$

В заключение заметим, что доказательства результатов заметки основаны на теории векторных решеток.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
[2] Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский, Матем. сборн., 84 (126), № 3, 331 (1971).

Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513/516:513.88

МАТЕМАТИКА

Л. Ф. ГЕРМАН, В. П. СОЛТАН, П. С. СОЛТАН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА d-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 III 1973)

Рассматриваемое в этой заметке понятие d-выпуклости возникло при решении некоторой прикладной задачи на графах ([5]) и является естественным аналогом понятия обычной (линейной) выпуклости. В отличие от последней понятие d-выпуклости имеет смысл в произвольном метрическом пространстве ([7]).

Цель этой заметки — доказать некоторые свойства d-выпуклых множеств. Относительно других результатов см. ([6], [7]).

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $M\subset X$, $M\neq\phi$, называется d-выпуклым, если для любых точек $x, y, z\in X$ из условий $x, y\in M$, $\mathrm{d}(x, z)+\mathrm{d}(z, y)=\mathrm{d}(x, y)$ следует включение $z\in M$ ([5], [7]). Пустое множество будем считать d-выпуклым.

Из этого определения очевидно следует, что пересечение любой совокупности d-выпуклых множеств пространства X также есть d-выпуклое множество.

Для любого множества $F\subset X$ естественно определяется его d-выпуклая *оболочка — наименьшее по включению d-выпуклое множество, содержащее* F и обозначаемое через $\mathrm{d\text{-}conv}\,F$. Очевидно, d-выпуклая оболочка множества $F\subset X$ есть пересечение всех d-выпуклых множеств из X, содержащих F.

Содержательные результаты о d-выпуклых множествах получаются в нормированных пространствах, поэтому в дальнейшем основным пространством X будем считать вещественное нормированное пространство $\mathscr{R}^n$ размерности n. Для любых $x, y\in\mathscr{R}^n$ положим $\mathrm{d}(x, y)=\|x-y\|$. Единичный шар пространства $\mathscr{R}^n$ и его границу обозначим через Σ^n и S^{n-1}.

В пространстве $\mathscr{R}^n$ всякое d-выпуклое множество является линейно-выпуклым. d-Выпуклость совпадает с линейной выпуклостью тогда и только тогда, когда пространство $\mathscr{R}^n$ строго нормировано ([6]).

d-выпуклая оболочка двух любых точек $x, y\in\mathscr{R}^n$ может отличаться от отрезка $[x, y]$. Однако имеет место следующая.

Лемма 1. *Пусть точки $x, y, z\in\mathscr{R}^n$ таковы, что $\mathrm{d}(x, z)+\mathrm{d}(z, y)=\mathrm{d}(x, y)$. Тогда для любой точки w множества $[x, z]\cup[z, y]$ выполняется соотношение* $\mathrm{d}(x, w)+\mathrm{d}(w, y)=\mathrm{d}(x, y)$.

Произвольное полупространство $P\subset\mathscr{R}^n$ однозначно определяет гиперплоскость, отделяющую P от дополнительного к нему полупространства.

Теорема 1. *Полупространство $P\subset\mathscr{R}^n$ является d-выпуклым тогда и только тогда, когда d-выпукла определяющая его гиперплоскость.*

Пусть $L\neq 0$ — подпространство из $\mathscr{R}^n$. Положим $S_L=S^{n-1}\cap L$. Сферическим раствором ([4]) ненулевых подпространств L, M называется число

$$\tilde{\theta}(L, M)=\max\{\sup_{x\in S_M}\mathrm{d}(x, S_L),\quad \sup_{x\in S_L}\mathrm{d}(x; S_M)\},$$

где $\mathrm{d}(x; F)$ означает расстояние вектора x от компактного множества F. Полагая $\tilde{\theta}(0, M)=\tilde{\theta}(M, 0)=1$, $\tilde{\theta}(0, 0)=0$, мы получаем метрику в множестве всех подпространств из $\mathscr{R}^n$.

Для каждого $k=1, 2, \ldots, n$ множество G_k всех подпространств фиксированной размерности k компактно в метрике $\tilde{\theta}$ ([4]). Обозначим через

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ОПТИМИЗАЦИЯ

НОВОСИБИРСК · 1973

12 (29)

при этом

$$\mu^+ = \frac{1}{2} e_1 ; \quad \nu^+ = \frac{1}{2} e_2 ;$$

$$\mu^- = -\frac{1}{2} e_1 ; \quad \nu^- = -\frac{1}{2} e_2 .$$

Таким образом, простейшей пометкой фигуры является точка

$$\frac{1}{2} \left(x(e_1) - x(-e_1),\ x(e_2) - x(-e_2) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичные рассуждения в n-мерном случае приводят к пометке $\mu_k \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}(\varepsilon_{e_k} - \varepsilon_{-e_k})$. Впрочем, проверку этого факта можно провести и непосредственно.

Литература

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и её приложения.- Успехи мат. наук, 1973, т.27, вып. 3, с. 127-176.

Поступила в ред.-изд. отд.

15. VII. 1973 г.

УДК 513.88

О ВТОРОМ СОПРЯЖЕННОМ ПО НАКАНО ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ СТРУКТУРЕ

Г.Я.Лозановский

В терминологии и обозначениях из теории векторных решеток мы следуем [1]. Банахово сопряженное пространство к нормированному пространству X обозначается X^*. Пространство, сопряженное в смысле Накано к K-линеалу E, обозначается $\bar{E}$.

Следующая теорема является существенным обобщением теоремы 5 из [2].

ТЕОРЕМА I. *Пусть X - KB-линеал, E - замкнутое по норме нормальное подпространство в X^*, причем E тотально на X и $\bar{E}$ есть KB-пространство. Тогда X есть KB-пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H есть компонента в X^*, порожденная множеством E. Ясно, что KN-пространства $\bar{H}$ и $\bar{E}$ изоморфны и изометричны (чтобы в этом убедиться, достаточно каждому $f \in \bar{H}$ сопоставить его сужение на E), поэтому $\bar{H}$ есть KB-пространство. Обозначим через $\mathcal{U}$ замкнутый единичный шар пространства H. Так как пространство $\bar{H} = (\bar{H})^*$ можно естественным образом отождествить с H, то множество $\mathcal{U}$ компактно в слабой топологии $\sigma(H, \bar{H})$. Но, очевидно, топология $\sigma(H, \bar{H}) \geq \sigma(H, X)$, ибо в естественной двойственности между X и H каждый элемент из X является вполне линейным функционалом на H. Следовательно, множество $\mathcal{U}$ компактно и в топологии $\sigma(H, X)$. Тем самым $\mathcal{U}$ замкнуто в $(X^*, \sigma(X^*, X))$. Так как H тотально на X, то из теоремы Крейна-Шмульяна (см. [3], стр. 77, теорема 5) теперь следует, что $H = X^*$. Напомним, что KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон (теорема Огасавара). Поэтому пространство $\bar{H} = \overline{X^*}$ слабо секвенциально полно. Но при естественном вложении X в X^{**} пространство X оказывается замкнутым по норме подпространством в $\overline{X^*}$. Следовательно, X слабо секвенциально полно, тем самым X есть KB-пространство. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть X - KB-линеал, такой что $\bar{X}$ тотально на X и $\bar{\bar{X}}$ есть KB-пространство. Тогда X есть KB-пространство.*

Дадим приложение полученных результатов к теории банаховых функциональных пространств. Пусть (T, Σ, μ) - пространство с мерой, состоящее из множества T, некоторой σ-алгебры Σ его подмножеств и неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной меры μ на Σ. Через $S = S(T, \Sigma, \mu)$ обозначаем пространство всех вещественных, измеримых почти всюду конечных функций на T, причем эквивалентные функции, как обычно, отождествляются. Банаховым функциональным пространством (б.ф.п.) на (T, Σ, μ) называется банахово KN-пространство X, являющееся фундаментом в S. Дуальным пространством X' к б.ф.п. X называется пространство всех $x' \in S$, таких что

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{\int_T |x x'| \, d\mu : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty .$$

Пусть теперь X есть произвольное б.ф.п. Хорошо известно, что пространство $X'' = (X')'$, вообще говоря, не совпадает с X. Тем не менее справедлива следующая теорема, вытекающая из следствия к теореме I.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X есть б.ф.п. на (T, Σ, μ) и пусть X'' есть KB-пространство. Тогда $X = X''$.*

ПРИМЕР. Пусть X есть б.ф.п. на (T, Σ, μ), такое что $X' = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Тогда $X = L^1(T, \Sigma, \mu)$, ибо

$X' = L^1(T, \Sigma, \mu)$ есть KB -пространство. В связи со сказанным заметим, что, вообще говоря, из $X' - L^1(T, \Sigma, \mu)$ не следует, что $X - L^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

Литература

1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
2. SHIMOGAKI T., On the continuity and the monotonousness of norm, J.Fac.Sci.Hokkaido Univ.,ser.I,1962,v.16,p.225-237
3. ДЭЙ М.М. Нормированные линейные пространства, ИЛ., М., 1961.

Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.

ПРАВИЛА ПОДГОТОВКИ РУКОПИСИ ДЛЯ ФОРМАТА ИЗДАНИЯ 60x84 1/16

При подготовке рукописи для издания на ротапринте автор должен руководствоваться следующими правилами:

1. Рукопись должна быть отпечатана в 2 идентичных экземплярах (первом - на мелованной бумаге форматом 30x21 см; втором - копии через копировальную бумагу) на пишущей машинке типа "Оптима", с чистым шрифтом, черной лентой средней жирности, через 1,5 интервала только на одной стороне листа.

2. Полная текстовая полоса форматом 16,2x25,1 см должна содержать 38 строк по 62 удара в каждой строке, включая и пробелы; 39-я строка-пробельная, на 40-й строке посередине проставляется номер страницы (колонцифра); поля: слева - 3 см; справа - 1 см; сверху и снизу - по 2,5 см. Все страницы от первой до последней должны быть пронумерованы.

3. Первая страница текста печатается со спуском в 10 строк, на 5-й строке спуска справа ставится индекс УДК, на 10-й строке заглавными буквами печатается заголовок статьи; отступив от него одну строку, печатают и.о.ф. автора, а через 2 строки от фамилии с абзацным отступом в 3 удара печатают текст статьи.

4. Текст теорем, лемм, предложений, следствий печатают вразрядку малыми буквами, сами же слова: теорема, лемма, предложение и т.д. - заглавными буквами без разрядки.

5. Каждый заголовок новой части, главы, параграфа отделяется от предыдущего текста двумя пробельными строками, а от последующего - одной строкой и печатается малыми буквами без разрядки.

6. Прежде чем приступить к вписыванию в рукопись формул и буквенных выражений, автор должен внимательно изучить стандарты научно-технической символики и образцы их правильного начертания.

а) Все символы и обозначения должны быть вписаны чёрной тушью ясно и четко: высота заглавных букв равна 6 мм, строчных - 4 мм, индексов - 2,5 - 3 мм. Во избежание путаницы прописные буквы рекомендуется вписывать в печатном начертании, знаки математических соотношений - прямым шрифтом.

б) Таблицы, рисунки, графики вычерчиваются внутри текстовой полосы, если они не превышают ее формата, в противном случае вычерчиваются на отдельных листах. Толщина контурных и штриховых линий должна быть соответственно 0,8 и 0,4 мм.

Общее требование к оригиналу-макету будущего издания - предельно четкое написание текста, надписей, цифровых и буквенных обозначений в соответствии с заданным форматом и соблюдением единого стиля на протяжении всей рукописи.

Редколлегия

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ • ТОМ 6 • ВЫПУСК 4

МОСКВА • 1972

Функциональный анализ и его приложения,
т. 6, вып. 4, 1972, 89—90

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ КАЛЬДЕРОНА

Г. Я. Лозановский

Пусть (T, Σ, μ) (*возможно с индексами*) — пространство с неотрицательной счетно-аддитивной вполне σ-конечной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — линеал всех комплексных измеримых функций на (T, Σ, μ) с отождествлением эквивалентных функций. *Банаховым функциональным пространством* (б.ф.п.) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство X, являющееся линейным подмножеством в S, такое, что из $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leqslant |x|$ следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leqslant \|x\|_X$.

Пусть X — б.ф.п. Норма в X называется *непрерывной*, если выполнено следующее условие, называемое *условием* (A): если $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \geqslant 0$, $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\|_X \to 0$. Норма в X называется *полунепрерывной*, если выполнено следующее условие, называемое *условием* (C): если $x \in X$, $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $0 \leqslant x_n \uparrow x$, то $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$. Норма в X называется *монотонно полной*, если выполнено следующее условие, называемое *условием* (B): если $0 \leqslant x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \uparrow$ и $\lim \|x_n\|_X < \infty$, то существует $\sup x_n \in X$.

Пусть X_0 и X_1 суть б.ф.п. на (T, Σ, μ), $0 < s < 1$. Следуя [1], через $X(s) = X_0^{1-s} X_1^s$ обозначаем б.ф.п., состоящее из всех $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ таких, что $|x| \leqslant \lambda |x_0|^{1-s} |x_1|^s$ для некоторого числа $\lambda > 0$ и некоторых $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 0,1)$. За $\|x\|_{X(s)}$ принимается инфимум тех значений λ, для которых выполняется указанное неравенство. Заметим, что если в одном из пространств X_0, X_1 выполнено условие (A), то и в $X(s)$ выполнено условие (A). Если в каждом из пространств X_0 и X_1 выполнено условие (B) (или (C)), то и в $X(s)$ выполнено условие (B) (или (C)) (см. [2]).

Пусть теперь X_0, X_1 суть б.ф.п. на (T_1, Σ_1, μ_1), Y_0, Y_1 суть б.ф.п. на (T_2, Σ_2, μ_2), $0 < s < 1$ и $X(s) = X_0^{1-s} X_1^s$, $Y(s) = Y_0^{1-s} Y_1^s$. Пусть R — линейный оператор из $X_0 + X_1$ в $Y_0 + Y_1$, действующий непрерывным образом из X_i в Y_i с нормой M_i $(i = 0, 1)$. Следующая теорема, по существу, известна ([1], [3], [4]).

Теорема. *Пусть выполнено какое-нибудь из следующих трех условий:*

(α) *В* $X(s)$ *выполнено условие* (A).

(β) *В* $Y(s)$ *выполнены оба условия* (B) *и* (C).

(γ) $R \geqslant 0$, *т. е.* $Rx \geqslant 0$ *при* $x \geqslant 0$, $x \in X_0 + X_1$.

Тогда R *действует непрерывно из* $X(s)$ *в* $Y(s)$ *с нормой*

$$M(s) \leqslant M_0^{1-s} M_1^s. \qquad (1)$$

Напомним, что если в б.ф.п. выполнено условие (B), то существует эквивалентная монотонная норма, удовлетворяющая условиям (B) и (C). Поэтому справедливо

Следствие. *Если в* $Y(s)$ *выполнено условие* (B), *то* R *действует непрерывно из* $X(s)$ *в* $Y(s)$.

Возникают естественно два вопроса:

I. *Будет ли* R *действовать из* $X(s)$ *в* $Y(s)$, *если на* X_0, X_1, Y_0, Y_1, R *не накладывать никаких ограничений?*

II. *В условиях следствия* (т. е. если в $Y(s)$ выполнено (B)) *будет ли справедлива оценка* (1)?

Мы приведем примеры, показывающие, что ответы на оба вопроса отрицательны.

Всюду далее б.ф.п. строятся на отрезке $(0,1)$ с лебеговой мерой. Через $\mathbf{1}$ обозначается функция, тождественно равная 1, через e обозначается функция t^{-1} на $(0,1)$.

Пример 1. Пусть X_0 есть пространство всех $x \in S(0, 1)$ таких, что $\|x\|_{X_0} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in (0,1)} \left| \frac{x(t)}{e(t)} \right| < \infty$.

Лемма. *Существует функционал* $f \in X_0^*$ *такой, что*

a) $f \geqslant 0$, *т. е.* $f(x) \geqslant 0$ *при* $0 \leqslant x \in X_0$;

b) $f(\max(x, y)) = \max(f(x), f(y))$ *при* $0 \leqslant x, y \in X_0$;

c) $f(e) = 1$; $f(e^\sigma) = 0$ *при* $0 \leqslant \sigma < 1$.

Доказательство. В силу известной теоремы Крейнов — Какутани существует бикомпактное хаусдорфово пространство K и сохраняющий порядок изометрический изоморфизм H пространства X_0 на $C(K)$, так что $H(e)$ есть функция, тождественно равная 1 на K. Ясно, что существует $p \in K$ такая, что $(H(1))(p) = 0$. Остается положить $f(x) = (H(x))(p)$, $x \in X_0$. Лемма доказана.

Фиксируем функционал f, построенный в лемме, и положим $Y_0 = \{x \in X_0: f(x) = 0\}$ с нормой, индуцированной из X_0. В силу b), Y_0 есть б.ф.п., ибо если $x \in X_0$ и $f(x) = 0$, то $f(|x|) = 0$.

Пусть $X_1 = Y_1 = L^\infty(0,1)$ с обычной равномерной нормой. Заметим, что $X_0 \supset X_1$, $Y_0 \supset Y_1$. Положим

$$Rx = x - f(x)\, e \qquad (x \in X_0).$$

Ясно, что R непрерывно действует из X_0 в Y_0 (ибо $f(Rx) = f(x) - f(x) f(e) = 0$ при $x \in X_0$) и из X_1 в Y_1 (ибо $Rx = x$ при $x \in X_1$). Покажем, что R не действует из $X(s)$ в $Y(s)$ ни при каком $0 < s < 1$. Действительно, ясно, что $e^{1-s} \in X(s)$, но $e^{1-s} \notin Y(s)$. Остается заметить, что $R(e^{1-s}) = e^{1-s}$, ибо $f(e^{1-s}) = 0$.

Пример 2. Пусть X_0, X_1, Y_1, R — те же, что в примере 1, а Y_0 по набору элементов совпадает с X_0, но норма $\|x\|_{Y_0} = \|x\|_{X_0} + kf(|x|)$ $(x \in Y_0)$, где f из леммы, а $k > 0$ — пока произвольное число. Ясно, что R непрерывно действует из X_0 в Y_0, из X_1 в Y_1, из $X(s)$ в $Y(s)$, причем соответствующие нормы удовлетворяют условиям: $M_0 \leqslant 2$, $M_1 = 1$, $\lim\limits_{k \to +\infty} M(s) = +\infty$.

Поступило в редакцию
13 сентября 1971 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кальдерон А. П., Математика 9 : 3 (1965), 56—129. 2. Лозановский Г. Я., Сиб. матем. ж. 10, № 3 (1969), 584—599. 3. Забрейко П. П., Матем. заметки 2, № 6 (1967), 593—598. 4. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., «Наука», 1966.

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Т. 84 (126)

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

РЖМат, 1971, 6Б594

3

МОСКВА · 1971

УДК 519.56

О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах

Б. З. Вулих и Г. Я. Лозановский (Ленинград)

В соответствии с заглавием статья делится по своему содержанию на две части. В первой части (§§ 1—2), посвященной вполне линейным функционалам, представление функционалов дается с помощью произведения элементов в полуупорядоченном пространстве; некоторые из устанавливаемых здесь результатов обобщают и дополняют известные ранее факты. Вторая часть (§ 3) посвящена регулярным функционалам. Насколько нам известно, вопрос о представлении произвольных регулярных функционалов до сих пор в литературе не рассматривался *.

§ 1. Меры, порожденные вполне линейными функционалами

Хорошо известно, что между вполне линейными функционалами в K-пространстве ** и мерами на булевой алгебре его компонент существует тесная связь: каждый вполне линейный функционал есть интеграл по некоторой мере, и, обратно, по мере можно построить вполне линейный функционал. Такой подход к вполне линейным функционалам встречался в работах многих авторов, однако трудно указать статью или книгу, где изучение вполне линейных функционалов с такой точки зрения было бы проведено достаточно отчетливо. Поэтому мы и посвящаем первый параграф нашей работы некоторой систематизации тех сведений о вполне линейных функционалах и мерах, которые используются в дальнейшем. При этом заметим, что хотя все изложенное в этом параграфе (а частично и в § 2) в значительной степени подготовлено уже в книге [7], вышедшей в свет около двадцати лет тому назад, однако там нет приводимых ниже результатов.

Во всей работе под мерой мы понимаем неотрицательную счетно-аддитивную функцию со значениями из расширенной области вещественных чисел ***.

1. Пусть X — K-пространство, а Z — его максимальное расширение; в Z выбрана единица 1, $\mathfrak{E}$ — база (т. е. совокупность единичных элементов) в Z,

* Результаты § 3 целиком принадлежат Г. Я. Лозановскому и частично опубликованы без доказательств в [11].

** Мы пользуемся терминологией из теории полуупорядоченных пространств, принятой в книге [2].

*** Среди многочисленных работ, посвященных мерам на булевых алгебрах, наиболее близки к нашей статье, например, работы Келли [8], [9]. Однако и в них связь между мерами и теорией полуупорядоченных пространств затрагивается лишь незначительно.

$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} \cap X$. Как известно, $\mathfrak{E}$ — полная булева алгебра, $\mathfrak{E}'$ совпадает с $\mathfrak{E}$ в случае, если $1 \in X$, а если $\mathfrak{E}' \neq \mathfrak{E}$, то $\mathfrak{E}'$ уже не является булевой алгеброй, но $\mathfrak{E}'$ — идеал в $\mathfrak{E}$ *.

Рассмотрим положительный вполне линейный функционал f, заданный на X. Сужение функционала f на $\mathfrak{E}'$ ($f|_{\mathfrak{E}'}$), обозначим его через φ, — счетно-аддитивная функция с конечными неотрицательными значениями. При этом, так как функционал f обладает компонентой существенной положительности ([2], теорема VIII. 4.1), $\mathfrak{E}'$ разлагается в прямую сумму двух идеалов $\mathfrak{E}_1'$ и $\mathfrak{E}_2'$ таких, что $\varphi(e) > 0$ для любого $e > 0$ из $\mathfrak{E}_1'$ и $\varphi(e) \equiv 0$ на $\mathfrak{E}_2'$.

Распространим функцию φ на всю алгебру $\mathfrak{E}$, полагая для любого $e \in \mathfrak{E}$

$$\varphi(e) = \sup_{e' \in \mathfrak{E}', e' \leqslant e} \varphi(e'). \tag{1}$$

Легко видеть, что после распространения функция φ остается счетно-аддитивной, но среди ее значений может появиться $+\infty$.

Будем называть эту функцию мерой на алгебре $\mathfrak{E}$, порожденной функционалом f.

Заметим, что мера φ на всей алгебре $\mathfrak{E}$ *полунепрерывна*: если направление $e_\alpha \uparrow e$, то $\varphi(e_\alpha) \to \varphi(e)$. Действительно, полунепрерывность φ на $\mathfrak{E}'$ вытекает из вполне-линейности функционала f, а тогда легко проверяется полунепрерывность φ и на $\mathfrak{E}$. Для конечной меры полунепрерывность равносильна *непрерывности*: если $e_\alpha \downarrow 0$, то $\varphi(e_\alpha) \to 0$. Ясно, что распространение функции φ с $\mathfrak{E}'$ на $\mathfrak{E}$ по формуле (1) — единственное, при котором сохраняется ее полунепрерывность **.

Не всякая мера на $\mathfrak{E}$ порождается некоторым вполне линейным функционалом. Действительно, построенная нами функция φ обладает следующим важным свойством: если $\varphi(e) = +\infty$ для некоторого $e \in \mathfrak{E}$, то существует $e' < e$, $e' \in \mathfrak{E}$, для которого $0 < \varphi(e') < +\infty$. Всякую меру на $\mathfrak{E}$, обладающую этим свойством, будем называть локально конечной. Ясно, что если φ — локально конечная мера на $\mathfrak{E}$, то совокупность $\mathfrak{E}_\varphi^* = \{e : e \in \mathfrak{E}, \varphi(e) < +\infty\}$ — идеал, полный в $\mathfrak{E}$.

Теорема 1.1. *Пусть на алгебре $\mathfrak{E}$ задана локально конечная, полунепрерывная мера φ. Тогда в пространстве Z существует некоторый фундамент X_φ, на котором определен положительный вполне линейный функционал f, порождающий меру φ.*

Доказательство. Для любого $x \in Z_+$ положим

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\varphi(e_\lambda^x),$$

где e_λ^x — характеристика элемента x ***, а затем положим

$$X_\varphi = \{x : x \in Z, f(|x|) < +\infty\}.$$

---

* Заметим, что $\mathfrak{E}'$ полно в $\mathfrak{E}$ в том смысле, что если $e \in \mathfrak{E}$ и $e d \mathfrak{E}'$, то $e = 0$ (d — обозначение дизъюнктности).

** Близкий вопрос — распространение обобщенной аддитивной нормы в K-пространствах — рассматривался в работах А. Г. Пинскера. См. [7] (гл. XI, 3.1).

*** См. [2], гл. VIII, §10, [7], гл. VIII, § 1.

Легко видеть, что X_φ — нормальное подпространство в Z; так как $f(e) = \varphi(e)$ для $e \in \mathfrak{E}$, то $\overset{*}{\mathfrak{E}}_\varphi \subset X_\varphi$, и потому X_φ — фундамент в Z. Функционал f распространяется по аддитивности на все $X_\varphi: f(x) = f(x_+) - f(x_-)$.

Представим 1 в виде $1 = \mathrm{S} e_\xi$, где $e_\xi \in \overset{*}{\mathfrak{E}}_\varphi$, и обозначим через X_ξ компоненту в X_φ, порожденную e_ξ. В [7] (гл. VIII, 1.32) доказано, что функционал f (o)— линеен на X_ξ. Аналогично доказывается, что f также и вполне линеен на каждом из X_ξ. Проверим его вполне-линейность на X_φ.

Пусть $x_\alpha \downarrow 0$ в X_φ. Не теряя в общности, можно считать, что $x_\alpha \leqslant y \in X_\varphi$. Положим $y_\xi = y \wedge e_\xi$. Легко установить, что среди индексов ξ может существовать не более чем счетное множество таких, пусть это будут ξ_n, для которых $f(y_{\xi_n}) > 0$. Далее, из соотношений

$$f(x_\alpha) = \sum_n f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}), \quad f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}) \downarrow 0 \text{ для каждого } n,$$

$$\sum_n f(y_{\xi_n}) = f(y) < +\infty, \quad f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}) \leqslant f(y_{\xi_n})$$

легко получается, что $f(x_\alpha) \to 0$.

Если теперь по f строить порождаемую им меру, то благодаря полунепрерывности φ ясно, что распространение $\varphi|_{\overset{*}{\mathfrak{E}}_\varphi}$ с $\overset{*}{\mathfrak{E}}_\varphi = \mathfrak{E} \cap X_\varphi$ на $\mathfrak{E}$ по формуле (1) приведет на $\mathfrak{E}$ к первоначально заданной там функции φ. Теорема доказана.

Пусть, по-прежнему, X — произвольный фундамент в Z, и предположим, что на X существует достаточное множество вполне линейных функционалов. Выясним, что в этом случае можно сказать о базе $\mathfrak{E}$ K-пространства Z.

Лемма 1. *Если на X существует достаточное множество вполне линейных функционалов, то в X имеется фундамент Y, на котором определен существенно положительный вполне линейный функционал* *.

Доказательство. Разложим X на полное множество попарно дизъюнктных компонент X_ξ ($\xi \in \Xi$), на каждой из которых имеется существенно положительный вполне линейный функционал f_ξ. Примем за Y наименьший фундамент в X, содержащий все X_ξ. Тогда Y состоит из всех элементов вида $y = \sum_{n=1}^{k} x_n$, где $x_n \in X_{\xi_n}$. Если требовать, чтобы $\xi_n \neq \xi_p$ при $n \neq p$, то такое представление элемента y единственно. Полагая $f(y) = \sum_{n=1}^{k} f_{\xi_n}(x_n)$, мы и получим существенно положительный вполне линейный функционал на Y.

Теорема 1.2. *Для того чтобы в K-пространстве X существовал фундамент с достаточным множеством вполне линейных функционалов, необходимо и достаточно, чтобы на базе $\mathfrak{E}$ K-пространства Z существовала локально конечная, существенно положительная мера.*

---

* Функционал f — существенно положителен на Y, если $f(y) > 0$ для любого $y > 0$.

Доказательство. а) Необходимость. Не уменьшая общности, можно считать, что на X имеется существенно положительный вполне линейный функционал *. Мера, порождаемая на $\mathfrak{E}$ этим функционалом, обладает требуемыми свойствами.

б) Достаточность. Пусть μ — существенно положительная, локально конечная мера на $\mathfrak{E}$, а $\mathfrak{E}_\mu^*$ — идеал, на котором она конечна. Из счетной аддитивности μ вытекает, что на $\mathfrak{E}_\mu^*$ она непрерывна (а следовательно, и полунепрерывна). Распространим сужение $\mu|_{\mathfrak{E}_\mu^*}$ на всю алгебру $\mathfrak{E}$ по формуле (1). Получим полунепрерывную локально конечную меру φ **. Тогда по теореме 1.1 в Z существует фундамент Y, на котором определен существенно положительный вполне линейный функционал, а пересечение $X \cap Y$ — фундамент в X, обладающий тем же свойством.

С помощью одной теоремы А. Г. Пинскера ([7], гл. XI, 1.32) из теоремы 1.2 и леммы 1 сразу следует, что *существование на базе Z локально конечной существенно положительной меры равносильно тому, что в Z содержится фундамент, представляющий KB-пространство с аддитивной нормой.*

Теоремы 1.1 и 1.2 могут быть перенесены и на тот случай, когда X — K_σ-пространство, погружающееся в K_σ-пространство с единицей и, следовательно, обладающее максимальным расширением.

2. Реализуем базу $\mathfrak{E}$ K-пространства Z в виде алгебры открыто-замкнутых множеств некоторого экстремально несвязного бикомпакта Q***. Тогда и меру φ, заданную на $\mathfrak{E}$, можно перенести на совокупность открыто-замкнутых множеств в Q. Эту совокупность тоже обозначим через $\mathfrak{E}$. Если рассматривать $\mathfrak{E}$ как алгебру подмножеств в Q, то она не будет σ-алгеброй, так как объединение бесконечного множества открыто-замкнутых множеств не будет открыто-замкнутым. Расширим область определения функции φ так, чтобы она стала σ-алгеброй подмножеств в Q. С этой целью рассмотрим совокупность $\mathfrak{B}$ всех множеств из Q, имеющих вид

$$B = E \triangle N = (E \setminus N) \cup (N \setminus E),$$

где $E \in \mathfrak{E}$, а N — множество 1-й категории в Q. Совершенно элементарно проверяется, что $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, причем она содержит все борелевы множества из Q****. Назовем $\mathfrak{B}$ **канонической** σ-**алгеброй** бикомпакта Q.

---

* Здесь важно то, что всякий фундамент в X является одновременно фундаментом и в Z.

** На самом деле можно доказать, что уже первоначально заданная мера μ полунепрерывна (тем самым, $\varphi = \mu$). Для этого нужно использовать теорему VI.1.1 из [2] и тот факт, что булева алгебра со строго положительной конечной мерой — счетного типа.

*** Если Z — расширенное K_σ-пространство, то $\mathfrak{E}$ реализуется на квази-экстремально несвязном бикомпакте.

**** σ-алгебру $\mathfrak{B}$ рассматривал еще К. Иосида [5]. Включение борелевых множеств в $\mathfrak{B}$ вытекает из того, что каждое замкнутое множество лишь нигде не плотным множеством отличается от своего открыто-замкнутого ядра.

Заметим, что для каждого $B \in \mathfrak{B}$ множества E и N определяются однозначно.

Пусть на алгебре $\mathfrak{C}$ задана мера φ. Если для любого $B \in \mathfrak{B}$ положить $\varphi(B) = \varphi(E)$, то мы распространим функцию φ на всю σ-алгебру $\mathfrak{B}$ с сохранением счетной аддитивности. При этом, если $B \in \mathfrak{B}$ — само 1-й категории, то $\varphi(B) = 0$. Указанное распространение функции φ на σ-алгебру $\mathfrak{B}$ будем называть канонеческим.

Теперь рассмотрим пространство $\mathbf{S}(Q, \mathfrak{B}, \varphi)$ (или коротко $\mathbf{S}(Q)$) измеримых функций, заданных и почти всюду конечных на Q. Эквивалентные функции, как обычно, отождествляются. Меру φ предполагаем локально конечной и существенно положительной на базе $\mathfrak{C}$. В этом случае *пространство* $\mathbf{S}(Q)$ *совпадает* с $\mathbf{C}_\infty(Q)$ * в том смысле, что:

1) всякая функция из $\mathbf{C}_\infty(Q)$ входит в $\mathbf{S}(Q)$;

2) различные функции из $\mathbf{C}_\infty(Q)$ не эквивалентны;

3) каждая функция из $\mathbf{S}(Q)$ эквивалентна некоторой функции из $\mathbf{C}_\infty(Q)$.

Приведем один из возможных вариантов доказательства этого утверждения. Каждое замкнутое множество входит в $\mathfrak{B}$. А тогда ясно, что каждая непрерывная функция на Q измерима, а если она входит в $\mathbf{C}_\infty(Q)$, то почти всюду конечна. Если две непрерывные функции не совпадают на Q тождественно, то они отличаются друг от друга на некотором непустом открытом множестве, которое имеет положительную меру, в силу существенной положительности функции φ. Тем самым такие две функции не эквивалентны, и пространство $\mathbf{C}_\infty(Q)$ вкладывается естественным образом в $\mathbf{S}(Q)$.

С другой стороны, как известно, $\mathbf{S}(Q)$ — расширенное K_σ-пространство (при естественном упорядочении) **, а его база состоит из характеристических функций измеримых множеств и, следовательно, изоморфна алгебре $\mathfrak{C}$, т. е. базе K-пространства $\mathbf{C}_\infty(Q)$. Из полноты базы $\mathfrak{C}$ вытекает, что $\mathbf{S}(Q)$ — тоже K-пространство ([2], теорема V.4.3). Отсюда уже видно, благодаря следствию из теоремы V.5.1 из [2], что при погружении $\mathbf{C}_\infty(Q)$ в $\mathbf{S}(Q)$ образ $\mathbf{C}_\infty(Q)$ заполнит все $\mathbf{S}(Q)$, а это и означает, что каждая функция из $\mathbf{S}(Q)$ эквивалентна некоторой функции из $\mathbf{C}_\infty(Q)$.

Последнее утверждение может быть доказано и прямым путем, без ссылки на свойства расширенных K-пространств ***.

Отметим еще, что в наших условиях бикомпакт Q обладает следующим свойством: всякое его подмножество 1-й категории нигде не плотно ****.

Реализация расширенного K-пространства Z в виде $\mathbf{S}(Q)$ позволяет сделать более прозрачными рассуждения, связанные с использованием

---

* $\mathbf{C}_\infty(Q)$ — расширенное K-пространство, состоящее из всех функций, непрерывных на Q и допускающих бесконечные значения на нигде не плотных множествах ([2], гл. V, § 2).

** Грани конечных и счетных множеств функций из $\mathbf{S}(Q)$ вычисляются поточечно.

*** Ср. [1], стр. 321 или [14], стр. 211.

**** См., например, [4]. Этот результат может быть также выведен из более общей теоремы З. Т. Дикановой ([2], лемма VI.6.1).

интегралов. Вернемся к теореме 1.1; пусть мера φ удовлетворяет поставленным там условиям и притом существенно положительна. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\varphi(e_\lambda^x)$ совпадает с обычным интегралом Лебега от функции $x(q)$ по мере φ, т. е. функционал f, построенный по ходу доказательства теоремы 1.1, имеет вид

$$f(x) = \int\limits_Q x d\varphi, \tag{2}$$

а пространство X_φ, определенное там же, есть не что иное, как пространство $\mathbf{L}(Q, \varphi)$ функций, суммируемых на Q по мере φ. Вполне-линейность функционала f выводится очевидным образом из свойств интеграла *.

Если же мера φ, заданная в теореме 1.1, не будет существенно положительной, то алгебра $\mathfrak{E}$ разлагается на два главных идеала $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ так, что φ существенно положительна на $\mathfrak{E}_1$ и $\varphi(e) \equiv 0$ на $\mathfrak{E}_2$ **. В бикомпакте Q главному идеалу $\mathfrak{E}_1$ соответствует алгебра открыто-замкнутых множеств, содержащихся в некотором открыто-замкнутом $Q_1 \subset Q$. По предыдущему пространства $\mathbf{C}_\infty(Q_1)$ и $\mathbf{S}(Q_1)$ изоморфны, а функционал f записывается в виде интеграла по множеству Q_1, но сохраняется также и формула (2).

3. Остановимся на пространстве $\mathbf{S}(T)$ почти всюду конечных измеримых функций, заданных на произвольном пространстве с мерой $(T, \mathfrak{M}, \mu)$, где $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра измеримых множеств. Как и выше, эквивалентные функции отождествляются. Пространство $\mathbf{S}(T)$ с естественными линеаризацией и упорядочением — K_σ-пространство. В условиях предыдущего пункта это пространство было и K-пространством, однако в общем случае это не так. Приведем пример.

Пусть T — отрезок на вещественной оси, $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра борелевых множеств и для любого $E \in \mathfrak{M}$ мера μE равна числу точек в E, если оно конечно, и $\mu E = +\infty$, если множество E бесконечно. Измеримые функции на T совпадают с бэровскими функциями; а так как $\mu E = 0$ только для пустого множества, то $\mathbf{S}(T)$ состоит из всех конечных бэровских функций, причем не производится никакого отождествления. Но хорошо известно, что бэровские функции не образуют K-пространства ([2], стр. 95).

Вернемся к общему случаю и укажем некоторые достаточные условия, при которых $\mathbf{S}(T)$ оказывается K-пространством. Простейшим достаточным условием для этого оказывается *конечность меры* μ.

Действительно, база пространства $\mathbf{S}(T)$ (если за единицу выбрана функция $x(q) \equiv 1$) состоит из характеристических функций измеримых множеств. Обычным рассуждением проверяется, что если мера μ конечна, то база — счетного типа. Тогда по теореме VI.1.1. из [2] она полна, и по теореме V.4.3 из [2] $\mathbf{S}(T)$ — K-пространство и при этом тоже счетного типа.

* Отметим попутно, что из наших рассуждений вытекает весьма простой способ доказательства известной теоремы Какутани о реализации абстрактных L-пространств [6].

** Главным идеалом называется идеал, содержащий наибольший элемент.

Более общее достаточное условие для того, чтобы $S(T)$ было K-пространством,— *мера* μ *σ-конечна* *. Действительно, в этом случае пространство T представимо в виде суммы счетного множества попарно дизъюнктных измеримых множеств T_n с конечной мерой. По уже доказанному, каждое из пространств $S(T_n)$ — K-пространство счетного типа, а $S(T)$ — их соединение и потому — тоже K-пространство счетного типа.

Легко показать, что если мера μ на T локально конечна, то условие ее σ-конечности также и необходимо для того, чтобы $S(T)$ было K-пространством счетного типа. Однако, если мера μ не σ-конечна, $S(T)$ все же может быть K-пространством, но не счетного типа. Так, например, рассмотрим произвольное несчетное множество T, в качестве $\mathfrak{M}$ возьмем σ-алгебру всех его подмножеств, а меру зададим так же, как в примере с бэровскими функциями. Тогда $S(T)$ состоит из всех вещественных всюду конечных функций на T, оно — K-пространство, мера локально конечна, но не σ-конечна.

4. Известно, что строение пространства $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ играет существенную роль при изучении теоремы Радона — Никодима. Сделаем несколько замечаний по этому поводу. Пусть $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой и на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ задана еще одна мера ν. Как обычно, мера ν называется абсолютно непрерывной относительно μ, если $\mu E = 0$ $(E \in \mathfrak{M})$ влечет $\nu E = 0$. Хорошо известно, что если на меру μ не накладывать никаких ограничений, то теорема Радона — Никодима неверна. Мы приведем без доказательства теорему, по существу установленную И. Сегалом [13] (см. также [9] и [12]), в которой речь будет идти о так называемой локальной теореме Радона — Никодима.

Теорема 1.3. *Для того чтобы для любой меры ν, абсолютно непрерывной относительно μ, существовала и притом единственная (с точностью до эквивалентности по мере μ) измеримая неотрицательная функция f такая, что*

$$\nu E = \int_E f d\mu \tag{3}$$

для любого E с $\mu E < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

1) *мера μ была локально конечной;*

2) *совокупность $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ была K-пространством.*

При этом не требуется, чтобы функция f была почти всюду конечной.

Заметим, что в теореме 1.3 нельзя отказаться от локального характера теоремы Радона — Никодима, т. е. нельзя гарантировать, что при выполнении условий 1)—2) равенство (3) будет иметь место для любого $E \in \mathfrak{M}$**. Однако если теорему 1.3 формулировать для конечной меры ν, то вопрос становится значительно сложнее. Именно, если из условий

* Этот результат указан, например, в [3] (стр. 364). Впрочем заметим, что σ-конечную меру всегда можно заменить конечной с сохранением σ-алгебры измеримых множеств.

** Это подтверждается простым примером: мера μ не σ-конечна, а $\nu E = 0$, если E — множество σ-конечной меры μ, и $\nu E = +\infty$ в противном случае.

1)—2) вытекает справедливость теоремы Радона — Никодима в полном объеме, то проблема Улама о существовании измеримой мощности имеет отрицательное решение. Если же существует конечная мера ν, для которой при выполнении условий 1)—2) теорема Радона — Никодима справедлива только в локальном виде, то в некотором K-пространстве существует (o)-линейный, но не вполне линейный функционал.

§ 2. О представлении вполне линейных функционалов

1. Приведем сначала общую теорему о представлении вполне линейных функционалов в K-пространствах.

Пусть X — K-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов, Z — его максимальное расширение, L — фундамент в Z, представляющий KB-пространство с аддитивной нормой $\|\cdot\|$, $\Phi(x)=\|x_+\|-\|x_-\|$ для любого $x\in L$. Тогда Φ — существенно положительный, вполне линейный функционал на L.

Назовем дуальным к X множество $X'=\{x' : x'\in Z,\ xx'\in L$ для любого $x\in X\}$ *. Ясно, что X' — нормальное подпространство в Z, а из дальнейшего будет видно, что *X' — фундамент в Z*. Впрочем, в этом нетрудно убедиться и непосредственно.

Теорема 2.1. *Общее представление вполне линейных функционалов в K-пространстве X дается формулой*

$$f(x)=\Phi(xy), \tag{4}$$

где y — произвольный элемент из X', определяемый по функционалу f единственным образом. Устанавливаемое тем самым соответствие $f\to y$ между сопряженным (по Накано) пространством $\overline{X}$ и дуальным пространством X' — линейный и структурный изоморфизм.

В частном случае для функционалов, ограниченных относительно Φ (тогда и y — ограниченный элемент из Z), эта теорема была доказана Б. З. Вулихом (см. [7], гл. XI, 2.15). Общая формулировка была приведена без доказательства Г. Я. Лозановским в [10], и ее нетрудно вывести из упомянутой теоремы для ограниченных функционалов **. Другое доказательство теоремы 2.1 было дано Н. Райсом [12]. Здесь мы не останавливаемся на доказательстве и переходим к рассмотрению вопросов, непосредственно примыкающих к этой теореме.

Заметим, что в качестве Φ в теореме 2.1 мог выступать любой существенно положительный вполне линейный функционал, заданный на некотором фундаменте Y в Z. Распространяя его с Y на некоторое расширение, представляющее KB-пространство с аддитивной нормой ([7], гл. XI, 1.32), мы и получим то пространство L, которое используется при опре-

---

* Здесь используется произведение, как известно, имеющее смысл для любых двух элементов из Z. При этом мы считаем, что в Z выделена единица 1.

** Такое доказательство можно найти в диссертации Г. Я. Лозановского, защищенной в Ленинградском университете в 1965 году. По существу же переход к общему случаю уже был намечен в [7] (гл. XI, 2.31).

делении дуального пространства. А теперь ясно, что теореме 2.1 можно придать другую форму, если использовать интегральное представление вполне линейных функционалов.

Теорема 2.2. *Пусть Q — экстремально несвязный бикомпакт, а на его базе (т. е. совокупности открыто-замкнутых множеств) задана локально конечная, существенно положительная мера φ и она канонически распространена на каноническую σ-алгебру $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathbf{L}(Q, \mathfrak{B}, \varphi)$ — подпространство из $\mathbf{S}(Q, \mathfrak{B}, \varphi)$, состоящее из всех суммируемых функций, X — фундамент в $\mathbf{S}(Q)$ и X' состоит из всех $y \in \mathbf{S}(Q)$, для которых $xy \in \mathbf{L}$ при любом $x \in X$. Тогда формула*

$$f(x) = \int_Q xy d\varphi,$$

где $y \in X'$, дает общий вид вполне линейных функционалов на X.

Из теоремы 2.1 можно вывести теорему Радона — Никодима для мер на экстремально несвязном бикомпакте Q. Обозначим через $H(Q)$ множество всех единиц в K-пространстве $\mathbf{C}_\infty(Q)$, т. е. таких элементов $h \in \mathbf{C}_\infty^+(Q)$, для которых $h \wedge x > 0$ при любом $x > 0$ из $\mathbf{C}_\infty(Q)$.

Теорема 2.3. *Пусть на Q заданы две существенно положительные локально конечные меры φ и ψ. Тогда существует такой $h \in H(Q)$, что для любого множества $B \in \mathfrak{B}$*

$$\psi(B) = \int_B h d\varphi. \tag{5}$$

Обратно, если φ — существенно положительная локально конечная мера, а $h \in H(Q)$, то функция ψ, определяемая формулой (5), — тоже локально конечная существенно положительная мера.

Доказательство. Вторая часть теоремы очевидна. Докажем первую. Для этого по теореме 1.1 построим вполне линейный функционал f, действующий на некотором фундаменте $X \subset \mathbf{C}_\infty(Q)$ по формуле

$$f(x) = \int_Q x d\psi.$$

Функционал f существенно положителен. По теореме 2.2 существует такой $h \in \mathbf{S}^+(Q, \mathfrak{B}, \varphi)$ (можно считать, что $h \in \mathbf{C}_\infty^+(Q)$), что

$$f(x) = \int_Q xh d\varphi.$$

Из существенной положительности функционала f вытекает, что $h \in H(Q)$. Таким образом,

$$\int_Q x d\psi = \int_Q xh d\varphi \text{ для любого } x \in X.$$

Если $B \in \mathfrak{B}$ таково, что характеристическая функция $\chi_B \in X$, мы сразу получаем формулу (5). Распространение ее на любое $B \in \mathfrak{B}$ не представляет труда.

2. Теорема 2.2 об изоморфизме между X' и $\overline{X}$ легко переносится на K-пространства, состоящие из измеримых функций на произвольном пространстве с мерой $(T, \mathfrak{M}, \mu)$. Обозначим через L совокупность суммируемых функций на T, через $\mathbf{S}_L$ — компоненту в $\mathbf{S}(T, \mathfrak{M}, \mu)$, порождаемую множеством L. Пусть X — нормальное подпространство в $\mathbf{S}_L$, а $\mathbf{S}_X$ — компонента в $\mathbf{S}_L$, порожденная множеством X. Определим пространство X', дуальное к X:

$$X' = \{x' : x' \in \mathbf{S}_X,\ xx' \in L \text{ для любого } x \in X\}.$$

Если $\mathbf{S}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ — K-пространство, то можно применить теорему 2.1, беря в качестве Φ функционал

$$\Phi(x) = \int\limits_T x d\mu \quad (x \in L),$$

и тогда *общее представление вполне линейных функционалов на X дается формулой*

$$f(x) = \int\limits_T xy d\mu, \text{ где } y \in X'. \tag{6}$$

Однако если $\mathbf{S}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ — только лишь K_σ-пространство, то теорема становится неверной даже для $X = L$, как показывает следующий пример*. Возьмем пространство бэровских функций на отрезке $[a, b]$, рассмотренное в п. 3 из § 1. При той мере, которая была там введена на отрезке $[a, b]$, пространство L состоит из всех функций, отличных от нуля не более, чем в счетном множестве точек, причем $\sum\limits_{t \in [a, b]} |x(t)| < +\infty$. Легко видеть, что дуальное пространство L' состоит из всех ограниченных бэровских функций, а сопряженное пространство $\overline{L}$—из всех ограниченных вещественных функций на отрезке $[a, b]$**.

Покажем, что теорема о представлении вполне линейных функционалов остается в силе в случае, когда $\mathbf{S}(T)$ — K_σ-пространство, при дополнительном условии: если сопряженное пространство $\overline{X}$ счетного типа.

Назовем K_σ-пространство X **почти расширенным**, если всякое счетное множество попарно дизъюнктных элементов $x_n \in X$ ограничено***.

Ясно, что всякая компонента пространства $\mathbf{S}(T)$ — почти расширенное K_σ-пространство. Однако она может не быть расширенной, например, в пространстве бэровских функций — компонента, состоящая из всех функций, обращающихся в 0 на некотором фиксированном не борелевом множестве. Заметим также, что всякая компонента почти расширенного K_σ-пространства — тоже почти расширенное K_σ-пространство.

Предварительно докажем одну лемму, представляющую и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть X — почти расширенное K_σ-пространство, Y — его K-пополнение, а Z — максимальное расширение пространства Y, причем мы*

---

* См. также [15].

** Заметим, что $\mathbf{L}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ — всегда KB-пространство с аддитивной нормой.

*** От определения расширенного K_σ-пространства это отличается тем, что в X не требуется наличия единицы.

считаем, что $X \subset Y \subset Z$. Если U — фундамент в Z, являющийся K-пространством счетного типа, то $U \subset X$.

Доказательство. Пусть сначала X — расширенное K_σ-пространство, и его единицу 1 мы принимаем также за единицу в Y и Z. Тогда база $\mathfrak{E}(Y) = \mathfrak{E}(Z)$ представляет пополнение по Дедекинду базы $\mathfrak{E}(X)$. Покажем, что если $e \in \mathfrak{E}(Z) \cap U$, то $e \in \mathfrak{E}(X)$.

Действительно, во всяком случае e может быть представлено в виде соединения $e = \mathrm{S}e_\xi$, где $e_\xi \in \mathfrak{E}(X)$. При этом все $e_\xi \in U$, а так как U счетного типа, то среди e_ξ может быть лишь не более чем счетное множество отличных от нуля. Но тогда $e \in X$, поскольку X — расширенное, и, тем самым, $e \in \mathfrak{E}(X)$.

Рассмотрим компоненту X_e, порожденную элементом $e \in \mathfrak{E}(X) \cap U$. База этой компоненты, т. е. главный идеал базы $\mathfrak{E}(X)$, порожденный элементом e, — σ-полная булева алгебра счетного типа, и потому она полна ([2], теорема VI.1.1), а тогда X_e — расширенное K-пространство ([2], теорема V.4.3). Следовательно, $X_e = Z_e$, где Z_e — компонента в Z, порожденная элементом e. Но тогда аналогичная компонента $U_e \subset X_e \subset X$.

Пусть $\{e_\xi\}$ — полная система попарно дизъюнктных единичных элементов, входящих в U, U_ξ — компонента в U, порожденная e_ξ. Тогда каждая $U_\xi \subset X$. Любой элемент $t \in U$ представим в виде не более чем счетного соединения $t = \mathrm{S}t_n$, где каждый из t_n входит в одно из U_ξ, и, тем самым, $t_n \in X$. А тогда и $t \in X$, поскольку X — расширенное. Таким образом, $U \subset X$.

Переходим к случаю, когда X — почти расширенное K_σ-пространство без единицы. Выберем в X полную систему попарно дизъюнктных элементов $x_\xi > 0$, и пусть X_ξ, Y_ξ и Z_ξ — компоненты в X, Y и Z (соответственно), порожденные элементом x_ξ, $U_\xi = Z_\xi \cap U$. Тогда Y_ξ — K-пополнение пространства X_ξ, а Z_ξ — максимальное расширение пространства Y_ξ. По уже доказанному $U_\xi \subset X_\xi \subset X$. А тогда, так же, как и выше, доказывается, что и $U \subset X$.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что каждая главная компонента в X, порожденная элементом из U, является расширенным K-пространством. Однако само X не обязано быть K-пространством.

Отметим еще следующее очевидное утверждение, которое используется в дальнейшем. Пусть X — K_σ-пространство, Y — его K-пополнение, Z — максимальное расширение пространства Y и U — фундамент в X, являющийся K-пространством. Тогда U — фундамент в Y и Z, а Z — максимальное расширение пространства U.

Вернемся к пространству измеримых функций на $(T, \mathfrak{M}, \mu)$. Пусть снова X—нормальное подпространство в S_L (см. обозначения, введенные в начале п. 2).

Теорема 2.4. *Если $\widetilde{X}$ — K-пространство счетного типа, то формула* (6) *дает общее представление вполне линейных функционалов в X.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только то, что каждый вполне линейный функционал на X допускает представление по формуле (6).

Обозначим через Y K-пополнение пространства S_X, через Z — максимальное расширение пространства Y, и пусть W — фундамент в Z, порожденный множеством X^*. Наконец, положим $L_X = L \cap \mathbf{S}_X$. Ясно, что W — K-пополнение пространства X, а по предыдущему замечанию L_X — фундамент в Z, причем L_X — KB-пространство с аддитивной нормой:

$$\|x\| = \int_T |x| \, d\mu.$$

Положим

$$\Phi(x) = \int_T x d\mu \quad (x \in L_X).$$

Известно, что каждый вполне линейный функционал, заданный на X, может быть единственным способом распространен на W с сохранением вполне-линейности. Таким образом, K-пространства $\overline{X}$ и $\overline{W}$ изоморфны, и потому $\overline{W}$—K-пространство счетного типа.

Примем за единицу в Z супремум множества всех характеристических функций из $\mathbf{S}_X$ (он существует, так как его можно свести к супремуму дизъюнктных характеристических функций, а K-пространство Z — расширенное). Положим

$$W' = \{w' : w' \in Z, ww' \in L_X \text{ при любом } w \in W\}.$$

По теореме 2.1 между K-пространствами W' и $\overline{W}$ устанавливается естественный линейный и структурный изоморфизм, и, в частности, W' — счетного типа. Тогда, по лемме 2, $W' \subset \mathbf{S}_X$.

Теперь возьмем произвольный функционал $f \in \overline{X}_+$. Пусть $\hat{f}$ — его вполне линейное распространение на W. Тогда существует такой $y \in W'$, что $\hat{f}(w) = \Phi(wy)$. В частности, для любого $x \in X$

$$f(x) = \Phi(xy) = \int_T xy d\mu,$$

и теорема доказана.

Следствие 1. *Если X — K_σ-пространство с единицей* 1, *то X' и $\overline{X}$ изоморфны.*

Доказательство. Покажем, что $\overline{X}$ — счетного типа. Но известно, что функционал $F(f) = f(1)$ вполне линеен на $\overline{X}$ и существенно положителен, а тогда $\overline{X}$ счетного типа по лемме IX. 2.1 из [2].

Следствие 2. *Если X — (b)-рефлексивное (т. е. рефлексивное по Банаху) KB-пространство, то X' и $\overline{X}$ изоморфны.*

Доказательство. В этом случае $X^* = \overline{X}$, а по теореме Огасавара ([2], теорема IX.7.4) X^* — KB-пространство и, следовательно, — счетного типа. Таким образом, применима теорема 2.4.

Доказанное следствие поясняет, почему (b)-сопряженное пространство для $\mathbf{L}^p(T, \mathfrak{M}, \mu)$ при $p > 1$ совпадает с $\mathbf{L}^q(T, \mathfrak{M}, \mu)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ без каких-либо ограничений на пространство T. В то же время $\mathbf{L}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ вообще не

* Это — наименьший фундамент, в который можно погрузить X. Чтобы убедиться в существовании такого фундамента, достаточно образовать пересечение всех фундаментов в Z, содержащих X. Легко видеть, что $z \in W$ тогда и только тогда, когда $z \in Z$ и существует такой $x \in X$, что $|z| \leqslant |x|$.

(b)-рефлексивно, и это и сказывается на том, что $\overline{L}$ не обязано быть счетного типа, а L' может не быть изоморфно $\overline{L}$.

Поскольку $\overline{X}$ — K-пространство при любом X, может возникнуть предположение, что изоморфизм между $\overline{X}$ и X' имеет место всегда, когда X' — K-пространство. Однако следующий пример показывает, что это не так.

Пусть несчетное множество T разбито на два дизъюнктных несчетных множества A и B, и пусть σ-алгебра $\mathfrak{M}$ состоит из всех не более чем счетных подмножеств из T и их дополнений. Положим меру μ равной 1 для любого одноточечного множества в A и равной $+\infty$ для любого одноточечного множества в B, а для остальных множеств из $\mathfrak{M}$ определим μ по аддитивности. Тогда $\mathbf{S}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ — лишь K_σ-пространство.

За X примем подпространство L суммируемых функций. Ясно, что L состоит из функций, у которых носитель не более чем счетен и содержится в A, а значения образуют суммируемое семейство. Компонента $\mathbf{S}_L$ состоит из всех функций $x \in \mathbf{S}$ с носителями, содержащимися в A. Таким образом, если $x \in \mathbf{S}_L$, то $x(t) = 0$ на B, а потому носитель такой функции не более чем счетен. Отсюда следует, что $\mathbf{S}_L$ (а также и само L) — K-пространство. Дуальное пространство L' состоит из всех ограниченных функций, входящих в $\mathbf{S}_L$, и оно — тоже K-пространство. Однако сопряженное пространство $\overline{L}$ состоит из всех ограниченных функций, заданных на T и обращающихся в 0 на B.

3. В качестве приложения теоремы 2.2 покажем, что *в K-пространстве $\mathbf{S}(0, 1)$ * существует фундамент X, на котором имеется достаточное множество регулярных функционалов и нет нетривиальных вполне линейных функционалов.*

Для каждой точки $t_0 \in (0, 1)$ обозначим через $\mathfrak{A}(t_0)$ совокупность всех измеримых множеств из $(0, 1)$, для которых t_0 — точка плотности. Далее, для любого $x \in \mathbf{S}$ положим

$$p_{t_0}(x) = \inf_{A \in \mathfrak{A}(t_0)} \sup_{t \in A} |x(t)|.$$

Легко проверяется, что p_{t_0} — обобщенная монотонная полунорма в $\mathbf{S}$ (т. е. монотонная полунорма, допускающая значение $+\infty$). Система полунорм $\{p_t\}$ $(t \in (0, 1))$ тотальна: если $p_t(x) = 0$ для любого $t \in (0, 1)$, то $x = 0$. Действительно, допустим, что существует такое $a > 0$, что множество $H = \{t : |x(t)| \geqslant a\}$ имеет меру $\mu H > 0$. Тогда, если t_0 — точка плотности множества H, то $p_{t_0}(x) \geqslant a$.

Теперь обозначим через X совокупность всех функций $x \in \mathbf{S}$, для которых $p_t(x) < +\infty$ при любом $t \in (0, 1)$. Так как на X имеется тотальная система монотонных полунорм, то, в силу теоремы Гана — Банаха, на X существует достаточное множество регулярных функционалов. Допустим, что в то же время на X существует нетривиальный вполне линейный функционал f. По-

* За меру μ на $(0,1)$ принимается мера Лебега.

теореме 2.2 он имеет вид

$$f(x) = \int_0^1 xy d\mu,$$

где $y \neq 0$. Существует такое $a > 0$, что $|y(t)| \geqslant a$ на некотором множестве E с $\mu E > 0$. Но тогда все функции из X должны быть суммируемы на множестве E.

Выберем в E какую-нибудь точку плотности t_0 и построим две последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < \ldots < t_0$;
2) $\lim a_n = \lim b_n = t_0$;
3) $\delta_n = \mu([a_n, b_n] \cap E) > 0$;
4) t_0 — точка разрежения множества $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Существование таких последовательностей проверяется элементарно.

Далее подберем положительные числа M_n так, что $\sum_{n=1}^{\infty} M_n \delta_n = +\infty$, и определим функцию $x \in S$, полагая

$$x(t) = \begin{cases} M_n, & \text{если } a_n \leqslant t \leqslant b_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{при прочих } t \in (0, 1). \end{cases}$$

Ясно, что $p_t(x) < +\infty$ для любого $t \neq t_0$. Но так как t_0 — точка разрежения множества B, то $p_{t_0}(x) = 0$. Таким образом, $x \in X$. С другой стороны,

$$\int_E x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a_n, b_n] \cap E} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \delta_n = +\infty,$$

что приводит нас к противоречию.

§ 3. О реализации пространств регулярных функционалов

В предыдущем параграфе было показано, что вполне линейные функционалы на K-пространстве можно реализовать с помощью элементов максимального расширения того же K-пространства. При реализации произвольных регулярных функционалов приходится использовать «более широкое» K-пространство, но и в этом случае оказывается, что регулярные функционалы, заданные на различных нормальных подпространствах одного и того же расширенного K-пространства, могут быть реализованы в некотором другом расширенном K-пространстве, определенным образом связанном с первым.

1. Установим сначала некоторые вспомогательные предложения.

Пусть X — K-пространство, Y — его нормальное подпространство и на Y задан положительный аддитивный функционал f. Для любого $x \in X_+$ положим

$$g(x) = \sup\{f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x, \ y \in Y\}. \tag{7}$$

Ясно, что если $g(x) < +\infty$ для любого $x \in X_+$, то g обладает свойством аддитивности на X_+ и, следовательно, может быть распространен с сохранением этого свойства на все X. Будем в этом случае называть функционал g **минимальным распространением** f с Y на X. Хорошо известно, что если f вполне линеен, то g тоже вполне линеен.

Обозначим через $\widetilde{X}$ пространство, присоединенное к X (т. е. K-пространство регулярных функционалов на X), а через $\widetilde{X}_Y$ — совокупность всех функционалов $f\in\widetilde{X}$, для которых сужение $f|_Y=0$. Ясно, что $\widetilde{X}_Y$ — компонента в $\widetilde{X}$.

Лемма 3. *Если $f\in\widetilde{X}_+$ и $f\mathrm{d}\widetilde{X}_Y$, то f совпадает с минимальным распространением на X своего сужения $f|_Y$.*

Доказательство. Пусть g — минимальное распространение функционала $f|_Y$ с Y на X. Тогда $0\leqslant g\leqslant f$, и потому $g\mathrm{d}\widetilde{X}_Y$. Следовательно $f-g\mathrm{d}\widetilde{X}_Y$ и в то же время $f-g\in\widetilde{X}_Y$. Тем самым, $f-g=0$.

Замечание. Если X — KN-пространство, а Y — его нормальное подпространство с нормой, индуцированной из X, и X^* — пространство (b)-сопряженное к X, то совершенно аналогично определяется совокупность X_Y^*, и она будет компонентой в X^*. При этом для $f\in X_+^*$ справедливо утверждение, аналогичное лемме 3.

Лемма 4. *Если, в условиях предыдущего замечания, для любого $f\in(X_Y^*)^{\mathrm{d}}$* положить $Tf=f|_Y$, то T — линейный и структурный изоморфизм K-пространства $(X_Y^*)^{\mathrm{d}}$* (обозначим это пространство для краткости через U) *на K-пространство Y^*.*

Доказательство. Пусть $g\in Y^*$. Тогда существует такой функционал $h\in X^*$, что $h|_Y=g$. Если $f=\mathrm{Pr}_U h$, то $f\in U$ и $h-f\in X_Y^*$, а потому $Tf=g$. Таким образом, T — отображение на Y^*. Если $Tf=0$ $(f\in U)$, то $f\in X_Y^*$ и, следовательно, $f=0$, т. е. отображение T взаимно однозначно. Легко видеть, что $Tf\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $f\geqslant 0$.

Введем обозначение: если X — произвольное K-пространство, то $\mathfrak{C}(X)$ — булева алгебра его компонент.

Лемма 5. *Пусть Z_1 и Z_2 — расширенные K-пространства, $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$ — единицы в них, T_1 — фундамент в Z_1, T_2 — нормальное подпространство в Z_2, и пусть B — изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{C}(T_1)$ на булеву алгебру $\mathfrak{C}(T_2)$. Тогда существует единственная пара (R,V), где V — компонента в Z_2, а R — изоморфизм K-пространства Z_1 на V, удовлетворяющая условиям:*

1) $R(\mathbf{1}_1)=\mathrm{Pr}_V\mathbf{1}_2$;

2) $R(H)\cap T_2=B(H\cap T_1)$ *для любой компоненты* $H\in\mathfrak{C}(Z_1)$.

Эта лемма почти очевидна: за V нужно принять компоненту в Z_2, порождаемую множеством T_2, и учесть, что по условию базы K-пространств Z_1 и V изоморфны.

2. В этом пункте Z — расширенное K-пространство с фиксированной

---

* Если E — какое-нибудь подмножество в K-пространстве, то E^{d} — его дизъюнктное дополнение, $(X_Y^*)^{\mathrm{d}}$ — дизъюнктное дополнение к X_Y^* в K-пространстве X^*.

единицей 1, X — любое его нормальное подпространство, M — подпространство ограниченных элементов из Z. Введем некоторые обозначения.

Пусть $f \in \widetilde{X}$, $u \in X_+$. Положим для любого $x \in M$

$$f_{(u)}(x) = f(xu).$$

Ясно, что $f_{(u)} \in \widetilde{M}$, а оператор $A_{(u)}$ из $\widetilde{X}$ в $\widetilde{M}$, определяемый формулой $A_{(u)}f = f_{(u)}$, линеен и положителен.

Лемма 6. *Пусть $E \subset \widetilde{X}$ и в $\widetilde{X}$ существует $g = \sup E$. Тогда $A_{(u)}g = \sup\limits_{f \in E} A_{(u)}f$.*

Доказательство. Для любого $x \in M_+$ имеем

$$(A_{(u)}g)(x) = g(xu) = \sup_{\substack{z_1+\ldots+z_n=xu \\ z_1,\ldots,z_n \geqslant 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{f_1(z_1) + \ldots + f_n(z_n)\} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1+\ldots+x_n=x, \\ x_1,\ldots,x_n \geqslant 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{f_1(x_1u) + \ldots + f_n(x_nu)\} =$$

$$= \sup \{(f_1)_{(u)}(x_1) + \ldots + (f_n)_{(u)}(x_n)\} = (\sup_{f \in E} A_{(u)}f)(x).$$

Следствие. а) $|A_{(u)}f| = A_{(u)}|f|$ (очевидно).

б) Если $A_{(u)}f \geqslant 0$, то существует $g \geqslant 0$ $(g \in \widetilde{X})$, для которого $A_{(u)}f = A_{(u)}g$ *.

Действительно, достаточно положить $g = |f|$.

Если Y — произвольное K-пространство, а $v \in Y_+$, то через Y_v обозначается подпространство элементов, ограниченных относительно v:

$$Y_v = \{y:\ y \in Y,\ |y| \leqslant \lambda v \text{ для некоторого } \lambda, \text{ зависящего от } y\}.$$

Лемма 7. *Образ пространства $\widetilde{X}$ при отображении $A_{(u)}$ — нормальное подпространство в $\widetilde{M}$.*

Доказательство. Из того, что по предыдущей лемме оператор $A_{(u)}$ сохраняет грани, сразу следует, что $A_{(u)}(\widetilde{X})$ — линейная подструктура в $\widetilde{M}$. Пусть $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi$, где $\psi \in A_{(u)}(\widetilde{X})$, $\varphi \in \widetilde{M}$. Существует такой $f \in \widetilde{X}_+$, что $\psi = A_{(u)}f$. Для любого $x \in X_u$ положим $h(x) = \varphi(xu^{-1})$ (ясно, что $xu^{-1} \in M$). Тогда $h \in \widetilde{X}_u$, и, если $x \in X_u^+$, то

$$h(x) = \varphi(xu^{-1}) \leqslant \psi(xu^{-1}) = f_{(u)}(xu^{-1}) = f(x).$$

Таким образом, $0 \leqslant h \leqslant f|_{X_u}$. Обозначим через l минимальное распространение функционала h с X_u на X; $l \leqslant f$. При этом, если $x \in M$, то $xu \in X_u$ и

$$l_{(u)}(x) = l(xu) = h(xu) = \varphi(x),$$

т. е. $l_{(u)} = \varphi$ или $\varphi = A_{(u)}l$. Тем самым, $\varphi \in A_{(u)}(\widetilde{X})$.

Следствие. *Если $u, v \in X_+$ и $u \leqslant v$, то $A_{(u)}(\widetilde{X}) \subset A_{(v)}(\widetilde{X})$.*

Действительно, из определения операторов $A_{(u)}$ и $A_{(v)}$ сразу следует, что $A_{(u)} \leqslant A_{(v)}$, а тогда требуемое включение вытекает сразу из доказанной леммы.

* Ясно, что оператор $A_{(u)}$ может не быть взаимно однозначным.

Лемма 8. *Если $f \in \widetilde{X}$, то для того чтобы $f = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$.*

Доказательство. Ясно, что если $f = 0$, то $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$. Обратно, если $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$, то, беря $x = 1$, мы получим, что $f(u) = f_{(u)}(1) = 0$ при любом $u \in X_+$, т. е. $f = 0$.

Лемма 9. *Если $f, g \in \widetilde{X}$, то следующие утверждения равносильны:*

(α) $f \mathrm{d} g$;

(β) $A_{(u)}f \mathrm{d} A_{(u)}g$ *при любом* $u \in X_+$;

(γ) $A_{(u)}f \mathrm{d} A_{(v)}g$ *при любых* $u, v \in X_+$.

Доказательство. (α) $\Rightarrow$ (γ). Используя лемму 6 и следствие из нее, имеем

$$|A_{(u)}f| \wedge |A_{(v)}g| = A_{(u)}|f| \wedge A_{(v)}|g| \leqslant$$

$$\leqslant A_{(u \vee v)}|f| \wedge A_{(u \vee v)}|g| = A_{(u \vee v)}(|f| \wedge |g|) = 0.$$

(γ) $\Rightarrow$ (β). Очевидно.

(β) $\Rightarrow$ (α). Имеем $A_{(u)}(|f| \wedge |g|) = |A_{(u)}f| \wedge |A_{(u)}g| = 0$, а тогда $|f| \wedge |g| = 0$ по лемме 8.

Введем множество $B(\widetilde{X}) = \bigcup\limits_{u \in X_+} A_{(u)}(\widetilde{X})$. Как объединение семейства нормальных подпространств в $\widetilde{M}$, направленного по включению (см. лемму 7 и следствие из нее), $B(\widetilde{X})$ — тоже нормальное подпространство в $\widetilde{M}$. Аналогично, для любой компоненты $H \in \mathfrak{C}(\widetilde{X})$ полагаем $B(H) = \bigcup\limits_{u \in X_+} A_{(u)}(H)$.

Лемма 10. *Если H_1 и H_2 — две взаимно дополнительные компоненты K-пространства $\widetilde{X}$, то $B(H_1)$ и $B(H_2)$ — взаимно дополнительные компоненты K-пространства $B(\widetilde{X})$.*

Доказательство. Множества $B(H_1)$ и $B(H_2)$ дизъюнктны по лемме 9. Произвольный $h \in B(\widetilde{X})$ представим в виде $h = A_{(u)}f$, где $f \in \widetilde{X}, u \in X_+$. Положим

$$f_1 = \mathrm{Pr}_{H_1} f, \quad f_2 = \mathrm{Pr}_{H_2} f.$$

Тогда $h_i = A_{(u)}f_i \in B(H_i)$ $(i = 1, 2)$, а $h = h_1 + h_2$. Отсюда уже сразу следует, что $B(H_1)$ и $B(H_2)$ — компоненты и при этом взаимно дополнительные.

Следствие. а) *Если $H_1 \mathrm{d} H_2$ $(H_1, H_2 \in \mathfrak{C}(\widetilde{X}))$, то $B(H_1) \mathrm{d} B(H_2)$.*

б) *Если $H_1 \neq H_2$, то $B(H_1) \neq B(H_2)$.*

Лемма 11. *Пусть Y — нормальное подпространство в X, $g \in \widetilde{Y}_+$, а f — его минимальное распространение на X. Тогда*

1) $f_{(v)} = g_{(v)}$ *для любого* $v \in Y_+$;

2) *множества $P_1 = \{f_{(u)} : u \in X_+\}$ и $P_2 = \{g_{(v)} : v \in Y_+\}$ порождают в $\widetilde{M}$ одну и ту же компоненту.*

Доказательство. 1) Для любого $x \in M$ и $v \in Y_+$ имеем $g_{(v)}(x) = g(xv) = f(xv) = f_{(v)}(x)$.

2) Из 1) следует, что $P_2 \subset P_1$. Для фиксированного $u \in X_+$ положим $G = \{g_{(v)} : 0 \leqslant v \leqslant u,\ v \in Y\}$ и покажем, что $f_{(u)} = \sup G$. Так как $g_{(v)} \leqslant f_{(u)}$

для любого $g_{(v)} \in G$, то $\sup G$ в $\widetilde{M}$ существует. Обозначим его временно через φ. Теперь достаточно показать, что $f_{(u)}(x) = \varphi(x)$ для любого x из базы $\mathfrak{E}(M)$, поскольку линейные комбинации единичных элементов образуют в M множество, плотное относительно сходимости с регулятором. Но

$$\varphi(x) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u, v \in Y} g_{(v)}(x) = \sup g(xv) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant xu, y \in Y} g(y) = f(xu) = f_{(u)}(x),$$

и лемма доказана.

Лемма 12. *Для произвольной компоненты W из K-пространства $B(\widetilde{X})$ существует такая компонента $H \in \mathfrak{E}(\widetilde{X})$, что $B(H) = W$.*

Доказательство. Положим $H = \bigcap_{v \in X_+} A_{(v)}^{-1}(W)$ и проверим, что H — требуемая компонента.

Ясно, что H — компонента в $\widetilde{X}$ и что $B(H) \subset W$*. Пусть $g \in W_+$. Тогда существуют такие $\varphi \in \widetilde{X}_+$, $u \in X_+$, что $\varphi_{(u)} = A_{(u)}\varphi = g$. Подпространство X_u обозначим для краткости через Y и построим минимальное распространение f функционала $\psi = \varphi|_Y$ на все X. Тогда $f_{(u)} = \varphi_{(u)} = g$. Проверим, что $f \in H$. Это значит, что $f_{(v)} \in W$ при любом $v \in X_+$. По предыдущей лемме достаточно проверить, что $\psi_{(w)} \in W$ при любом $w \in Y_+$. Но для любого $w \in Y_+$ существует такое число $\lambda \geqslant 0$, что $w \leqslant \lambda u$. А тогда

$$\psi_{(w)} \leqslant \psi_{(\lambda u)} = \lambda \psi_{(u)} = \lambda \varphi_{(u)} = \lambda g \in W,$$

и $\psi_{(w)} \in W$.

Из лемм 10 и 12 (см. также следствие из леммы 10) сразу следует, что отображение B есть изоморфизм между булевыми алгебрами компонент K-пространств $\widetilde{X}$ и $B(\widetilde{X})$.

Будем в дальнейшем обозначать максимальное расширение произвольного K-пространства U через $\mathfrak{M}(U)$.

Лемма 13. *Пусть в K-пространствах $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ зафиксированы единицы 1_1 и 1_2 (соответственно). Тогда существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X — компонента в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, а R_X — изоморфизм K-пространства $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ на V_X, удовлетворяющая условиям:*

1) $R_X(1_1) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_2$;

2) $R_X(H) \cap B(\widetilde{X}) = B(H \cap \widetilde{X})$ *для любой* $H \in \mathfrak{E}(\mathfrak{M}(\widetilde{X}))$.

Лемма вытекает из леммы 5. При этом заметим, что V_X — компонента в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, порожденная множеством $B(\widetilde{X})$.

3. Теперь мы введем понятие дизъюнктности для регулярных функционалов, заданных на различных нормальных подпространствах одного и того же расширенного K-пространства. Пусть Z — расширенное K-пространство, X и Y — любые его нормальные подпространства, M — подпространство ограниченных элементов.

Определение. Пусть $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$. Будем говорить, что f и g дизъюнктны ($f \mathrm{D} g$), если $f_{(u)} \mathrm{d}\, g_{(v)}$ в K-пространстве $\widetilde{M}$ для любых $u \in X_+$, $v \in Y_+$.

* Напоминаем, что оператор $A_{(u)}$ сохраняет грани.

Из леммы 9 видно, что в случае, когда $X = Y$, дизъюнктность в новом обобщенном смысле равносильна обычной. Отметим также, что если $g = 0$, то $f \mathrm{D} g$ для любого $f \in \widetilde{X}$.

Лемма 14. *Для любого множества $P \subset \widetilde{Y}$ совокупность*

$$H = \{f : f \in \widetilde{X},\ f \mathrm{D} g \text{ для любого } g \in P\}$$

— компонента в $\widetilde{X}$.

Доказательство. Обозначим через N дизъюнктное дополнение в K-пространстве $\widetilde{M}$ к множеству всех функционалов $g_{(v)}$, где $g \in P$, $v \in Y_+$. Тогда N — компонента в $\widetilde{M}$. Но

$$H = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(N),$$

и, тем самым, H — компонента в $\widetilde{X}$.

Лемма 15. *Если $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{M}$, то соотношение $f \mathrm{D} g$ равносильно тому, что $f_{(u)} \mathrm{d}\, g$ для любого $u \in X_+$.*

Доказательство. Если $f \mathrm{D} g$, то $f_{(u)} \mathrm{d}\, g_{(v)}$ для любых $u \in X_+$, $v \in M_+$. В частности, беря $v = 1$, получим $g_{(v)} = g$, и, следовательно, $f_{(u)} \mathrm{d}\, g$.

Обратно, пусть $f_{(u)} \mathrm{d}\, g$ для любого $u \in X_+$. Если $v \in M_+$, то $v \leqslant C1$ при некотором C, а тогда $|g_{(v)}| = |g|_{(v)} \leqslant C|g|$. Следовательно,

$$|f_{(u)}| \wedge |g_{(v)}| \leqslant |f_{(u)}| \wedge C|g| = 0.$$

Лемма 16. *Пусть $P \subset \widetilde{X}$, а H — компонента в $\widetilde{X}$, порожденная множеством P. Тогда множество*

$$L = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(P)$$

порождает в $B(\widetilde{X})$ компоненту $B(H)$.

Доказательство. Обозначим через W компоненту в $B(\widetilde{X})$, порожденную множеством L. Тогда $W \subset B(H)$. Из доказательства леммы 12 видно, что

$$B^{-1}(W) = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(W),$$

и потому $P \subset B^{-1}(W)$. Отсюда сразу вытекает, что $H \subset B^{-1}(W)$ или $B(H) \subset W$, а, тем самым, $W = B(H)$.

4. Переходим к основным теоремам о реализации пространств регулярных функционалов. По-прежнему Z — расширенное K-пространство, X и Y — любые его нормальные подпространства, M—подпространство ограниченных элементов. В K-пространствах $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ зафиксированы единицы 1_1 и 1_2 (соответственно).

Теорема 3.1. *Существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X — компонента в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, а R_X — изоморфизм K-пространства $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ на V_X', удовлетворяющая условиям:*

1) *для любых* $f \in \widetilde{X}$ и $g \in \widetilde{M}$ *соотношения* $f\,\mathrm{D}\,g$ *и* $R_X f\,\mathrm{d}\,g$ *равносильны;*

2) $R_X(\mathbf{1}_1) = \Pr_{V_X} \mathbf{1}_2$.

Этот оператор R_X будем называть канонической реализацией пространства $\widetilde{X}$.

Доказательство. Мы покажем, что требуемым условиям удовлетворяет пара (R_X, V_X) из леммы 13. В проверке нуждается только условие 1).

Пусть $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{M}$, H — компонента в $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$, порожденная функционалом f, $H_1 = H \cap \widetilde{X}$. Из леммы 14 следует, что соотношения $f\,\mathrm{D}\,g$ и $H_1\,\mathrm{D}\,g$ * равносильны. Последнее, по лемме 15, равносильно тому, что $h_{(u)}\,\mathrm{d}\,g$ для любых $h \in H_1$ и $u \in X_+$, т. е. тому, что $B(H_1)\,\mathrm{d}\,g$. Это же, в свою очередь, по лемме 13, равносильно соотношению $R_X(H)\,\mathrm{d}\,g$. Но так как R_X — изоморфизм, то $R_X(H)$ — компонента в V_X, порожденная функционалом $R_X f$.

Теперь докажем, что требуемая пара — единственная. Пусть (R'_X, V'_X) — еще одна пара, удовлетворяющая условиям теоремы; H и H_1 имеют прежний смысл. Тогда соотношения $R_X f\,\mathrm{d}\,g$ и $R'_X f\,\mathrm{d}\,g$ $(f \in \widetilde{X},\ g \in \widetilde{M})$ равносильны, а потому множества $R_X(H_1)$ и $R'_X(H_1)$ порождают в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ одну и ту же компоненту, т. е. $R_X(H) = R'_X(H)$ для любой компоненты H из $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$. В частности, $V'_X = R'_X(\mathfrak{M}(\widetilde{X})) = R_X(\mathfrak{M}(\widetilde{X})) = V_X$. Кроме того, $R'_X(H) \cap \cap B(\widetilde{X}) = B(H \cap \widetilde{X})$, поскольку R_X обладает этим свойством (см. лемму 13), а тогда единственность R_X вытекает из леммы 13.

Теорема 3.2. *Пусть* $f \in \widetilde{X}$. *Тогда компонента в* $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, *порожденная элементом* $R_X f$, *совпадает с компонентой, порожденной множеством* F *всех функционалов* $f_{(u)}$ $(u \in X_+)$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 и леммы 15 следует, что соотношения $f_{(u)}\,\mathrm{d}\,g$ при любом $u \in X_+$ и $R_X f\,\mathrm{d}\,g$ $(g \in \widetilde{M})$ равносильны. Отсюда уже сразу вытекает, что дизъюнктные дополнения в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ к функционалу $R_X f$ и к множеству F совпадают, следовательно, совпадают и указанные в теореме компоненты.

Теорема 3.3. *Если* $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$, *то соотношения* $f\,\mathrm{D}\,g$ *и* $R_X f\,\mathrm{d}\,R_Y g$ *равносильны.*

Доказательство. По определению соотношение $f\,\mathrm{D}\,g$ равносильно тому, что $f_{(u)}\,\mathrm{d}\,g_{(v)}$ при любых $u \in X_+$, $v \in Y_+$. Последнее же, по теореме 3.2, равносильно дизъюнктности функционалов $R_X f$ и $R_Y g$ **.

Таким образом, рассматривая различные нормальные подпространства в одном и том же K-пространстве Z, мы смогли погрузить пространства, присоединенные к ним, в одно K-пространство $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщенном смысле (D), переходят при погружении в функционалы, дизъюнктные в обычном смысле.

---

* Это значит, что $h\mathrm{D}g$ для любого $h \in H_1$.

** Так как дизъюнктность двух множеств равносильна дизъюнктности порождаемых ими компонент.

Налагая на X и Y некоторые дополнительные ограничения, докажем еще одну теорему.

Теорема 3.4. *Пусть X — KN-пространство, Y — его нормальное подпространство с нормой, индуцированной из X, и в $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ выбрана единица 1_1. Тогда в $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$ можно выбрать единицу 1_2 так, что при канонической реализации пространств $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ будут выполнены следующие условия:*

1) $R_Y(Y^*)$ — компонента в $R_X(X^*)$;

2) если $f\in X^*$, $\varphi=f|_Y$, то $R_Y\varphi$ есть проекция элемента R_Xf на $R_Y(Y^*)$.

Доказательство. Используя обозначения, введенные в начале параграфа, рассмотрим множество $X_Y^*=\{f: f\in X^*,\ f|_Y=0\}$. Положим $U=(X_Y^*)^d$ и будем считать $\mathfrak{M}(X^*)$ (соответственно $\mathfrak{M}(Y^*)$) компонентой в $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ (соответственно в $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$), а $\mathfrak{M}(X_Y^*)$ и $\mathfrak{M}(U)$ — компонентами в $\mathfrak{M}(X^*)$. То отображение T, которое было введено в лемме 4, будем считать продолженным до изоморфизма K-пространства $\mathfrak{M}(U)$ на K-пространство $\mathfrak{M}(Y^*)$. Выберем единицу 1_2 в $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$ так, что

$$\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(Y^*)}1_2=T(\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(U)}1_1). \tag{8}$$

Докажем, что

$$R_XT^{-1}=R_Y|_{\mathfrak{M}(Y^*)}. \tag{9}$$

Пусть $f\in Y^*$, $g\in\widetilde{M}$. Тогда соотношения

$$g\,\mathrm{d}\,R_XT^{-1}f \text{ и } g\,\mathrm{d}\,R_Yf \text{ равносильны.} \tag{10}$$

Действительно, по теореме 3.2 первое из них равносильно соотношению

$$g\,\mathrm{d}\,(T^{-1}f)_{(u)} \text{ для любого } u\in X_+, \tag{11}$$

а второе — тому, что

$$g\,\mathrm{d}\,f_{(v)} \text{ для любого } v\in Y_+. \tag{12}$$

Легко видеть, что если $T^{-1}f\geqslant 0$, то $T^{-1}f$ — минимальное распространение функционала f с Y на X^*. Поэтому применима лемма 11, и множества функционалов $\{(T^{-1}f)_{(u)}\}$ $(u\in X_+)$ и $\{f_{(v)}\}$ $(v\in Y_+)$ порождают в $\widetilde{M}$ одну и ту же компоненту. Следовательно, соотношения (11) и (12) равносильны, и (10) доказано.

Из (10) видно, что $R_XT^{-1}(H)=R_Y(H)$ для любой компоненты $H\in\mathfrak{E}(\mathfrak{M}(Y^*))$. В частности,

$$R_XT^{-1}(\mathfrak{M}(Y^*))=R_Y(\mathfrak{M}(Y^*)). \tag{13}$$

Далее, из (8) вытекает, что

$$R_XT^{-1}(\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(Y^*)}1_2)=R_X(\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(U)}1_1).$$

---

* Ясно, что минимальное распространение (b)-линейного функционала (b)-линейно, а $T^{-1}f$ определяется однозначно.

Следовательно, это — единичный элемент в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, а тогда, в силу (13), он совпадает с $R_Y(\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2)$. Из всего сказанного и вытекает (9) *.

Далее, имеем $R_Y(Y^*) = R_X T^{-1}(Y^*) = R_X(U)$, и потому $R_Y(Y^*)$ — компонента в $R_X(X^*)$.

Пусть теперь $f \in X^*$, $\varphi = f|_Y$. Положим $\psi = f - T^{-1}\varphi$. Тогда $\psi \in X_Y^*$, а

$$R_X f = R_X T^{-1}\varphi + R_X\psi = R_Y\varphi + R_X\psi.$$

Но $R_X\psi \, \mathrm{d} \, R_X U = R_Y(Y^*)$, а потому $R_Y\varphi$ — проекция функционала $R_X f$ на $R_Y(Y^*)$.

Замечание. В условиях теоремы 3.4 $R_Y(\widetilde{Y})$ не обязано быть компонентой в $R_X(\widetilde{X})$ ни при каком выборе единиц. Достаточно рассмотреть $X = L[0, 1]$, $Y = M[0, 1]$.

(Поступила в редакцию 20/V 1969 г.)

Литература

1. Н. Бурбаки, Интегрирование, Москва, изд-во «Наука», 1967.
2. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Москва, Физматгиз, 1961.
3. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, т. 1, Москва, ИЛ, 1962.
4. J. Dixmier, Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Summa Brasil. Math., 2 (1951), 151—182.
5. K. Yosida, On the theory of spectra, Proc. Acad. Tokyo, 16 (1940), 378—383.
6. S. Kakutani, Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, Ann. Math., 42 (1941), 523—537.
7. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
8. J. L. Kelley, Measures on Boolean algebras, Pacif. J. Math., 9 (1959), 1165—1178.
9. J. L. Kelley, Decomposition and representation theorems in measure theory, Math. Ann., 163 (1966), 89—94.
10. Г. Я. Лозановский, О банаховых структурах Кальдерона, ДАН СССР, 172, № 5 (1967), 1018—1020.
11. Г. Я. Лозановский, О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях, ДАН СССР, 188, № 3 (1969), 522—524.
12. N. M. Rice, Multiplication in vector lattices, Canad. J. Math., 20 (1968), 1136—1149.
13. I. E. Segal, Equivalence of measure spaces, Amer. J. Math., 73 (1951), 275—313.
14. Р. Сикорский, Булевы алгебры, Москва, изд-во «Мир», 1969.
15. J. Schwartz, A note on the space L_p^*, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 270—275.

* Если A и B — два изоморфных отображения расширенного K-пространства E_1 на расширенное K-пространство E_2, причем $A(H) = B(H)$ для любой компоненты H из E_1 и $A(1_{E_1}) = B(1_{E_1})$, то $A = B$.

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1971

т. 199, № 3

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 513.737

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ И ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 I 1971)

В работе рассматривается конструкция, позволяющая по заданным банаховым структурам, являющимся фундаментами некоторого расширенного K-пространства, образовать большое число новых банаховых структур с помощью вогнутых функций, удовлетворяющих определенным условиям. Эта конструкция была (для случая пространств измеримых функций) введена Кальдероном ([1]) и изучалась, например, в ([2–5]). Она является существенным обобщением известной конструкции пространств Орлича ([6]). Напомним, что банаховы структуры измеримых функций на пространстве с мерой, так же как и банаховы структуры числовых последовательностей, суть частные случаи общего понятия абстрактной банаховой структуры. Поэтому приводимые в данной статье результаты нетрудно переформулировать для указанных частных случаев.

Мы будем в основном следовать терминологии и обозначениям из теории полуупорядоченных пространств, принятым в ([7]). Напомним, в частности, что KN-пространством называется K-пространство, одновременно являющееся нормированным пространством, с монотонной нормой. Мы будем иметь дело только с банаховыми KN-пространствами, т. е. KN-пространствами, полными по норме. Норма в KN-пространстве X называется универсально полунепрерывной, если из того, что направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in X$, следует, что $\|x_\alpha\|_X \to \|x\|_X$. Норма в KN-пространстве X называется универсально монотонно полной, если из того, что направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ в X и $\sup \|x_\alpha\|_X < +\infty$, следует, что существует $\sup x_\alpha \in X$.

Всюду далее символы W, 1, V, X_1, X_2, Z будут означать следующее: W есть произвольное расширенное K-пространство с фиксированной единицей 1; X_1, X_2, Z суть произвольные банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в W; V есть пространство всех $x \in W$ таких, что

$$\|x\|_V = \inf\{\lambda > 0\colon\ |x| \leqslant \lambda 1\} < +\infty, \tag{1}$$

таким образом V есть KN-пространство ограниченных элементов с сильной единицей 1.

Определение 1. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначим множество всех вещественных вогнутых функций $f(u, v)$, заданных и непрерывных по совокупности аргументов при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, таких, что

$$f(u, 0) = f(0, v) = 0 \quad \text{при всех} \quad u, v \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\lim_{p \to +\infty} f(u, p) = \lim_{q \to +\infty} f(q, v) = +\infty \quad \text{при всех } u, v > 0. \tag{3}$$

Определение 2. Пусть $f \in \mathfrak{A}_2$. Через $f(X_1, X_2)$ обозначим множество всех таких $x \in W$, что

$$|x| \leqslant \lambda f(|x_1|, |x_2|) \tag{4}$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$. Через $\|x\|_{f(X_1, X_2)}$ обозначим инфимум всех возможных λ в неравенстве (4).

Лемма 1. (см. ([5])). *Так построенное пространство $f(X_1, X_2)$ с нормой $\|\cdot\|_{f(X_1, X_2)}$ есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.*

Всюду далее будем дополнительно предполагать, что в W существует фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой, и через J будем обозначать функционал на L, задаваемый формулой

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{5}$$

Замечание 1. Если W есть K-пространство всех конечных измеримых функций (с отождествлением эквивалентных) на некотором пространстве (T, Σ, μ) с вполне σ-конечной мерой μ, то такое L всегда существует. Можно принять $L = L_1(T, \Sigma, \mu)$ и

$$J(x) = \int_T x \, d\mu, \quad x \in L. \tag{6}$$

Определение 3. Дуальным пространством к Z называется пространство Z' всех $x \in W$ таких, что $xz \in L$ при всех $z \in Z$. Норма на Z' задается формулой

$$\|x\|_{Z'} = \sup\{J(|xz|) : z \in Z, \quad \|z\|_Z \leqslant 1\}. \tag{7}$$

Напомним, что $(Z', \|\cdot\|_{Z'})$ есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W. Кроме того, Z' естественным образом можно отождествить с пространством $\overline{Z}$ всех вполне линейных функционалов * на Z.

Всюду далее пусть $M(u)$, $N(v)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций в смысле Красносельского и Рутицкого ([6]), причем никаких дополнительных ограничений на них мы не накладываем. Через $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ обозначим функции, задаваемые при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ формулами

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } u = 0 \\ uN^{-1}(v/u) & \text{при } u \neq 0; \end{cases} \quad \psi(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } v = 0 \\ vM^{-1}(u/v) & \text{при } v \neq 0. \end{cases}$$

Здесь M^{-1} и N^{-1} суть функции, обратные к M и N, рассматриваемым при неотрицательных значениях аргумента.

Заметим, что $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_2$, причем для любых $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ справедливы соотношения

$$\varphi(u, v) = \inf_{a, b > 0} \frac{au + bv}{\psi(a, b)}, \quad \psi(u, v) = \inf_{a, b > 0} \frac{au + bv}{\varphi(a, b)}.$$

Теорема 1 (основная). *Справедливо равенство (по запасу элементов)*

$$(\psi(X_1, X_2))' = \varphi(X_1', X_2'), \tag{8}$$

причем

$$\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \leqslant \|\cdot\|_{(\psi(X_1, X_2))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')}. \tag{9}$$

Никаких дополнительных ограничений на X_1 и X_2 не накладывается.

Замечание 2. Неравенство (9) нельзя усилить. Точнее говоря, если константы $c_1, c_2 > 0$ таковы, что

$$c_1\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \leqslant \|\cdot\|_{(\psi(X_1, X_2))'} \leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \tag{10}$$

при всех возможных W, X_1, X_2, M, N, то $c_1 \leqslant 1$ и $c_2 \geqslant 2$.

* В случае банаховых структур измеримых функций вполне линейные функционалы суть «интегрально представимые» функционалы, т. е. допускающие интегральное представление такого же типа, как функционалы в классических L_p при $1 < p < +\infty$.

Замечание 3. В работе (5) решен вопрос, для каких пар (f, g), где $f, g \in \mathfrak{A}_2$, справедливы равенства

$$(f(X_1, X_2))' = g(X_1', X_2'), \tag{11}$$

$$\|\cdot\|_{(f(X_1, X_2))'} = \|\cdot\|_{g(X_1', X_2')} \tag{12}$$

при всех возможных W, X_1, X_2. Оказывается, что все такие пары суть $f(u, v) = Au^{1-s}v^s$, $g(u, v) = A^{-1}u^{1-s}v^s$, где $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$.

Теорема 2. 1) *Если нормы* $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ на X_1, X_2 *универсально монотонно полны, то этим же свойством обладает и норма* $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$ *на* $\psi(X_1, X_2)$.

2) Если нормы $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ на X_1, X_2 *универсально монотонно полны и одновременно универсально полунепрерывны, то этими же двумя свойствами обладает и норма* $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$ *на* $\psi(X_1, X_2)$.

Замечание 4. Как показывают простые примеры, из того, что нормы $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ только универсально полунепрерывны, не следует, что этим же свойством обладает норма $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$. Однако это справедливо, например, в том случае, когда $M(u)$ есть степенная функция.

Теорема 3. Пусть нормы $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ на X_1, X_2 *универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны. Пусть* $x \in \psi(X_1, X_2)$ *и* $\|x\|_{\psi(X_1, X_2)} = \lambda$.

Тогда найдутся $x_i \in X_i$ *такие, что* $\|x_i\|_{X_i} = 1$ $(i = 1, 2)$ *и*

$$|x| \leqslant \lambda\psi(|x_1|, |x_2|). \tag{13}$$

Определение 4. Пусть X — банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W. Через X_M обозначаем множество во всех $x \in W$ таких, что норма

$$\|x\|_{X_M} = \inf\{\lambda > 0 : M(|x|/\lambda) \in X, \quad \|M(|x|/\lambda)\|_X \leqslant 1\} < +\infty. \tag{14}$$

Через X^N обозначаем множество всех $x \in W$ таких, что найдутся $\lambda > 0$ и $y \in X_+$, удовлетворяющие условиям:

а) $\|y\|_X \leqslant 1$ и $W_x \subset W_y$, где W_x и W_y суть компоненты в W, порожденные x и y, соответственно;

б) $N(|x|/(\lambda y))y \in L$, причем $J(N(|x|/(\lambda y))y) \leqslant 1$.

Через $\|x\|_{X^N}$ обозначим инфимум всех возможных λ.

Нетрудно показать, что $X_M = \psi(X, V)$, $X^N = \varphi(X, L)$, причем имеет место и совпадение соответствующих норм. Поэтому из теоремы 1 как частный случай прямо вытекает

Теорема 4. *Справедливы равенства (по запасу элементов)*

$$(X_M)' = (X')^N, \quad (X^M)' = (X')_N, \tag{15}$$

причем

$$\|\cdot\|_{(X')^N} \leqslant \|\cdot\|_{(X_M)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')^N}, \tag{16}$$

$$\|\cdot\|_{(X')_N} \leqslant \|\cdot\|_{(X_M)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')_N}. \tag{17}$$

$(X^M)'$

Подчеркнем, что на X никаких дополнительных ограничений не накладывается.

Замечание 5. Если в теореме 4 взять $X = L$, то мы получим известные соотношения между пространствами Орлича, построенными по паре дополнительных друг другу N-функций (8).

В заключение приведем один вспомогательный результат о пространствах непрерывных функций, используемый при доказательстве теоремы 1, который, возможно, имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть B — произвольный бикомпакт, $C(B)$ — банахово пространство всех вещественных непрерывных функций на B. Пусть* $E =$

$= C(B) \times C(B)$ *есть обычное декартово произведение, причем естественным образом его банахово сопряженное* $E^* = C(B)^* \times C(B)^*$. *Возьмем произвольный* $0 \leqslant h \in C(B)^*$ *и положим*

$$G(h) = \{(\mu, \nu) \in E^*:\ \mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0, \varphi(\mu, \nu) \overset{\geqslant}{\leqslant} h\}.$$

Тогда множество $G(h)$ *непусто, выпукло и слабо* замкнуто, т. е. замкнуто в топологии* $\sigma(E^*, E)$.

Ленинградская военно-инженерная академия
им. А. Ф. Можайского

Поступило
8 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. P. Calderón, Studia Math., 24, № 2 (1964). [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, ДАН, 170, № 2 (1966). [3] Г. Я. Лозановский, Сиб. матем. журн., 10, № 3 (1969). [4] Г. Я. Лозановский, ДАН, 188, № 3 (1969). [5] Г. Я. Лозановский, Сиб. матем. журн. (в печати). [6] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, 1958. [7] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961.

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Д. Ш. МОГИЛЕВСКИЙ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 II 1971)

1. В работе ([3]) А. Я. Повзнер и И. В. Сухаревский исследовали разрывы функции Грина внутренней краевой задачи для полного уравнения. Методами теории потенциала они доказали, что разрывы сосредоточены на волновых фронтах, а вне фронтов особенностей нет. В настоящей заметке мы получаем аналогичный результат для случая переменных коэффициентов, используя метод В. П. Маслова ([2]). Вначале мы проведем некоторые результаты В. П. Маслова в удобном для нас виде. Рассмотрим оператор

$$F(x, D)\,\psi(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int e^{ikpx} F(x, p) \int e^{-ikp\xi}\psi(\xi)\,d\xi\,dp, \tag{1}$$

где интегралы обозначают преобразование Фурье по n переменным, $px = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$. Мы будем рассматривать операторы типа (1) при $F(x, p) \in C^\infty$, удовлетворяющих условию $|D_x^l D_p^m F(x, p)| \leqslant CM^\alpha$ при $M = \sqrt{p^2 + x^2} > A$. Здесь $D_x^l D_p^m$ — оператор дифференцирования, $A > 0$ — некоторая постоянная, C и α, вообще говоря, зависят от l, m *. Нам потребуется также несколько более общие операторы

$$\hat{F}(x, D) = \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{ik}\right)^j F_j(x, D). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\hat{F}(x, D)\psi(x) = 0. \tag{3}$$

Оператор $\hat{F}(x, D)$ на функциях вида

$$\psi(x) = e^{ik\Phi(x)}V(x, k) = e^{ik\Phi(x)}\sum_j \left(\frac{1}{ik}\right)^j V_j(x) \tag{4}$$

вычисляется асимптотически при $k \to \infty$ по методу стационарной фазы. Проделав такое вычисление для уравнения (3) и приравнивая коэффициенты при степенях k, получим рекуррентную систему

$$F_0(x, \partial\Phi/\partial x) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_l}\frac{\partial F_0}{\partial p_l}\bigg|_{p=\partial\Phi/\partial x} + V_j\,\frac{\partial^2 F_0}{\partial p_l\,\partial p_q}\bigg|_{p=\partial\Phi/\partial x}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_l\,\partial x_q} = W_j, \tag{6}$$

причем W_j алгебраически выражается через Φ, $V_0, \ldots, V_{j-1}$ и их производные. В уравнениях (6) подразумевается суммирование по повторяющимся значкам l, q. Уравнения (5), (6) дают обобщение стандартного лучевого метода ([1]) (или метода ВКБ) на уравнения типа (3). Уравнение (5) есть уравнение эйконала, линии векторного поля $\partial F_0/\partial p|_{p=\partial\Phi/\partial x}$ — лучи, лучевые уравнения ** (6) — обыкновенные линейные дифферен-

* Класс операторов, выделяемых указанным условием, тесно связан с классом псевдодифференциальных операторов ([7]).

** Этот термин не является общепринятым. Иногда уравнения типа (6) называют уравнениями переноса ([8]).

VII

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1971

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XII, № 1 Январь — Февраль 1971 г.

УДК 519.513

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУРАХ С ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ НОРМОЙ

Пусть X — KN-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов. В [1] показано, что норма в X универсально полунепрерывна тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ справедливо $\|x\| = \sup\{|f(x)|: f \in \overline{X} \cap X^*, \|f\| \leqslant 1\}$. В настоящей заметке даются другие условия, эквивалентные универсальной полунепрерывности нормы на X.

1. Обозначения и терминология. Сопряженное к нормированному пространству E обозначается через E^*, U_E — замкнутый единичный шар в E. Пусть V — выпуклое замкнутое множество в нормированном пространстве E, x — граничная точка V, $f \in E^*$, $f \neq 0$ и $f(x) = \sup f(V)$. Тогда f называется *опорным функционалом* к V, а x — *опорной точкой* этого множества. Мы в основном придерживаемся терминологии и обозначений теории полуупорядоченных пространств, принятых в [2]. Напомним некоторые из них. Если X — K-пространство, то $\overline{X}$ означает пространство, сопряженное к X в смысле Накано, т. е. $\overline{X}$ есть K-пространство всех вполне линейных функционалов на X. KN-пространством называется K-пространство X, являющееся одновременно нормированным пространством, в котором норма *монотонна*, т. е. из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$. Норма в KN-пространстве X называется *универсально полунепрерывной* (см. [3], стр. 130), если из того, что направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in X$, следует, что $\sup\|x_\alpha\| = \|x\|$. Норма в X называется *универсально монотонно полной* (см. [3], стр. 130), если из того, что $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ в X и $\sup\|x_\alpha\| < \infty$, следует, что существует $\sup x_\alpha \in X$.

Определение. Элемент x KN-пространства X будем называть *сильным*, если найдется $f \in \overline{X} \cap X^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$.

2. Основной результат. Теорема. *Пусть X — KN-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *норма в X универсально полунепрерывна;*

2) *для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется сильный элемент $y \in X$ такой, что $\|x - y\| < \varepsilon$;*

3) *для любого $x \in X_+$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется сильный элемент $y \in X$ такой, что $(1-\varepsilon)x \leqslant y \leqslant (1+\varepsilon)x$.*

Доказательство. 3) $\Rightarrow$ 2). Напомним, что всякий положительный вполне линейный функционал на K-пространстве имеет компоненту существенной положительности. Отсюда следует, что если $z_1, z_2 \in X$, $|z_1| = |z_2|$

и z_1 — сильный элемент, то и z_2 — сильный элемент. Поэтому достаточно ограничиться случаем $x > 0$. Теперь же остается заметить, что из неравенства $(1-\varepsilon)x \leqslant y \leqslant (1+\varepsilon)x$ следует, что $|y-x| \leqslant \varepsilon x$, откуда $\|y-x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$.

2) $\Rightarrow$ 1). Фиксируем $x \in X$ и возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $y \in X$, $f_0 \in \overline{X} \cap X^*$ такие, что

$$\|x-y\| < \varepsilon, \quad \|f_0\| = 1, \quad f_0(y) = \|y\|.$$

Тогда

$$\sup\{|f(x)|:\ f \in \overline{X} \cap X^*,\ \|f\| \leqslant 1\} \geqslant f_0(x) = f_0(y) + f_0(x-y) \geqslant$$
$$\geqslant \|y\| - \|x-y\| \geqslant \|x\| - 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, для любого $x \in X$ имеет место равенство

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|:\ f \in \overline{X} \cap X^*,\ \|f\| \leqslant 1\}.$$

Из него прямо следует универсальная полунепрерывность нормы в X.

Далее нам понадобится следующий результат Бишопа и Фелпса (см. ([4]), следствие 4 теоремы 2): *если V — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E, то опорные функционалы к V плотны в E^*.*

Нам понадобится также следующая лемма, несложное доказательство которой мы опускаем.

Лемма. *Пусть L — банахово KN-пространство, Y — KN-пространство с полунепрерывной и монотонно полной нормой* (см. ([3]), стр. 127, 129), *являющееся нормальным подпространством в L. Тогда U_Y — замкнутое подмножество в L.*

1) $\Rightarrow$ 3). Обозначим $Y = \overline{X} \cap X^*$, за норму $\|\cdot\|_Y$ на Y примем сужение нормы $\|\cdot\|_{X^*}$. Обозначим через Z максимальное расширение пространства Y, R — оператор канонического вложения X в $\overline{Y}$. Заметим, что $R(X)$ — фундамент в $\overline{Y}$ (см. ([2]), стр. 287, 288). Фиксируем произвольный $x > 0$ в X и число $\varepsilon > 0$. Можно считать, что x *единица* в X (т. е. $x \wedge y > 0$ для любого $y > 0$, $y \in X$), ибо в противном случае вместо X мы стали бы рассматривать главную компоненту в X, порожденную элементом x. Тогда Rx — существенно положительный вполне линейный функционал на Y. В силу известных результатов о распространении вполне линейных функционалов (см. ([5]), стр. 416—420) найдется фундамент L в Z, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой, и существенно положительный вполне линейный функционал J на L такие, что будут выполнены условия: а) $Y \subset L$, б) $\|g\|_L = J(|g|)$ для любого $g \in L$; в) сужение $J|_Y = Rx$. Заметим, что для любого $F \in L^*$ справедливо равенство

$$\|F\|_{L^*} = \min\{\lambda \geqslant 0:\ |F| \leqslant \lambda J\}.$$

Множество U_Y ограничено, выпукло и (в силу леммы) замкнуто в банаховом пространстве L. Поэтому можно применить упомянутый результат Бишопа и Фелпса, взяв $E = L$, $V = U_Y$. Пусть $F \in L^*$ опорен к U_Y в точке $f_0 \in U_Y$ и $\|F - J\|_{L^*} \leqslant \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $|F - J| \leqslant$

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1974 МАТЕМАТИКА № 8 (147)

УДК 513.88

Г. Я. Лозановский

О ТЕОРЕМЕ Н. ДАНФОРДА

1. В заметке дается простое (не зависящее ни от теории векторных мер, ни от теории лифтинга) доказательство известной теоремы Н. Данфорда [1] об интегральном представлении линейных операторов из L^1 в L^p $(p>1)$, причем без предположения о сепарабельности рассматриваемых пространств с мерой. Заметим, что нам не удалось найти в литературе доказательства этой теоремы, в котором бы указанное требование сепарабельности не использовалось существенным образом.

2. Пусть для $i=1, 2$ (T_i, Σ_i, μ_i) есть пространство с неотрицательной счетно аддитивной вполне σ-конечной мерой, $(T, \Sigma, \mu)=(T_1, \Sigma_1, \mu_1)\times(T_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — обычное произведение. Все функции, о которых пойдет речь, предполагаются вещественными и измеримыми, причем эквивалентные отождествляются. Пусть $1<p\leqslant+\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Пусть $L^{(p,\infty)}$ и $L^{(q,1)}$ суть обычные пространства со смешанной нормой [2], состоящие из всех функций $f(t_1, t_2)$ на T таких, что

$$\|f\|_{L(p,\infty)}=\|\,\|f\|_{L^p(\mu_1)}\|_{L^\infty(\mu_2)}<+\infty,\ \|f\|_{L(q,1)}=\|\,\|f\|_{L^q(\mu_1)}\|_{L^1(\mu_2)}<+\infty$$

соответственно. Напомним, что сопряженное пространство к $L^{(q,1)}$ естественным образом отождествимо с $L^{(p,\infty)}$.

Под *слабой** топологией на $L^{(p,\infty)}$ будем понимать топологию $\sigma(L^{(p,\infty)}, L^{(q,1)})$.

3. Теорема (Н. Данфорд). *Пусть $K\in L^{(p,\infty)}$. Тогда оператор A, задаваемый формулой*

$$(Ax)(t_2)=\int_{T_1}K(t_1, t_2)\,x(t_1)\,d\mu_1,\ x\in L^1(\mu_1), \tag{1}$$

есть линейный непрерывный оператор из $L^1(\mu_1)$ в $L^p(\mu_2)$, причем

$$\|A\|=\|K\|_{L(p,\infty)}.$$

Обратно, всякий такой оператор представим в виде (1) *с $K\in L^{(p,\infty)}$.*

Доказательство. Докажем только нетривиальное (второе) утверждение. Не умаляя общности, можно считать, что $A\geqslant 0$ (см. [3], с. 252) и $\|A\|\leqslant 1$. Под *единичным* элементом в $L^1(\mu_1)$ будем понимать характеристическую функцию любого $E\subset T_1$ такого, что $0<\mu_1 E<+\infty$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество всех конечных наборов $U=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ попарно дизъюнктных единичных элементов

$\leqslant \varepsilon J$, т. е. $(1-\varepsilon)J \leqslant F \leqslant (1+\varepsilon)J$. Отсюда $(1-\varepsilon)J|_Y \leqslant F|_Y \leqslant$ $\leqslant (1+\varepsilon)J|_Y$, т. е. $(1-\varepsilon)Rx \leqslant F|_Y \leqslant (1+\varepsilon)Rx$. Так как $R(X)$ — фундамент в $\overline{Y}$, то найдется $y \in X$ такой, что $Ry = F|_Y$. Покажем, что y — требуемый. Из неравенства $(1-\varepsilon)Rx \leqslant Ry \leqslant (1+\varepsilon)Rx$ следует, что $(1-\varepsilon)x \leqslant y \leqslant (1+\varepsilon)x$. Пользуясь упоминавшимся результатом работы ([1]), получим

$$\|y\|_X = \sup\{f(y) : f \in U_Y\} = \sup\{F(f) : f \in U_Y\} = F(f_0) = f_0''(y).$$

Теорема доказана.

3. Замечание. Пусть X — KN-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов. В ([6]) показано, что все элементы в X являются сильными тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A) из определения KB-пространства (см. ([2]), стр. 207), т. е. по терминологии Накано норма в X непрерывна (см. ([3]), стр. 127). Это равносильно $X^* \subset \overline{X}$.

4. Следствие. *Пусть X — полное по норме KN-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов с универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной нормой. Тогда справедливы утверждения:*

1) *Для любого $f \in \overline{X}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой $g \in \overline{X}$, что $\|f - g\|_{X^*} < \varepsilon$ и g опорен к U_X;*

2) *Для любого ненулевого $f \in \overline{X}_+$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой $g \in \overline{X}$, что $(1-\varepsilon)f \leqslant g \leqslant (1+\varepsilon)f$ и g опорен к U_X.*

Поступила в редакцию
28 августа 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mori T., Amemiya I., Nakano H., On the reflexivity of semicontinuous norms, Proc. Japan Acad., 31 (1955), 684—685.
[2] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
[3] Nakano H., Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo, Maruzen CO., LTD, 1950.
[4] Bishop E., Phelps R. R., The support functionals of a convex set, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., 7 (Convexity), (1963), 27—35.
[5] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.
[6] Лозановский Г. Я., Меклер А. А., Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах, Изв. вузов, Математика, 11, (1967), 47—53.

из $L^1(\mu_1)$. Для $U=(u_1, u_2, \dots, u_n)\in\mathfrak{M}$ через $R(U)$ обозначим множество всех $0\leqslant K\in L^{(p,\infty)}$ таких, что $\|K\|_{L(p,\infty)}\leqslant 1$ и

$$\int_{T_1} K(t_1, t_2)\, u_j(t_1)\, d\mu_1 = (Au_j)(t_2),\ j=1, 2, \dots, n.$$

Дальнейшее рассуждение разобьем на ряд этапов.

а) Для любого $U=(u_1, u_2, \dots, u_n)\in\mathfrak{M}$ множество $R(U)\neq\varnothing$. Действительно, простые вычисления показывают, что

$$K(t_1, t_2)=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i(t_1)\, v_i(t_2)}{\|u_i\|_{L^1(\mu)}}\in R(U),\ v_i=Au_i,\ i=1, \dots, n.$$

в) Для любого $U=(u_1, u_2, \dots, u_n)\in\mathfrak{M}$ множество $R(U)$ слабо* компактно. Достаточно показать, что $R(U)$ слабо* замкнуто. Пусть направление $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ из $R(U)$ слабо* сходится к $K\in L^{(p,\infty)}$. Ясно, что $K\geqslant 0$ и $\|K\|_{L_{(p,\infty)}}\leqslant 1$. Фиксируем произвольное $\psi\in L^1(\mu_2)$. Тогда, очевидно, $u_i(t_1)\psi(t_2)\in L^{(q,1)}$, $i=1, 2, \dots, n$; поэтому

$$\int_T K_\gamma(t_1, t_2)\, u_i(t_1)\,\psi(t_2)\, d\mu \to \int_T K(t_1, t_2)\, u_i(t_1)\,\psi(t_2)\, d\mu,$$

откуда, положив $Au_i=v_i$, $i=1, 2, \dots, n$, находим

$$\int_{T_2} v_i(t_2)\,\psi(t_2)\, d\mu_2=\int_{T_2}\Big(\int_{T_1} K(t_1, t_2)\, u_i(t_1)\, d\mu_1\Big)\psi(t_2)\, d\mu_2.$$

В силу произвольности ψ отсюда немедленно следует, что

$$v_i(t_2)=\int_{T_1} K(t_1, t_2)\, u_i(t_1)\, d\mu_1,\ i=1, 2, \dots, n,$$

и тем самым $K\in R(U)$.

с) Так как система множеств $\{R(U): U\in\mathfrak{M}\}$, очевидно, центрирована, то $\bigcap_{U\in\mathfrak{M}} R(U)\neq\varnothing$. Ясно, что $K\in\bigcap_{U\in\mathfrak{M}} R(U)$ и есть требуемое ядро. Теорема доказана.

4. Сохранив идею доказательства, теорему нетрудно обобщить, ибо пространства типа пространств со смешанной нормой можно строить не только из пространств L^p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dunford N. Integration and liner operations. Trans. Amer. Math. Soc., v. 40, 1936, p. 474—494.

2. Benedek A., Panzone R. The spaces L^P with mixed norm. Duke Math. J., v. 28, 1961, p. 301—324.

3. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

г. Ленинград

Поступила
15 IX 1971

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 8
ВЫПУСК 2
АВГУСТ
1970

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 8, № 2 (1970), 187—195

РЖМат, 1970, 12Б662

УДК 513.88

О ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г. Я. Лозановский

Для произвольного нормированного пространства X вводится некоторое множество $(X^{**})^{\pi}$ в X^{**}. Показывается (основной результат), что если X есть KN-линеал, то $\widetilde{X}^* = (X^{**})^{\pi}$, где $\widetilde{X}^*$ — сопряженное по Накано к банахову сопряженному X^*. Тем самым на самом деле $\widetilde{X}^*$ никак не связано с полуупорядоченностью, имеющейся в KN-линеале X. Библ. 7 назв.

Хорошо известно, что полуупорядоченность в банаховой структуре (KB-линеале) X полностью определяет топологию в X, но последняя несет сравнительно мало информации о полуупорядоченности. Однако некоторые свойства полуупорядоченности все же однозначно определяются банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является известная теорема Т. Огасавары: *KB-линеал X является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон, т. е. всякая слабо фундаментальная последовательность в X оказывается слабо сходящейся к некоторому элементу из X.* Некоторые другие результаты подобного типа имеются и в работе автора [6]. Основная цель данной заметки — показать, что для произвольного KN-линеала X пространство $\widetilde{X}^*$ всех вполне линейных функционалов на банаховом сопряженном X^* можно «выделить» из X^{**} без использования какой бы то ни было информации о полуупорядоченности в X (теорема 2). Другие результаты связаны со строением пространств регулярных и вполне линейных функционалов (теоремы 1, 2, 3, 5, 6) и со свойствами операторов в них (теорема 4).

Терминология и обозначения. Сопряженное к нормированному пространству X обозначается через X^*. Через π обозначается оператор канонического вложения X в X^{**}. Множество всех линейных непрерывных операторов из нормированного пространства X в нормированное пространство Y обозначается $H_b(X \to Y)$. Если $U \in H_b(X \to Y)$, то U^* — сопряженный оператор. Если $U \in H_b(X \to Y)$ и существует $U^{-1} \in H_b(Y \to X)$, то U — называется *изоморфизмом* X на Y. Символы m, l^p $(p \geqslant 1)$, c_0, $L^p = L^p(0, 1)$ $(p \geqslant 1)$, $M = L^\infty(0, 1)$, имеют обычный смысл (см. [4], стр. 67—74).

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы в основном следуем монографии [2]. Если X есть K-линеал, то $\widetilde{X}$ означает K-пространство всех регулярных функционалов на X, $\overline{X}$ есть K-пространство всех вполне линейных функционалов на X. Пространство $\overline{X}$ называется также *сопряженным к* X *по Накано*. *KN-линеалом* (*KN-пространством*) называется K-линеал (K-пространство), одновременно являющийся нормированным пространством с монотонной нормой. *KB-линеалом* называется полный по норме KN-линеал. *KB-пространством* называется KN-пространство X, в котором выполнены условия:

(A) если $x_n \downarrow 0$ в X, то $\|x_n\| \to 0$;

(B) если $0 \leqslant x_n \uparrow$ в X и $\lim \|x_n\| < \infty$, то существует $\sup x_n \in X$.

Пусть теперь X — архимедов K-линеал, $u \in X_+$. Через $X(u)$ обозначим множество всех $x \in X$ таких, что

$$\|x\|_u = \inf\{\lambda > 0: |x| \leqslant \lambda u\} < \infty.$$

Следуя [1], будем говорить, что X *нормален в себе*, если $X(u)$ полно по норме $\|\cdot\|_u$ для любого $u \in X_+$. Напомним, что всякое K_σ-пространство нормально в себе.

§ 1. ЛЕММА 1. *Пусть X есть KB-линеал ограниченных элементов, $\{f_t, T\}$ — семейство элементов в X^* такое, что $\Sigma_T |f_t(x)| < \infty$ для любого $x \in X$. Тогда это семейство суммируемо в нормированной топологии пространства X^*.*

Доказательство. Без труда проверяется, что $\Sigma_T |F(f_t)| < \infty$ для любого $F \in X^{**}$. Пространство X^* является KB-пространством, поэтому оно слабо секвенциально полно. Остается заметить, что в слабо секвенциально полном банаховом пространстве E семейство элементов $\{x_s, S\}$ суммируемо в нормированной топологии, если $\Sigma_S |f(x_s)| < \infty$ для любого $f \in E^*$. Этот факт прямо следует, например, из известной теоремы Орлича — Петтиса ([3], стр. 104, 105).

ЛЕММА 2. *Пусть X — архимедов нормальный в себе K-линеал, $\{f_t, T\}$ — точечно ограниченное семейство в $\widetilde{X}$, т. е. $\sup\{|f_t(x)|: t \in T\} < \infty$ для любого $x \in X$. Тогда семейство модулей $\{|f_t|, T\}$ также точечно ограничено.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный $u \in X_+$ и покажем, что

$$\sup\{|f_t|(u): t \in T\} < \infty.$$

Рассмотрим сначала случай $X = X(u)$. Так как X с нормой $\|\cdot\|_u$ есть банахово пространство, то $\widetilde{X} = X^*$ и

$$\sup\{\|f_t\|: t \in T\} = K < \infty.$$

Отсюда ясно, что $|f_t|(u) \leqslant K$ при всех $t \in T$. Пусть теперь X — произвольное. Тогда, рассматривая сужения функционалов f_t на $X(u)$ и пользуясь предыдущим рассуждением, получаем требуемое.

ЛЕММА 3. *Пусть X есть K-линеал, $\{f_t, T\}$ — семейство попарно дизъюнктных элементов в $\widetilde{X}$ такое, что существует соединение $S_T f_t = f \in \widetilde{X}$. Тогда*

$$\sum_T |f_t(x)| < \infty, \ \sum_T f_t(x) = f(x)$$

для любого $x \in X$.

Справедливость леммы без труда выводится из [2], стр. 233, теорема VIII.2.3.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — архимедов нормальный в себе K-линеал, V — нормальное подпространство в $\widetilde{X}$, R — компонента в $\widetilde{X}$, порожденная V. Пусть f — аддитивный и однородный функционал на X. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $f \in R$;

(в) *существует такое семейство $\{f_t, T\}$ из V, что*

$$\sum_T |f_t(x)| < \infty, \ \sum_T f_t(x) = f(x)$$

для любого $x \in X$.

Доказательство (a) $\Rightarrow$ (b). Возьмем максимальное семейство $\{R_t, T\}$ ненулевых попарно дизъюнктных компонент K-пространства R таких, что $f_t = \Pr_{R_t} f \in V$. Ясно, что $f = S_T f_t$, и остается только применить лемму 3.

Доказательство (b) $\Rightarrow$ (a). Прежде всего из леммы 2 следует, что $f \in \widetilde{X}$. Рассмотрим сначала случай, когда X есть KB-линеал ограниченных элементов. В этом случае достаточно применить лемму 1 и воспользоваться тем, что компоненты в X^* замкнуты в нормированной топологии.

Общий случай. Допустим, что $f \notin R$. Тогда найдется такой $g \in \widetilde{X}$, что $|g| \wedge |f| > 0$, но g дизъюнктен R. Пусть $u \in X_+$ такой, что $(|g| \wedge |f|)(u) > 0$. Рассматривая сужения функционалов f, f_t на $X(u)$ и пользуясь предыдущим рассуждением, немедленно получаем противоречие.

Замечание. Как видно из доказательства, условие нормальности в себе K-линеала X несущественно для справедливости (a) $\Rightarrow$ (b). Простые примеры показывают, однако, что оно существенно для справедливости (b) $\Rightarrow$ (a).

Следствие. *Пусть X есть K-пространство, F — аддитивный и однородный функционал на $\overline{X}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $F \in \overline{\overline{X}}$;

(в) *существует такое семейство* $\{x_t, T\}$ *в* X, *что*

$$\sum_T |f(x_t)| < \infty, \quad \sum_T f(x_t) = F(f)$$

для любого $f \in \overline{X}$.

Доказательство. В силу теоремы Накано (см., например, [2], стр. 289, теорема IX.5.2.) образ X при каноническом вложении в $\overline{\overline{X}}$ есть фундамент в $\overline{\overline{X}}$. Остается применить теорему 1.

ЛЕММА 4. *Пусть X есть K-пространство, $\overline{X}$ тотально на X, $g \in \widetilde{X}$, но $g \notin \overline{X}$. Тогда существует такое семейство $\{x_t, T\}$ в X, что:*

(a) $\sum_T |f(x_t)| < \infty$, *для любого* $f \in \widetilde{X}$;

(b) $\sum_T f(x_t) = 0$ *для любого* $f \in \overline{X}$;

(c) $\sum_T g(x_t) \neq 0$.

Несложное доказательство леммы мы опускаем.

§ 2. Пусть E — произвольное нормированное пространство, R — произвольное подмножество в E^*. Подчеркнем, что наличия какого бы то ни было частичного упорядочения в E не требуется.

Определение 1. Через $(E^*)_R$ обозначим множество всех таких $f \in E^*$, что существует семейство $\{f_t, T\}$ в R, удовлетворяющее условиям:

(a) $\sum_T |F(f_t)| < \infty$ для любого $F \in E^{**}$;

(b) $\sum_T f_t(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.

Определение 2. Через $(E^*)^R$ обозначим множество всех $f \in E^*$ таких, что $\Sigma_T f(x_t) = 0$ для любого семейства $\{x_t, T\}$ в E, удовлетворяющего условиям:

(a) $\sum_T |g(x_t)| < \infty$ для любого $g \in E^*$;

(b) $\sum_T g(x_t) = 0$ для любого $g \in R$.

Определение 3. Пусть X — произвольное нормированное пространство. Обозначим: $E = X^*$, $R = \pi(X)$. Полученные согласно определениям 1 и 2 множества $(E^*)_R$ и $(E^*)^R$ в пространстве $E^* = X^{**}$ будем для краткости обозначать через $(X^{**})_\pi$ и $(X^{**})^\pi$ соответственно.

ЛЕММА 5. *Пусть E есть KN-линеал, H — компонента в E^*, $R \subset H$. Тогда $(E^*)_R \subset H$.*

Доказательство. Если E полон по норме, то он нормален в себе и требуемое прямо следует из теоремы 1. В общем же случае нужно перейти к пополнению E по норме.

Замечание. В условиях леммы включение $(E^*)^R \subset H$ не имеет, вообще говоря, места. Например, примем $E = M$ и за H возьмем компоненту всех анормальных функционалов на E. Положим также $R = H$. Без труда проверяется, что тогда $(E^*)^R = E^*$.

ЛЕММА 6. *Пусть X — рефлексивное K-пространство, $Y \subset \overline{X}$, Y тотально на X. Пусть семейство $\{x_t, T\}$ в X удовлетворяет условиям:*

(a) $\sum_T |f(x_t)| < \infty$ *для любого* $f \in \overline{X}$;

(b) $\sum_T f(x_t) = 0$ *для любого* $f \in Y$.

Тогда $\sum_T f(x_t) = 0$ *для любого* $f \in \overline{X}$.

Доказательство: Для любого $f \in \overline{X}$ положим $F(f) = \Sigma_T f(x_t)$. Тогда $F \in \overline{\overline{X}}$ по следствию теоремы 1. В силу рефлексивности X найдется такой $x \in X$, что $F(f) = f(x)$ для любого $f \in \overline{X}$. Тогда $f(x) = 0$ для любого $f \in Y$. Отсюда $x = 0$, тем самым $F = 0$.

ТЕОРЕМА 2.

(a) *Для любого KN-линеала X справедливо*

$$\pi(X) \subset (X^{**})_\pi \subset (X^{**})^\pi = \overline{X}^*.$$

(b) *Для любого KN-пространства X, удовлетворяющего условию* (A), *справедливо*

$$(X^{**})_\pi = \overline{X}^*.$$

Доказательство. (a) Включение $\pi(X) \subset (X^{**})_\pi$ тривиально. Включение $(X^{**})_\pi \subset \overline{X}^*$ следует из теоремы 1, ибо $\pi(X) \subset \overline{X}^*$. Доказываем равенство $(X^{**})^\pi = \overline{X}^*$. Возьмем произвольное семейство $[f_t, T]$ в X^* такое, что $\sum_T |F(f_t)| < \infty$ для любого $F \in X^{**}$ и $\sum_T f_t(x) = 0$ для любого $x \in X$. Так как X^* есть рефлексивное K-пространство, $\pi(X) \subset \overline{X}^*$ и $\pi(X)$ тотально на X^*, то по лемме 6 имеем $\sum_T F(f_t) = 0$ для любого $F \in \overline{X}^*$. Тем самым $\overline{X}^* \subset (X^{**})^\pi$. Пусть $G \in X^{**}$, но $G \notin \overline{X}^*$. В силу леммы 4 найдется такое семейство $[f_t, T]$ в X^*, что $\sum_T |F(f_t)| < \infty$ для любого $F \in X^{**}$, $\sum_T F(f_t) = 0$ для любого $F \in \overline{X}^*$, но $\sum_T G(f_t) \neq 0$. Следовательно, $G \notin (X^{**})^\pi$. Тем самым $(X^{**})^\pi \subset \overline{X}^*$.

Доказываем (b). Так как $\pi(X)$ есть фундамент в $\overline{X}^*$ (см. [2], стр. 293, теорема IX.7.2), то по теореме 1 имеем $(X^{**})_\pi = \overline{X}^*$.

Замечание. Включения в утверждении (a) теоремы 2 нельзя, вообще говоря, заменить знаками равенства. Примем, например, $X = M$. Можно показать, что в этом случае $\pi(X) \neq (X^{**})_\pi \neq (X^{**})^\pi$.

ТЕОРЕМА 3. *Для произвольного KN-линеала X следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *X есть KB-пространство;*

(b) $\pi(X) = (X^{**})_\pi$;

(c) $\pi(X) = (X^{**})^\pi$.

Доказательство. Справедливость (a) $\Rightarrow$ (c) следует из теоремы 2 и того, что для KB-пространства X всегда имеет место $\pi(X) = \overline{X}^*$. Справедливость (c) $\Rightarrow$ (b) тривиальна в силу теоремы 2. Доказываем, что (b) $\Rightarrow$ (a). Прежде всего нетрудно показать, что X полон по норме.

Далее, возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ в X такую, что $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ для любого $f \in X^*$. Из (b) немедленно следует, что найдется такой $x \in X$, для которого $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = f(x)$ при любом $f \in X^*$. Поэтому в X нет подпространства, изоморфного в смысле Банаха пространству c_0. Остается напомнить, что всякий KB-линеал, в котором нет подпространства, изоморфного c_0, является KB-пространством (см. [5]).

§ 3. ЛЕММА 7. *Пусть X и Y — нормированные пространства, $U \in H_b(X \to Y)$.*

Тогда

$$U^{**}((X^{**})^\pi) \subset (Y^{**})^\pi.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный $G \in (X^{**})^\pi$. Возьмем произвольное семейство $[f_t, T]$ в Y^* такое, что $\sum_T |F(f_t)| < \infty$ для любого $F \in Y^{**}$ и $\sum_T f_t(y) = 0$ для любого $y \in Y$. Рассмотрим семейство $[U^* f_t, T]$ в X^*. Для любого $F \in X^{**}$ имеем $\sum_T |F(U^* f_t)| = \sum_T |U^{**}F(f_t)| < \infty$, ибо $U^{**}F \in Y^{**}$. Для любого $x \in X$ имеем $\sum_T U^* f_t(x) = \sum_T f_t(Ux) = 0$. Так как $G \in (X^{**})^\pi$, то из сказанного следует, что $\sum_T G(U^* f_t) = 0$, т. е. $\sum_T U^{**}G(f_t) = 0$. Тем самым $U^{**}G \in (Y^{**})^\pi$.

Из леммы 7 и теоремы 2 прямо вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X и Y — произвольные KN-линеалы, $U \in H_b(X \to Y)$. Тогда $U^{**}(\overline{X}^*) \subset \overline{Y}^*$.*

§ 4. Известно, что в линейной системе E частичное упорядочение можно задать выделением конуса E_+ положительных элементов (см. [2], стр. 59). Разумеется, что E_+ можно при этом выбирать разными способами. Например, одно и то же сепарабельное гильбертово пространство можно упорядочить и по типу l^2, и по типу L^2.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть E — вещественная линейная система, в которой выделены конусы E_+^1 и E_+^2 и на которой заданы две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, так что $(E, E_+^1, \|\cdot\|_1)$ и $(E, E_+^2, \|\cdot\|_2)$ суть банаховы KN-пространства. Обозначим для краткости $E_i = (E, E_+^i, \|\cdot\|_i)$ для $i = 1, 2$. Нас будет интересовать вопрос о связи между сопряженными по Накано пространствами $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$.

ТЕОРЕМА 5. *При сделанных предположениях, если E_1 рефлексивно по Накано и $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$ тотально на E, то $\bar{E}_1 \subset \bar{E}_2$.*

Доказательство. Положим $R = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$. В силу лемм 4 и 6 имеем $(E^*)^R = \bar{E}_1$, где при построении $(E^*)^R$ на E рассматривается любая из эквивалентных норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Так как $R \subset \overline{E}_2$, то согласно определению 2 справедливо $(E^*)^R \subset (E^*)^{\overline{E}_2}$. Остается заметить, что в силу леммы 4 справедливо равенство

$$(E^*)^{\overline{E}_2} = \bar{E}_2.$$

Следствие. *Если оба K-пространства E_1 и E_2 рефлексивны по Накано и $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$ тотально на E, то $\bar{E}_1 = \bar{E}_2$.*

Замечание 1. Простые примеры показывают, что здесь существенны как рефлексивность по Накано пространств E_1 и E_2, так и тотальность $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$ на E.

Замечание 2. А. Пельчинский доказал [7], что пространства m и M изоморфны, т. е. существует взаимно однозначное линейное непрерывное отображение U пространства m на пространство M. Из следствия теоремы 5 прямо вытекает, что *для любого такого изоморфизма U множество $R = U^*(\overline{M}) \cap \overline{m}$ не является тотальным на m.* Докажем это. Допустим, что R тотально на m. Так как m и M рефлексивны по Накано, то тогда по доказанному имеем $U^*(\overline{M}) = \overline{m}$, т. е. U^* осуществляет изоморфизм $\overline{M}$ на $\overline{m}$. Остается заметить, что пространства $\overline{M} = L^1$ и $\overline{m} = l^1$ не изоморфны как банаховы пространства.

В заключение отметим следующее. Пусть E — вещественная линейная система, в которой выделены конусы E_+^1 и E_+^2, так что $E_i = (E, E_+^i)$ $(i = 1, 2)$ суть K-пространства. Из следствия теоремы 1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 6. *Если $\overline{E}_1 = \overline{E}_2$, то $\overline{\overline{E}}_1 = \overline{\overline{E}}_2$.*

Поступило
21.V.1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Векслер А. И., Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия к теории линейных и линейных нормированных структур, Изв. вузов, Математика, № 4 (53), (1966), 13—32.
[2] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
[3] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, М., 1961.
[4] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
[5] Лозановский Г. Я., О банаховых структурах и базисах, Функц. анализ. и его приложения, 1, № 3 (1967), 92.
[6] Лозановский Г. Я., О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности, Докл. АН СССР, 183, № 3 (1968), 521—523.
[7] Pelczyński A., On the isomorphism of the spaces m and M, Bull. Acad. Pol. sci., Série math. astr. et phys. 6 (1958), 695—696.

СОДЕРЖАНИЕ

V

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

РЖМат, 1970, 6Б599

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1970 МАТЕМАТИКА № 1 (92)

УДК 519.55

Г. Я. Лозановский

О БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ С ЕДИНИЦЕЙ

В работе, в основном, используются терминология и обозначения, принятые в [1]. Напомним следующее. Под *K-линеалом* понимается линейная структура. *K-пространством* (*K_σ-пространством*) называется условно полная (условно σ-полная) линейная структура. Говорят, что K-линеал X есть K-линеал *счетного типа*, если всякое ограниченное подмножество попарно дизъюнктных его элементов, отличных от 0, не более чем счетно. Положительный элемент e K-линеала X называется *единицей*, если $x \wedge e > 0$ для любого $x > 0$ $(x \in X)$. *Нормальным подлинеалом* K-линеала X называется всякое его линейное подмножество X_1, удовлетворяющее следующему условию: если $x \in X_1$, $y \in X$ и $|y| \leqslant |x|$, то и $y \in X_1$. Нормальные подлинеалы K_σ-пространства называются *нормальными подпространствами*. *KN-линеалом* называется K-линеал X, являющийся одновременно нормированным пространством, в котором норма монотонна, т. е. из $|x| \leqslant |y|$ $(x, y \in X)$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$. Под *KB-линеалом* понимается полный по норме KN-линеал. Под *$K_\sigma N$-пространством* (*KN-пространством*) понимается KN-линеал, являющийся K_σ-пространством (K-пространством). Наконец, *KB-пространством* называется такое $K_\sigma N$-пространство X, в котором норма удовлетворяет следующим двум дополнительным условиям:

(А) если $x_n \downarrow 0$, т. е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$ и $\inf\{x_n\} = 0$, то $\|x_n\| \to 0$;

(Б) если $0 \leqslant x_n \uparrow$ и $\lim \|x_n\| < \infty$, то существует $\sup\{x_n\} \in X$.

Напомним, что KB-пространство полно по норме.

Пространство, сопряженное к нормированному пространству E, будет обозначаться через E^*. Термин „*рефлексивность*“ будет использоваться только в смысле теории нормированных пространств, а не пространств полуупорядоченных. Мы сначала сформулируем основные результаты работы (теоремы 1, 2 и 3), после чего приведем их доказательства.

Теорема 1. *Для произвольного полного по норме $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в пространстве X^* есть единица;*

(2) *в X выполнено условие* (А) *и имеется существенно положительный функционал $f \in X^*$, т. е. такой, что $f(x) > 0$ для любого $x > 0$ $(x \in X)$.*

Замечание. Нетрудно привести пример такого KB-линеала X, не являющегося $K_\sigma N$-пространством, что в X^* есть единица, но в X условие (А) не выполнено. Таким будет, например, пространство c всех вещественных числовых последовательностей с естественными нормой, упорядочением и линеаризацией.

Теорема 2. *Для произвольного полного по норме $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в пространстве X^* есть единица и X^* счетного типа;*

(2) *в X есть единица и выполнено условие* (А).

Теорема 3. *Для произвольного KB-линеала X, имеющего единицу, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *X рефлексивно;*

(2) *X^{**} и X^{***} суть пространства с единицами;*

(3) *X^{***} есть пространство счетного типа с единицей;*

(4) *X есть KB-пространство, а в X^{**} есть единица.*

Замечание. Нетрудно показать следующее. Если в KB-линеале X каждая главная компонента является рефлексивным банаховым пространством, то и само X рефлексивно. Из сказанного вытекает, например, что произвольный KB-линеал X рефлексивен тогда и только тогда, когда для любой его главной компоненты Y оба пространства Y^{**} и Y^{***} суть пространства с единицами.

Заметим также, что в работе автора [4] имеется несколько критериев рефлексивности другого типа, но близких по форме к приведенным.

Теперь мы приведем несколько лемм, которые нам будут нужны при доказательстве сформулированных теорем.

Лемма 1. *Пусть X есть KN-линеал, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность его элементов, удовлетворяющая условиям:* 1) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$; 2) $x_n > 0$ *при всех* $n = 1, 2, \ldots$; 3) $\inf \|x_n\| > 0$.

Тогда найдется такой $f > 0$ ($f \in X^*$), что $f(x) = 0$ для любого $x \in X$ такого, что $|x| \wedge x_n = 0$ при некотором n.

Доказательство. Для каждого натурального n_0 нетрудно построить функционал $f_{n_0} > 0$ ($f_{n_0} \in X^*$), удовлетворяющий условиям: 1) $\|f_{n_0}\| = 1$, $f_{n_0}(x_{n_0}) = \|x_{n_0}\|$; 2) если $x \in X$ и $|x| \wedge x_{n_0} = 0$, то $f_{n_0}(x) = 0$. Действительно, найдется такой $\varphi_{n_0} > 0$ ($\varphi_{n_0} \in X^*$), что $\varphi_{n_0}(x_{n_0}) = \|x_{n_0}\|$ и $\|\varphi_{n_0}\| = 1$ ([1], с. 278, теорема IX, 4.2). Для любого $x \in X$ положим

$$f_{n_0}(x) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_{n_0}(x_+ \wedge kx_{n_0}) - \lim_{k \to +\infty} \varphi_{n_0}(x_- \wedge kx_{n_0}).$$

Ясно, что функционал f_{n_0} требуемый.

Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как единичный шар пространства X^* бикомпактен в слабой* топологии, то ([2], с. 41) указанная последовательность имеет в этой топологии обобщенную предельную точку f. Легко видеть, что этот функционал f является искомым.

Лемма 2. *Пусть X есть KN-линеал, и $a > 0$ ($a \in X$). Обозначим через X_a наименьший замкнутый по норме нормальный подлинеал в X, содержащий элемент a.*

Тогда для любого $x \geqslant 0$ ($x \in X_a$) справедливо $\|x - (x \wedge na)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Доказательство. Пусть $x \geqslant 0$ ($x \in X_a$), $y \geqslant 0$ ($y \in X_a$), причем при некотором n справедливо неравенство $y \leqslant na$. Тогда очевидно, что $x - (x \wedge na) \leqslant |x - y|$, и, следовательно, $\|x - (x \wedge na)\| \leqslant \|x - y\|$. Из этого замечания и вытекает справедливость леммы 2.

Лемма 3. *Пусть X есть KN-линеал, Y — его нормальный подлинеал, причем на Y мы рассматриваем норму, индуцированную из X. Если в пространстве X^* есть единица, то Y^* тоже есть пространство с единицей.*

Доказательство. Если $f \in X^*$, то через f_0 будем обозначать сужение f на Y. Пусть F есть единица в X^*. Убедимся, что тогда F_0 есть единица в Y^*. Для этого возьмем произвольный $\varphi > 0$ ($\varphi \in Y^*$) и покажем, что $F_0 \wedge \varphi > 0$. Найдется такой $f > 0$ ($f \in X^*$), что $f_0 = \varphi$, и такой $y > 0$ ($y \in Y$), что $f_0(y) = \varphi(y) > 0$. Так как F есть единица в X^*, то $(f \wedge nF) \uparrow f$ при $n \to \infty$. Следовательно, $(f \wedge nF)(y) \uparrow f(y)$ при $n \to \infty$. Поэтому найдется такое натуральное n_0, что $(f \wedge \wedge n_0F)(y) > 0$. Так как $(f \wedge n_0 F) \leqslant n_0 (f \wedge F)$, то $(f \wedge F)(y) > 0$. Но $(f \wedge F)(y) = (f_0 \wedge F_0)(y) = (\varphi \wedge F_0)(y)$. Следовательно, $\varphi \wedge F_0 > 0$.

Доказательство теоремы 1. Справедливость импликации (2) $\Longrightarrow$ (1) прямо следует из теорем IX.4.3, IX.2.2, леммы IX.2.1, теоремы VIII.4.4 монографии [1]. Доказываем, что (1) $\Longrightarrow$ (2). Допустим, что в X не выполнено условие (А). Тогда ([3], теорема 1) найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из X, удовлетворяющая условиям: 1) $x_n > 0$, $\|x_n\| > 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$; 2) $x_m \wedge x_n = 0$ при всех $m \neq n$; 3) существует $z = \sup x_n \in X$.

Обозначим через Y наименьшее замкнутое по норме нормальное подпространство в X, содержащее z. На Y рассматриваем норму, индуцированную из X. Обозначим через F единицу пространства Y^*, существование которой вытекает из леммы 3. Отметим также утверждение, которое следует из леммы 2: если $f > 0$ ($f \in Y^*$), то $f(z) > 0$.

Обозначим через N множество всех натуральных чисел, а через J_∞ — множество всех последовательностей, состоящих из чисел 0 и 1. Таким образом, если $j \in J_\infty$, то $j = (j_1, j_2, \ldots)$, где каждое j_k есть 0 или 1. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ через J_k обозначим множество всех упорядоченных наборов $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, где каждое j_n ($1 \leqslant n \leqslant k$) есть число, равное 0 или 1. Далее, по каждому $k = 1, 2, \ldots$ и каждому $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J_k$ построим множество $N(j) = N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, элементами которого являются натуральные числа, так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) при любом k и любом $j \in J_k$ множество $N(j)$ бесконечно; 2) если при некотором k $j^{(1)} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_k^{(1)}) \in J_k$, $j^{(2)} = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, \ldots, j_k^{(2)}) \in J_k$ и $j_k^{(1)} \neq j_k^{(2)}$, то множества $N(j^{(1)})$ и $N(j^{(2)})$ не пересекаются, т. е. $N(j^{(1)}) \cap N(j^{(2)}) = \varnothing$; 3) при любом k и любом $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J_k$ справедливы включения $N(j_1, j_2, \ldots, j_k, 0) \subset N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ и $N(j_1, j_2, \ldots, j_k, 1) \subset N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$.

Такая система множеств строится методом индукции. Введем, наконец, следующие обозначения. Если $j = (j_1, j_2, \ldots) \in J_\infty$, то при любом натуральном k положим $j^{(k)} = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J_k$. Возьмем теперь произвольное $j \in J_\infty$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ положим $z_k^{(j)} = \sup \{x_n : n \in N(j^{(k)})\}$. Получим последовательность $\{z_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям леммы 1. Построим теперь функционал $f_j > 0$ ($f_j \in Y^*$), существование которого утверждается в лемме 1. Рассмотрим семейство функционалов $\{f_j : j \in J_\infty\}$. Ясно, что при любых $j, j' \in J_\infty$, $j \neq j'$, справедливо $f_j \wedge f_{j'} = 0$. Для любого $j \in J_\infty$ положим

V

V

$\varphi_j = f_j \wedge F$. Так как F — единица в Y^*, то $\varphi_j > 0$. Поэтому $\varphi_j(z) > 0$ при любом $j \in J_\infty$. Возьмем произвольное конечное подмножество $K \subset J_\infty$. Так как $\varphi_j \leqslant F$ при всех $j \in J_\infty$ и $\varphi_j \wedge \varphi_{j'} = 0$ при всех $j \neq j'$, то $\sum\limits_{j \in K} \varphi_j \leqslant F$.

Следовательно, $\sum\limits_{j \in K} \varphi_j(z) \leqslant F(z)$. Отсюда следует, что множество $\{ j \in J_\infty : \varphi_j(z) > 0 \}$ не более чем счетно. Это противоречит тому, что $\varphi_j(z) > 0$ при всех $j \in J_\infty$ и J_∞ имеет мощность континуума. Противоречие получено. Итак, доказано, что в X выполнено условие (А). Наличие в X существенно положительного функционала f теперь устанавливается без труда. Теорема 1 доказана.

Замечание. Фактически доказано несколько больше, чем утверждается в теореме 1. Именно, дополнительно установлено следующее. Пусть X — полное по норме $K_\sigma N$-пространство, $\overline{X}$ есть K-пространство всех вполне линейных функционалов на X, $\overline{X}^d$ — дизъюнктное дополнение $\overline{X}$ в X^*. Тогда, если $\overline{X}^d \neq \{0\}$, то в $\overline{X}^d$ нет единицы, и в $\overline{X}^d$ существует континуальная система, состоящая из ненулевых попарно дизъюнктных элементов. В частности, отсюда следует, что если $\overline{X}^d$ конечномерно как линейное множество, то $\overline{X}^d = \{0\}$. Заметим в связи с этим, что существуют KB-линеалы, например, уже упомянутое пространство c, такие, что $\overline{X}^d$ конечномерно, но $\overline{X}^d \neq \{0\}$.

Доказательство теоремы 2. Справедливость импликации $(2) \Longrightarrow (1)$ хорошо известна. Доказываем $(1) \Longrightarrow (2)$. Из теоремы 1 следует, что в X выполнено условие (А), и, следовательно, $\overline{X} = X^*$. Так как $\overline{X}$ по условию счетного типа с единицей, то в X любая система, состоящая из ненулевых попарно дизъюнктных элементов, не более чем счетна. Отсюда легко следует существование единицы в X. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Нам понадобятся следующие хорошо известные факты из [1]:

(а) если X — произвольный KN-линеал, то в X^* выполнено условие (Б), и X^* есть K-пространство;

(б) всякое KB-пространство есть пространство счетного типа;

(в) если X есть KB-пространство с единицей, то X^* есть пространство счетного типа с единицей;

(г) (теорема Огасавары) для того чтобы KB-линеал X был рефлексивен, необходимо и достаточно, чтобы X и X^* были KB-пространствами.

Отсюда немедленно следует справедливость импликаций $(1) \Longrightarrow (2)$, $(1) \Longrightarrow (3)$, $(1) \Longrightarrow (4)$. Доказываем $(2) \Longrightarrow (1)$. Если X^{**} и X^{***} суть пространства с единицами, то в силу теоремы 1 в X^* и X^{**} выполнено условие (А). В силу (а) X^* и X^{**} являются KB-пространствами и, следовательно, по (г) пространство X^* рефлексивно. Отсюда вытекает рефлексивность самого пространства X. Доказываем $(3) \Longrightarrow (1)$. В силу теоремы 2 в X^{**} выполнено условие (А) и есть единица. Тогда по теореме 1 в X^* тоже выполнено условие (А), и, следовательно, X^* и X^{**} являются KB-пространствами. Отсюда, как и ранее, следует рефлексивность пространства X. Аналогично доказывается справедливость импликации (4) $\Rightarrow$ (1).

г. Ленинград

Поступило
12 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., ИИЛ, 1962.
3. Лозановский Г. Я., Меклер А. А. Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах. Изв. вузов, Матем., 1967, № 11, с. 47—53.
4. Лозановский Г. Я. О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности. ДАН СССР, т. 183, № 3, 1969, с. 521—523.

<u>Следствие</u> Пусть X - банахово K_bN-пр-во. Если в $\overline{X}^d$ есть единица, то в X выполнено (A).

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1973 МАТЕМАТИКА № 4 (131)

УДК 513.88

Г. Я. Лозановский

О ФУНКЦИЯХ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ

В теории полуупорядоченных пространств и ее приложениях важную роль играет введенное Л. В. Канторовичем понятие *функции от элементов линейной структуры*. В частности, это понятие используется в различных конструкциях, связанных с преобразованиями одних банаховых структур в другие. Полезно оно и в теории меры (см. [1], гл. V, § 5). Это понятие исследовалось, например, в работах [3], [4], [7], [8], [16], [17], причем даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. В настоящей работе дается новое определение функции от элементов архимедова K-линеала (определения 1 и 3), которое, по-видимому, является не менее общим, чем известные ранее, но, как нам кажется, более приспособлено для приложений. Мы показываем, в частности, что всякое расширенное K-пространство замкнуто относительно операции взятия бэровской функции от своих элементов (теорема 1 и следствие из нее). Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный K-линеал был замкнут относительно взятия непрерывной положительно однородной функции своих элементов (теорема 2). Имеются и другие результаты о непрерывных функциях от элементов K-линеала (теоремы 3—5). Наконец, в последнем параграфе с помощью полученных результатов в весьма общей ситуации исследуется конструкция, позволяющая по заданному KN-линеалу X строить новый KN-линеал $X_p\,(p>1)$, подобно тому, как из обычного пространства L строится пространство L_p (теорема 6). Заметим, что эта конструкция (степенное преобразование нормы) изучалась также в работах [6], [9] — [11].

Предварительные сведения, обозначения и терминология

В работе используются терминология и обозначения из теории полуупорядоченных пространств, принятые в [4]. Напомним следующее. Под *K-линеалом* (*K-пространством*) понимается линейная структура (условно полная линейная структура). Под *KN-линеалом* (*KN-пространством*) понимается K-линеал (K-пространство), одновременно являющийся нормированным пространством, причем норма монотонна. Под *KB-линеалом* понимается полный по норме KN-линеал. Положительный элемент e K-линеала X называется *единицей*, если $x \wedge e > 0$ для любого $x>0$ $(x \in X)$. K-пространство X называется *расширенным*, если любое множество его попарно дизъюнктных элементов ограничено (см. [4], гл. V, § 5). *Максимальное расширение* K-пространства X обозначается через $\mathfrak{M}(X)$; при этом мы всегда будем считать, что $X \subset \mathfrak{M}(X)$ естественным образом (см. [4], гл. V, § 6). Если X —

архимедов K-линеал, то через $\hat{X}$ обозначается его *K-пополнение* (*пополнение по Дедекинду*), причем мы всегда будем считать $X \subset \hat{X}$ естественным образом (см. [4], гл. IV, § 11). Итак, по любому архимедову K-линеалу X можно построить расширенное K-пространство $\mathfrak{M}(\hat{X})$, причем $X \subset \mathfrak{M}(\hat{X})$ естественным образом.

Через Q всюду обозначается *экстремальный бикомпакт*, т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство, в котором замыкание любого открытого множества снова есть открытое множество. Через $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех вещественных непрерывных функций, заданных на Q, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $\pm\infty$. Напомним, что при естественных линеаризации и частичном упорядочении $C_\infty(Q)$ есть расширенное K-пространство (см. [4], гл. V).

Пусть X — архимедов K-линеал, $Q = Q(X)$ — стоунов экстремальный бикомпакт полной булевой алгебры всех компонент X, и пусть в $\mathfrak{M}(\hat{X})$ зафиксирована единица e. Тогда существует (в определенном смысле единственный) изоморфизм h K-пространства $\mathfrak{M}(\hat{X})$ на K-пространство $C_\infty(Q)$, такой, что he есть функция, тождественно равная единице на Q. Этот оператор $h\colon \mathfrak{M}(\hat{X}) \to C_\infty(Q)$ будем называть *естественной реализацией* K-линеала X, соответствующей единице e.

Пусть X — архимедов K-линеал, $u \in X_+$. Полагаем $X_{(u)} = \{x \in X : |x| \leqslant \lambda u$ для некоторого числа $\lambda > 0\}$ и $\|x\|_u = \min\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda u\}$ для $x \in X_{(u)}$. Напомним, что $(X_{(u)}, \|\cdot\|_u)$ есть KN-линеал. При этом X называется *(r)-полным*, если для любого $u \in X_+$ норма $\|\cdot\|_u$ банахова, т. е. $(X_{(u)}, \|\cdot\|_u)$ есть *KB-линеал ограниченных элементов*. Архимедовы (r)-полные K-линеалы изучались, например, в [2].

Через N обозначается множество всех натуральных чисел. Через R^n обозначается n-мерное эвклидово пространство, причем, как обычно, $R = R^1$ есть вещественная прямая.

Если T — некоторое множество, то $S(T)$ означает алгебру всех конечных вещественных функций на T. Если T — топологическое пространство, то $C(T)$ означает алгебру всех конечных вещественных непрерывных функций на T. Через $CH(R^n)$ обозначаем множество всех положительно однородных непрерывных функций на R^n, т. е. таких $f \in C(R^n)$, что $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x \in R^n$ и всех $0 \leqslant \lambda \in R$.

§ 1. Основные определения и некоторые следствия из них

Определение функции от элементов K-пространства может быть дано как с помощью аппарата булевых мер (см. [4], гл. XI, § 7), так и на основе естественной реализации. Мы воспользуемся вторым из указанных подходов.

Пусть W — расширенное K-пространство, в котором зафиксирована единица e, $h : W \to C_\infty(Q)$ — соответствующая естественная реализация. Фиксируем $n \in N$, множество $T \subset R^n$ и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in W$. Положим $H = \{t \in Q : (hx_1(t), hx_2(t), \ldots, hx_n(t)) \in T\}$. Будем дополнительно предполагать, что $Q \setminus H$ есть множество первой категории в Q. Это условие, разумеется, выполняется автоматически, если $T = R^n$.

Определение 1. Пусть $f \in S(T)$ и $z \in W$ таковы, что существует множество $P \subset H$, обладающее следующими свойствами: а) $Q \setminus P$ первой категории в Q; б) для любой точки $t \in P$ справедливо $f(hx_1(t), hx_2(t), \ldots, hx_n(t)) = hz(t)$. Тогда полагаем $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} z$[1].

Определение 2. Через $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(T;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначим множество всех таких $f \in S(T)$, для которых существует $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$.

Теорема 1. а) *Множество* $\mathfrak{A}$ *не пусто, более того,* $C(T) \subset \mathfrak{A}$; б) *Если* $f_k \in \mathfrak{A}$ $(k \in N)$ *и для любого* $t \in T$ *существует конечный* $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$, *то* $f \in \mathfrak{A}$ *и* $(f_k)_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{(o)} f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в* W.

Доказательство. Напомним, что, если E есть плотное подмножество в Q и $x \in C(E)$, то существует единственный $y \in C_\infty(Q)$, такой, что сужение $y|_E = x$. Это следует, например, из того, что всякое плотное подпространство в Q является C^*-вложенным в Q (см. [5], с. 96). Далее нам удобно отождествить W с $C_\infty(Q)$.

Докажем а). Пусть $f \in C(T)$. Примем $P = H$ и $x(t) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in P$. Тогда $x \in C(P)$. Так как $Q \setminus H$ — множество первой категории в Q, то $P = H$ плотно в Q. Поэтому существует единственный $z \in C_\infty(Q)$, такой, что $z|_P = x$. Очевидно, $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z$.

Докажем б). Пусть $(f_k)_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_k$, а $P_k \subset H$ таково, что $Q \setminus P_k$ первой категории в Q и $f_k(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = z_k(t)$ при всех $t \in P_k$. Положим $P = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k$. Ясно, что $Q \setminus P$ первой категории в Q. Воспользуемся теоремой 2.33 из [7] и дополнениями, сделанными в процессе ее доказательств. Так как при всех $t \in P$ существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} z_k(t)$ и $Q \setminus P$ первой категории в Q, то в W существует (o)-$\lim z_k = z$. Но $z_k(t) \to z(t)$ при всех $t \in P_0$, где $Q \setminus P_0$ первой категории в Q. Положим $P' = P_0 \cap P$. Тогда $Q \setminus P'$ первой категории в Q и $f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = z(t)$ при всех $t \in P'$. Отсюда, по определению, $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z$. Теорема доказана.

Следствие. Множество $\mathfrak{A}(T;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит все бэровские функции на T.

Таким образом, для любого расширенного K-пространства W с единицей e, любой бэровской функции f на R^n и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in W$ существует элемент $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$.

Замечание 1. Пусть по-прежнему Q — экстремальный бикомпакт. Через Ω обозначим σ-алгебру множеств вида $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, где A открыто-замкнуто в Q, а B первой категории в Q. Через $F(Q)$ обозначим совокупность всех функций, заданных (с точностью до множества первой категории) на Q, измеримых относительно Ω и могущих принимать значения $\pm\infty$ на множествах первой категории. Две функции x, $y \in F(Q)$ будем называть эквивалентными, если они различаются лишь на множестве первой категории в Q. Совокупность $\dot{F}(Q)$ всех классов эквивалентности отождествима с

[1] Элемент $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$ определен однозначно.

$C_\infty(Q)$ в следующем смысле: каждый $x \in C_\infty(Q)$ содержится в некотором классе эквивалентности из $\dot{F}(Q)$, и обратно: каждый класс эквивалентности из $\dot{F}(Q)$ содержит единственный элемент из $C_\infty(Q)$ (см., например, [13]). Используя указанное отождествление $\dot{F}(Q)$ с $C_\infty(Q)$, нетрудно дать еще одно определение функции от элементов расширенного K-пространства, эквивалентное определению 1.

Замечание 2. Пусть (D, Σ, μ) — *пространство с мерой* (см. [14]), состоящее из некоторого множества D, некоторой σ-алгебры Σ его подмножеств и неотрицательной счетно-аддитивной вполне σ-конечной меры μ. Пусть W есть совокупность всех измеримых почти всюду конечных функций на (D, Σ, μ), причем, как обычно, функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль, отождествляются. Хорошо известно, что W есть расширенное K-пространство. За единицу e в W примем функцию, тождественно равную единице. Пусть теперь f есть бэровская функция на R^n и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in W$. Нетрудно показать, что $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — обычная суперпозиция функций.

Перейдем теперь к определению функции от элементов произвольного архимедова K-линеала.

Определение 3. Пусть X — архимедов K-линеал, $W = \mathfrak{M}(\hat{X})$ и в W зафиксирована единица e. Пусть $n \in N$, $T \subset R^n$, $f \in S(T)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Если существует $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, то полагаем $f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таким образом, при нашем определении $f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть элемент W, а вообще говоря, не X.

Далее нам понадобится следующая хорошо известная (см. [3] и [7])

Лемма 1. *Пусть X — архимедов K-линеал, и в $W = \mathfrak{M}(\hat{X})$ зафиксированы единицы e_1 и e_2. Тогда для любого $n \in N$, любой $f \in CH(R^n)$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ справедливо соотношение $f_{e_1}^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{e_2}^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \hat{X}$.*

Согласно этой лемме, в случае $f \in CH(R^n)$ вместо $f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы будем писать просто $f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, опуская, если это не может вызвать недоразумений, и верхний индекс.

§ 2. Некоторые вспомогательные предложения

Лемма 2. *Пусть B — бикомпакт, и конечное множество $\{d_k\}_{k=1}^m \subset C(B)$ разделяет точки из B. Тогда для любого $z \in C(B)$ существует $f \in CH(R^{m+1})$ такая, что*

$$f(d_1, d_2, \ldots, d_m, e) = z, \tag{1}$$

где e есть функция на B, тождественно равная единице, а левая часть равенства (1) — обычная суперпозиция непрерывных функций.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что B — замкнутое подмножество R^m, причем $d_k(t) = t_k$, где $t = (t_1, \ldots, t_m)$ есть произвольная точка из B и $k = 1, 2, \ldots, m$. Возьмем ограниченную функцию $g \in C(R^m)$, такую, что сужение g на B есть z, и для $t=(t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}) \in R^{m+1}$ положим $f(t)=\left\{t_{m+1}\, g\left(\frac{t_1}{t_{m+1}}, \frac{t_2}{t_{m+1}}, \ldots \right.\right.$ $\left.\left. \ldots, \frac{t_m}{t_{m+1}}\right) \text{ при } t_{m+1} \neq 0;\ 0 \text{ при } t_{m+1}=0\right\}$. Ясно, что $f \in CH(R^{m+1})$ и при всех $t=(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in B$ справедливо $f(d_1, d_2, \ldots, d_m, e)(t) = g(t_1, t_2, \ldots, t_m) = z(t)$, т. е. справедливо (1). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть X есть K-пространство, Y — его нормальное подпространство, $n \in N$, $f \in CH(R^n)$. Тогда для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ справедливо равенство* $f^X(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f^Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Справедливость леммы 3 без труда выводится из результатов монографии [7] (гл. IV, 3.14).

Пусть теперь X есть K-пространство, Y — его линейная подструктура, $u \in Y_+$, причем $Y=Y_{(u)}$, т. е. Y есть K-линеал ограниченных элементов с единицей u. В силу теоремы Крейнов — Какутани (см. [4], гл. VII, § 5) найдутся бикомпакт B, линейная подструктура H в $C(B)$, разделяющая точки из B, и изоморфизм γ K-линеала Y на K-линеал H, такие, что γu есть функция на B, тождественно равная единице.

Лемма 4. *Пусть $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$. Следующие утверждения эквивалентны:* а) $f^X(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y$; б) *суперпозиция* $f(\gamma y_1, \gamma y_2, \ldots, \gamma y_n) \in H$. *При этом, если выполнены эквивалентные условия* а), б), *то* $f^X(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \gamma^{-1} f(\gamma y_1, \gamma y_2, \ldots, \gamma y_n)$.

Несложное, но громоздкое доказательство леммы 4 мы опускаем.

Замечание 3. В условиях леммы 4, если $Y_{(u)}$ полно по норме $\|\cdot\|_u$, то условие б), а значит, и а), выполнено, ибо в этом случае $H=C(B)$.

Лемма 5. *Пусть X есть K-пространство, Y — его линейная подструктура, $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$. Положим $u=|y_1|+|y_2|+\ldots+|y_n|$. Тогда найдется последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из Y, которая сходится к $f^X(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в X с регулятором u.*

Доказательство. Обозначим через Z множество всех элементов из X, которые являются (r)-пределами последовательностей из $Y_{(u)}$ с регулятором сходимости u. Тогда $Z=Z_{(u)}$ и Z полно по норме $\|\cdot\|_u$. Остается применить замечание 3. Лемма 5 доказана.

§ 3. О квази (r)-полных K-линеалах

Пусть X есть архимедов K-линеал, $n \in N$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Обозначим через Y линейную подструктуру в X, порожденную элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Положим $u=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$. Ясно, что $Y \subset X_{(u)}$. Обозначим через $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ замыкание Y в $X_{(u)}$ по норме $\|\cdot\|_u$.

Определение 4. Архимедов K-линеал X будем называть *квази (r)-полным*, если для любого $n \in N$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ K-линеал $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полон по норме $\|\cdot\|_u$, где $u=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

Ясно, что всякий архимедов (r)-полный K-линеал будет и квази (r)-полным. Как показывают следующие примеры, обратное неверно.

Пример 1. Пусть B — бикомпакт и точка $t_0 \in B$. Обозначим через X линейную подструктуру в $C(B)$, состоящую из всех таких $x \in C(B)$, что x постоянна в некоторой окрестности точки t_0. Тогда K-линеал X квази (r)-полон, но, вообще говоря, не является (r)-полным.

Пример 2. Пусть Ξ — бесконечное множество индексов и для каждого $\xi \in \Xi$ T_ξ есть некоторое топологическое пространство. Пусть $T = \prod\limits_{\xi \in \Xi} T_\xi$ есть обычное топологическое произведение. Будем говорить, что функция $x \in C(T)$ *зависит лишь от конечного числа координат*, если существует конечное множество $\Xi_0 \subset \Xi$, обладающее следующим свойством: если $t = \{t_\xi\} \in T$, $t' = \{t'_\xi\} \in T$ и $t_\xi = t'_\xi$ при всех $\xi \in \Xi_0$, то $x(t) = x(t')$.

Обозначим через X линейную подструктуру в $C(T)$, состоящую из всех таких $x \in C(T)$, что x зависит лишь от конечного числа координат. Тогда K-линеал X квази (r)-полон, но, вообще говоря, не является (r)-полным.

Пример 3. Для произвольного бикомпакта B множество всех функций, заданных, непрерывных и ограниченных на плотных открытых подмножествах в B (с естественным отождествлением) является квази (r)-полным K-линеалом, но, вообще говоря, не (r)-полным.

Связь понятия квази (r)-полноты с понятием функции от элементов K-линеала выясняет

Теорема 2. *Для любого архимедова K-линеала X следующие утверждения эквивалентны*: а) *для любого $n \in N$, любой $f \in CH(R^n)$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ справедливо $f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$*; б) *$X$ квази (r)-полон.*

Доказательство. Справедливость б) $\Rightarrow$ а) вытекает из леммы 5. Доказываем а) $\Rightarrow$ б). Фиксируем $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и полагаем $u = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$. Найдется бикомпакт B, линейная подструктура H в $C(B)$, разделяющая точки из B, и изоморфизм γ K-линеала $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на K-линеал H, такие, что γu есть функция, тождественно равная единице на B. Очевидно, семейство $\{\gamma x_k\}_{k=1}^n$ разделяет точки из B. Возьмем произвольный $z \in C(B)$. В силу леммы 2 существует $f \in CH(R^{n+1})$ такая, что $f(\gamma x_1, \gamma x_2, \ldots, \gamma x_n, \gamma u) = z$. По условию, $f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = w \in X$. В силу леммы 5, $w \in X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Наконец, в силу леммы 4, $\gamma w = z$. Итак, $H = C(B)$, поэтому $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полно по норме $\|\cdot\|_u$. Теорема доказана.

В следующей теореме даются достаточные условия для того, чтобы значения непрерывной (но уже не обязательно положительно однородной) функции от элементов K-линеала принадлежали этому K-линеалу. Введем следующее обозначение. Для $f \in C(R^n)$ и $0 < a < +\infty$ положим

$$r(f, a) = \sup\{|f(x)| : x \in R^n, \ \|x\|_{R^n} \leq a\}, \quad r(f) = \overline{\lim_{a \to +\infty}} \frac{r(f, a)}{a}.$$

Теорема 3. *Пусть X — архимедов квази (r)-полный K-линеал с единицей e. Пусть $n \in N$ и $f \in C(R^n)$. Для того чтобы при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ было справедливо*

$$f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X, \quad (2$$

достаточно выполнения одного из следующих условий: а) $r(f)=0$; б) $r(f)<+\infty$ *и* X *есть* K*-пространство*; в) $X=X_{(e)}$, *т. е.* X *есть* K*-линеал ограниченных элементов с единицей* e.

Доказательство. Пусть выполнено а). Для $t=(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1})\in R^{n+1}$ положим

$$g(t)=\left\{t_{n+1}f\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}, \frac{t_2}{t_{n+1}}, \ldots, \frac{t_n}{t_{n+1}}\right) \text{ при } t_{n+1}\neq 0;\ 0 \text{ при } t_{n+1}=0\right\}.$$

Из условия $r(f)=0$ следует, что $g\in CH(R^{n+1})$, ибо это условие обеспечивает непрерывность g на гиперплоскости $t_{n+1}=0$ в R^{n+1} (непрерывность в остальных точках и положительная однородность g очевидны). Пусть $W=\mathfrak{M}(\hat{X})$. Тогда $f_e^W(x_1, x_2, \ldots, x_n)=g^W(x_1, x_2, \ldots, x_n, e)$, следовательно, $f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)=g^X(x_1, x_2, \ldots, x_n, e)\in X$ в силу теоремы 2. Пусть выполнено б). Из условия $r(f)<+\infty$ следует, что $|f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\leqslant c(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|+e)$, где $c>0$ — некоторое число. Поэтому $f_e^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in X$. Наконец, если выполнено в), то справедливость (2) тривиальна. Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Из результатов Б. З. Вулиха (см. [3]) вытекает, что в теореме 3 к числу условий, обеспечивающих справедливость (2), можно добавить также и следующие: г) *K-линеал X максимальный* (см. [3], § 4, с. 384); д) *$X_{(e)}$ полно по норме $\|\cdot\|_e$, X внутренне нормальный K-линеал* (см. [3], § 3, с. 378) *и* $r(f)<+\infty$.

Замечание 5. Покажем, что б) в теореме 3 нельзя заменить соотношением $r(f)<+\infty$, отбросив требование условной полноты X.

Пусть X есть совокупность всех последовательностей $x=(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ вещественных чисел, для которых существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k/k)$. При естественных линеаризации и частичном упорядочении X есть архимедов (r)-полный K-линеал, более того, с нормой $\|x\|=\sup\limits_k(|x_k|/k)$ он оказывается KB-линеалом, изоморфным KB-линеалу c всех сходящихся последовательностей вещественных чисел. Примем $e=(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Заметим, что $\mathfrak{M}(\hat{X})$ есть пространство s всех вещественных числовых последовательностей. Возьмем $f(t)=t\sin t$, $t\in R$. Ясно, что $f\in C(R)$ и $r(f)<+\infty$. Положим $x_k=2\pi k+(-1)^k\pi/2$ $(k\in N)$ и $x=(x_1, \ldots, x_k, \ldots)\in X$. Очевидно, $f_e^X(x)=((-1)^k 2\pi k+\pi/2)_{k\in N}$. Тем самым $f_e^X(x)\notin X$. Разумеется, этот K-линеал X с указанной единицей e не является внутренне нормальным (см. [3], § 3, с. 378).

Вернемся опять к случаю положительно однородных непрерывных функций. Из лемм 4 и 5 и теоремы 2 следует

Теорема 4. *Пусть X — архимедов K-линеал, Y и Z — его линейные подструктуры, являющиеся квази (r)-полными K-линеалами. Тогда для любых $n\in N$, $f\in CH(R^n)$ и $w_1, w_2, \ldots, w_n\in Y\cap Z$ справедливо $f^Y(w_1, w_2, \ldots, w_n)=f^Z(w_1, w_2, \ldots, w_n)\in Y\cap Z$.*

Определение 5. Пусть X — архимедов квази (r)-полный K-линеал, Y — его нормальный подлинеал. Будем говорить, что Y *функционально замкнут* в X, если при всех $n\in N$, $f\in CH(R^n)$ и всех $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n'\in X$, удовлетворяющих условию x_i —

$- x_i' \in Y (i = 1, 2, \ldots, n)$, справедливо $f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f^X(x_1', x_2', \ldots, x_n') \in Y$.

Теорема 5. *Пусть X — архимедов квази (r)-полный K-линеа Y — его нормальный подлинеал, ω — канонический гомоморфизм на факторлинеал X/Y. Пусть X/Y архимедов. Тогда*: а) *Y фу циональнo замкнут в X*; б) *факторлинеал X/Y квази (r)-полон*; в) *при всех $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ справедливо*

$$\omega(f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f^{X/Y}(\omega x_1, \omega x_2, \ldots, \omega x_n). \quad (1$$

Не приводя полностью доказательства этой теоремы, отмет что утверждения а) и б) без труда проверяются с помощью об ного в таких случаях перехода к K-линеалам ограниченных элем тов. Для доказательства в) поступаем следующим образом. Фик руем $n \in N$. Обозначим через U_n множество всех $f \in CH(R^n)$, для которых (3) справедливо при всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Пусть $S^n = \{x \in R^n : \|x\|_{R^n} = 1\}$, $V_n = \{f|_{S^n} : f \in U_n\}$. Тогда V_n есть линей подструктура в $C(S^n)$, содержащая все функции вида $f_k(t) = t_k$, где $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in S^n$. В силу известной теоремы Вейерштрасса V_n плотно в $C(S^n)$.

Далее доказываем, что V_n замкнуто в $C(S^n)$. После этого и равенства $V_n = C(S^n)$ прямо следует $U_n = CH(R^n)$.

§ 4. Некоторые приложения к нормированным структурам

Степенное преобразование нормы в нормированных структу весьма полезно во многих вопросах (см., например, [11]). Класс к зи (r)-полных KN-линеалов[1)], видимо, является наиболее широк естественной „областью действия" указанного преобразования.

Всюду далее p, q — вещественные числа, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Полагаем, как обычно, для $t \in R$ $\operatorname{sgn} t = \{1$ при $t > 0$; 0 при $t = 0$; -1 при $t < 0\}$. Через P обозначим функц на R, задаваемую формулой $P(t) = |t|^{1/p} \operatorname{sgn} t$, $t \in R$. Заметим, ч $P \in C(R)$ и $r(P) = 0$, т. е. P удовлетворяет условию а) теоремы Через P_1 и P_2 обозначим функции на R^2, задаваемые форму $P_1(t_1, t_2) = (|t_1|^{1/p} + |t_2|^{1/p})^p$, $P_2(t_1, t_2) = \operatorname{sgn}(t_1 - t_2)\,\big|\,|t_1|^{1/p} - |t_2|^{1/p}$ где $(t_1, t_2) \in R^2$. Ясно, что $P_1, P_2 \in CH(R^2)$.

Пусть Z — архимедов K-линеал с фиксированной единицей $(X, \|\cdot\|_X)$ есть KN-линеал, причем X есть линейная подструктура в Пусть также Z и X суть квази (r)-полные K-линеалы. Поло $X_p = \{y \in Z : y = P(x)$ для некоторого $x \in X\}$, где $P(x)$ есть крат запись $P_e^Z(x)$. Для любого $y \in X_p$, где $y = P(x)$ с $x \in X$, полага $\|y\|_{X_p} = (\|x\|_X)^{1/p}$.

Теорема 6. а) *Множество X_p есть линейная подструктур Z, причем, если $e \in X$, то X_p есть фундамент в X*; б) *$(X_p, \|\cdot\|$ есть KN-линеал, причем, если $\|\cdot\|_X$ банахова, то и $\|\cdot\|_{X_p}$ бана* в) *пространства $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})^*$, $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})^{***}, \ldots$, т. е. все бана сопряженные нечетного порядка к $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ суть KB-простр ства*[2)].

---

1) Таких KN-линеалов, которые квази (r)-полны как K-линеалы.

2) Напомним (см. [4], гл. VII, § 6), что KB-пространством называется KN- странство, в котором норма удовлетворяет следующим двум дополнительным виям: (A) если $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\| \to 0$; (B) если $x_n \uparrow +\infty$ $(x_n \geqslant 0)$, то $\|x_n\| \to +\infty$.

Доказательство. Проверим а). Ясно, что $P(x)=P(x_+)-P(x_-)$ при всех $x\in X$. Поэтому, если $y\in X_p$, то и y_+, $y_-\in X_p$. Очевидно также, что $\lambda y\in X_p$ при всех $y\in X_p$, $\lambda\in R$. Осталось только доказать, что из $0\leqslant y_1$, $y_2\in X_p$ следует, что $y_1\pm y_2\in X_p$. Пусть x_1, $x_2\in X_+$ таковы, что $P(x_1)=y_1$, $P(x_2)=y_2$. Положим $u_1=P_1(x_1, x_2)$, $u_2=P_2(x_1, x_2)$. В силу теоремы 2 имеем u_1, $u_2\in X$. Остается заметить, что $P(u_1)=y_1+y_2$, $P(u_2)=y_1-y_2$. Второе утверждение в а) прямо следует из неравенства $A^{1/p}\leqslant A+1$, справедливого при всех $0\leqslant A\in R$.

Проверим б). Пусть норма $\|\cdot\|_X$ банахова. Применим следующий критерий Амемия: *для того чтобы KN-линеал E был полон по норме, необходимо и достаточно, чтобы для любой (b)-фундаментальной последовательности $0\leqslant z_n\uparrow$ в E существовал* $\sup z_n\in E$. Пусть последовательность $0\leqslant y_n\uparrow$ (b)-фундаментальна в $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$. Возьмем $0\leqslant x_n\in X$ так, что $P(x_n)=y_n$. Очевидно, $0\leqslant x_n\uparrow$. Воспользуемся тем, что для любых чисел a, $b\geqslant 0$ и $A>0$ справедливо неравенство $|a-b|\leqslant c_1|a^{1/p}-b^{1/p}|^p A^p+c_2(a+b)/A^q$ (c_1, $c_2>0$ не зависят от a, b, A). В силу этого $\|x_m-x_n\|_X\leqslant c_1A^p(\|y_m-y_n\|_{X_p})^p+c_2[(\|y_m\|_{X_p})^p+(\|y_n\|_{X_p})^p]/A^q$ при всех m, n. Отсюда ясно, что последовательность $\{x_n\}$ (b)-фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_X)$. Пусть $\sup x_n=x\in X$. Тогда $\sup y_n=P(x)\in X_p$. Полнота по норме пространства $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ доказана.

Проверим в). Будем говорить, что KN-линеал V удовлетворяет условию Шимогаки, если из того, что $0\leqslant x_n\in V$, $\|x_n\|_V\leqslant 1$ $(n\in N)$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\|x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n\|_V=0.$$

Воспользуемся следующей теоремой из [12], являющейся усилением одного результата Шимогаки [15]: *если KN-линеал V удовлетворяет условию Шимогаки, то все банаховы сопряженные нечетного порядка к V являются KB-пространствами.* Пусть $0\leqslant y_n\in X_p$, $\|y_n\|_{X_p}\leqslant 1$ $(n\in N)$; $y_n=P(x_n)$, где $0\leqslant x_n\in X$. Очевидно, $\|x_n\|_X=(\|y_n\|_{X_p})^p\leqslant 1$, поэтому

$$\frac{\|y_1\vee y_2\vee\ldots\vee y_n\|_{X_p}}{n}=\frac{(\|x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n\|_X)^{1/p}}{n}=$$

$$=\left\{\frac{\|x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n\|_X}{n}\right\}^{1/p}\left\{\frac{1}{n}\right\}^{1/q}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{1/q}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Теорема 6 доказана.

В заключение автор выражает благодарность Б. З. Вулиху за внимание к работе.

г. Ленинград

Поступило 8. XII. 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Интегрирование. М., „Наука", 1967.
2. Векслер А. И. Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия к теории линейных и линейных нормированных структур. Изв. вузов, Матем., 1966, № 4, с. 13—22.

3. Вулих Б. З. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств. ИАН СССР. Сер. матем., т. 17, № 4, 1953, с. 365—388.
4. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств М., Физматгиз, 1961.
5. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. New York, 1960.
6. Calderon A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math., v. 24, № 2, 1964, p. 113—190.
7. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., Гостехиздат, 1950.
8. Крейн М. Г., Крейн С. Г. О пространстве непрерывных функций, определенных на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах. Матем. сб., т. 13 (55): 1, 1943, с. 1—38.
9. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Шкалы банаховых структур измеримых функций. Тр. Моск. матем. о-ва, вып. 17, 1967, с. 293—322.
10. Лозановский Г. Я. О топологически рефлексивных KB-пространствах. ДАН СССР, т. 158, № 4, 1964, с. 516—519.
11. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах. Сиб. матем. журн., т. X, № 3, 1969, с. 584—599.
12. Лозановский Г. Я. Об одном результате Шимогаки. Тезисы второй зональной конференц. педин-тов. Л., 1970, с. 43.
13. Сикорский Р. Булевы алгебры. М., „Мир", 1969.
14. Халмош П. Теория меры. М., ИИЛ, 1953.
15. Shimogaki T. On the continuity and the monotonousness of norms. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. I, v. 16, 1962, p. 225—237.
16. Широхов М. Ф. Функции от элементов полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, т. 74, № 6, 1950, с. 1057—1060.
17. Широхов М. Ф. Применение функций от разложений к теории полуупорядоченных пространств. Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех. и астр., № 19, вып. 4, 1960, с. 29—36.

С. Ф. МОРОЗОВ, В. И. СУМИН. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

(аннотация статьи, принятой к печати)

В работе устанавливаются необходимые условия оптимальности (в форме принципа максимума) для управляемых процессов переноса частиц, описываемого стационарным интегро-дифференциальным процессом переноса

$$\frac{1}{\alpha(P)}(s, \operatorname{grad}\varphi) + \varphi(s, P) = \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\theta(P, \mu_0)\varphi(s', P)\,ds' + f(s, P, u(s, P))$$

с граничными условиями $\varphi(s, P)|_{P\in\Gamma} = 0$, $(s, n) < 0$, где функция управления $u(s, P)$ входит в неоднородный член уравнения (в функцию источника). Рассматривается следующая оптимальная задача: среди допустимых (измеримых и ограниченных) управлений $u(s, P)$, удовлетворяющих интегральному ограничению типа неравенства $L(u) \leqslant 0$, требуется найти управление, минимизирующее интегральный функционал $I(u)$. (Работа поступила в журнал „Математика" 10.XI.1971.)

И. С. НАСЫРОВ. О НЕЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Приводится алгоритм построения решений системы двух нелинейных уравнений, зависящей от двух параметров. Рассмотрены вопросы разрешимости таких систем и сходимость решений, получаемых предлагаемым методом. (Работа поступила в журнал „Математика" 7.VI.1972.)

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

МАТЕМАТИКА В ПЕТЕРБУРГСКОМ — ЛЕНИНГРАДСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Под редакцией акад. *В. И. Смирнова*

Издательство Ленинградского университета 1970

В 1950 г. вышла в свет монография Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах», содержавшая первое систематическое изложение теории линейных полуупорядоченных пространств и подводившая итоги исследований советских ученых в этой области. В монографии, в частности, было обращено внимание на возможность определения в K-пространстве не только произведения, но и более общих функций от его элементов. По мере дальнейших исследований в этом направлении становилась все более заметной связь между теорией K-пространств и спектральной теорией операторов в гильбертовом пространстве. Возникшие здесь аналогии были исследованы многими авторами. В частности, Б. З. Вулиху принадлежит теорема: всякое сильно замкнутое кольцо ограниченных самосопряженных операторов является K-пространством.

Теория K-пространств была существенно использована Г. П. Акиловым в его работах по распространению линейных операторов. В этих работах, в частности, были исследованы два класса нормированных пространств: пространств X, допускающих распространение любого линейного оператора с сохранением нормы на любое более широкое пространство $X' \supset X$ и пространств X, таких, что любой линейный оператор, отображающий какое-нибудь пространство E в X, может быть распространен с сохранением нормы на любое более широкое пространство $E' \supset E$. Акилов доказал, что эти два класса пространств совпадают.

Различные вопросы теории K-пространств изучал А. И. Векслер. В частности, он подробно исследовал условия, при которых фактор-линеал K-линеала по его нормальному подлинеалу будет архимедовым. Он же существенно продолжил исследование операции частичного умножения в векторных структурах. Векслеру принадлежит также исследование вопроса о распространении регулярных операторов с архимедова K-линеала на его пополнение по Дедекинду.

Совсем недавно В. А. Соловьев изучал вопрос о распространении нормы с нормированной структуры на ее пополнение по Дедекинду, в частности указал некоторые случаи, когда такое распространение единственно.

В шестидесятых годах появился ряд работ Г. Я. Лозановского, в которых наибольшее внимание было уделено нормированным полуупорядоченным пространствам. Исходя из произвольного KB-пространства X и используя умножение элементов, Лозановский строит пространства X^p $(p>1)$, прототипом которых служат пространства L^p. Пространства X^p оказываются рефлексивными. Далее Лозановский вводит еще более общую конструкцию, позволяющую по произвольному KB-пространству строить новые, представляющие аналог пространств Орлича. Указываются условия, при которых эти пространства рефлексивны. Таким образом, в работах Лозановского показано, что во всяком KB-пространстве содержится весьма разнообразное множество подпространств, которые при надлежащей нормировке оказываются рефлексивными KB-пространствами. В своих последних работах Лозановский изучает следующую общую проблему: какими топологическими свойствами нормированного полуупорядоченного пространства полностью определяются те или иные его структурные свойства? В этом направлении им получен ряд интересных результатов, например: для того чтобы в банаховом K-пространстве X с монотонной нормой эта норма была непрерывной ($x_n \downarrow 0$ влечет $\|x_n\| \to 0$), необходимо и достаточно, чтобы в X не существовало подпространства, изоморфного (в смысле теории Банаха) пространству $C_{[0,1]}$.

Г. Я. Лозановский предложил также абстрактную трактовку понятия интегрального оператора, имеющую смысл в любых KB-пространствах.

Д. А. Владимиров (1965 г.) ввел понятие усиленно вполне непрерывного оператора. Это линейный оператор, действующий из нормированного пространства X в K-пространство Y, причем образ единичного шара из X компактен относительно сходимости с некоторым регулятором. При некоторых ограничениях относительно X и Y Владимиров доказал, что класс усиленно вполне непрерывных операторов совпадает с классом (bo)-линейных операторов. Отсюда вытекает, что в случае, если $X = Y = L^2$, усиленно вполне непрерывные операторы совпадают с интегральными операторами Гильберта — Шмидта. В той же работе Владимиров доказал несколько критериев обычной полной непрерывности интегральных операторов с положительным ядром.

Д. А. Владимиров исследовал также вопрос о „сходимостной" полноте K-пространства и показал, что если понятие фундаментальной последовательности ввести обычным способом $\left(x_{n_i} - x_{m_i} \xrightarrow{(0)} 0 \text{ при } n_i, m_i \to \infty\right)$, то K-пространство не будет полным относительно (o)-сходимости. Аналогичный результат верен и для $(*)_0$-сходимости.

Параллельно с теорией K-пространств развивалась, главным образом в Одессе и Воронеже (М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и их ученики), другая теория частично упорядоченных пространств — теория нормированных пространств с конусами. В течение длительного времени эти теории разрабатывались в разных направлениях независимо друг от друга. Некоторая попытка установления связей между этими двумя теориями была предпринята Б. З. Вулихом. Полученные в этом направлении результаты были затем перенесены им и на счетно-нормированные векторные структуры.

Другие интересные результаты о счетно-нормированных векторных структурах, точнее о счетно-нормированных полуупоря-

IX

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ А.И.ГЕРЦЕНА
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вторая зональная конференция педииститутов северо-западной зоны по математике и методике ее преподавания

Тезисы
1 – 6 июня 1970 г.

Ленинград

Г.Я.ЛОЗАНОВСКИЙ (Ленинград)

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ШИМОГАКИ.

Пусть $\mathcal{X}$ произвольный KN-линеал, $\mathcal{X}^*$ его банахово сопряженное пространство, $V_{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} : x \geq 0, \|x\| \leq 1\}$, $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел.

Будем говорить, что в $\mathcal{X}$ выполнено условие (S), если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\|}{n} = 0$$

для любой последовательности $x_n \in V_{\mathcal{X}}$ $(n \in \mathcal{N})$. Т.Шимогаки доказал [1], что, если в $\mathcal{X}$ выполнено (S), то $\mathcal{X}^*$ есть KB-пространство.

Положим $\cancel{R_n(\mathcal{X}) = \frac{1}{n} \sup \|\sum_{k=1}^{n} x_k\|}$ $(n \in \mathcal{N})$,

$R_n(\mathcal{X}) := \sup \|x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n\| / n$

где $\sup$ берется по всем ~~попарно дизъюнктным~~ $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset V_{\mathcal{X}}$.

ЛЕММА. 1. Для любого $\mathcal{X}$ существует $\lim_{n \to \infty} R_n(\mathcal{X})$, причем он равен 0 или 1.

2. В $\mathcal{X}$ выполнено (S) тогда и только тогда, когда $\lim_{n \to \infty} R_n(\mathcal{X}) = 0$.

3. $R_n(\mathcal{X}) = R_n(\mathcal{X}^{**})$ $(n \in \mathcal{N})$.

ТЕОРЕМА (обобщение теоремы Шимогаки). Если в $\mathcal{X}$ выполнено условие (S), то все банаховы сопряженные нечетного порядка к $\mathcal{X}$ являются KB-пространствами.

ПРИМЕР-ТЕОРЕМА. Все банаховы сопряженные нечетного порядка к пространству $M(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ (см. 2) являются KB-пространствами.

ЛИТЕРАТУРА.

[1]. Shimogaki T., J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., I, 16 (1962), 225-237.

[2]. Lorentz G.G. Ann. of Math. 51 (1950), 37-55.

1

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1969

т. 188 № 3

РЖМат, 1970, 1Б535

циональных чисел, необходимо и достаточно, чтобы группа Γ *имела строение:*

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \{e\},$$

где Γ / Γ_1 — *конечная группа,* Γ_1 / Γ_2 — *конечнопорожденная абелева группа,* Γ_2 — *нильпотентная группа без кручения конечного рационального ранга.*

Это следствие дает ответ на вопрос, поставленный в (5).

Теорема 2. *Для того чтобы разрешимая группа* Γ *без кручения и без центра была изоморфно представлена матрицами над некоторым полем* Ω *характеристики нуль, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *в* Γ *выполняется условие обрыва для централизаторов возрастающей последовательности подгрупп из* Γ;

2) *в* Γ *имеется нормальный ряд*

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \{e\},$$

где Γ / Γ_1 — *конечная группа,* Γ_1 / Γ_2 — *абелева группа, а группу* Γ_2 *можно изоморфно вложить в* ΩR*-степенную нильпотентную группу* H *конечного* Ω*-ранга, причем сужение каждого внутреннего автоморфизма группы* Γ_1 *на подгруппе* Γ_2 *индуцирует* Ω*-автоморфизм группы* H.

Используя приведенную выше теорему А. И. Мальцева, Д. М. Смирнов показал в (6), что конечнопорожденная свободная разрешимая группа класса разрешимости 3 не обладает точным матричным представлением ни над каким полем. В связи с этим возникает вопрос о представимости двуступенно разрешимых групп матрицами над некоторым полем характеристики нуль. Можно довольно легко построить пример двуступенно разрешимой группы без кручений, которую нельзя точно представить матрицами ни над каким полем характеристики нуль. В частности, такой группой будет группа Γ, являющаяся полупрямым произведением прямой суммы H счетного числа рациональных групп H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и бесконечной циклической группы $\{z\}$, причем $z^{-1}h_n z = nh_n$ $(h_n \in H_n)$.

Теорема. 3. *Каждая конечнопорожденная двуступенно разрешимая группа* Γ *без кручения обладает точным матричным представлением над некоторым полем характеристики нуль.*

Теорема 4. *Дискретное сплетение* $G = \Gamma \,\mathrm{wr}\, H$, *где* Γ *и* H — *абелевы группы без кручения, изоморфно вкладывается в группу матриц второго порядка над некоторым полем характеристики нуль.*

Теорема 5*. *Свободная нильпотентная группа класса нильпотентности* n *допускает точное матричное представление над некоторым полем характеристики нуль.*

Латвийский государственный университет
им. П. Стучки
Рига

Поступило
10 II 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28, 567 (1951). 2 L. Auslander, Ann. Math., № 7 (1967). 3 R. Swan, Proc. Am. Math. Soc., 18, 385 (1967). 4 Ф. Холл, Сборн. пер. Математика, 12, 1, 3 (1968). 5 М. И. Каргаполов, Алгебра и логика, Семинар, 6, 5, 17 (1967). 6 Д. М. Смирнов, ДАН, 155, № 3, 535 (1964).

* Эта теорема получена совместно с В. Г. Вилянцером.

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 188, № 3

УДК 513.88 **МАТЕМАТИКА**

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 II 1969)

В теории векторных структур часто используются представления тех или иных пространств в виде пространств некоторых специальных типов, например, пространств непрерывных функций. Такого рода реализацию допускает в частности произвольное K-пространство (см., например, ([2]), гл. V). Вполне линейные функционалы на K-пространствах допускают интегральное представление такого же типа, как линейные непрерывные функционалы в классических L_p $(1 < p < \infty)$; это обстоятельство позволяет при изучении таких функционалов широко применять аппарат теории меры и интеграла. Вопрос же о реализации произвольных регулярных функционалов (и пространств таких функционалов) является более сложным. Цель настоящей заметки — построение одного способа реализации пространств регулярных функционалов и приложение его к банаховым структурам, введенным Кальдероном ([3]). Приводятся также некоторые результаты о вполне линейных функционалах в KN-пространстве, опорных к его единичному шару.

Мы будем пользоваться терминологией из теории K-пространств (т. е. условно полных линейных структур), принятой в ([2]). Два элемента x, y K-пространства X называются *дизъюнктными* (обозначение xdy), если $|x| \wedge |y| = 0$. *Единица* $\mathbf{1}$ K-пространства X понимается в *слабом смысле* (по Фрейденталю), т. е. $x \wedge \mathbf{1} > 0$ для любого $x > 0$. *Нормальным подпространством* K-пространства X называется всякое его линейное подмножество X_1, удовлетворяющее условию: если $x \in X_1$, $y \in X$, $|y| \leqslant |x|$, то $y \in X_1$. Если же вдобавок в X нет ненулевых элементов, дизъюнктных всем элементам из X_1, то говорят, что X_1 есть *фундамент* в X.

K-Пространство W называется *расширенным*, если любое множество его попарно дизъюнктных элементов ограничено. Бикомпакт Q называется *экстремальным*, если замыкание всякого открытого множества из Q открыто-замкнуто. Для произвольного экстремального бикомпакта Q множество $C_\infty(Q)$ всех вещественных непрерывных функций на Q, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$, является расширенным K-пространством при естественном частичном упорядочении и алгебраических операциях (см. ([2]), гл. V). Всякое расширенное K-пространство W, в котором зафиксирована единица $\mathbf{1}$, однозначно реализуется в виде пространства $C_\infty(Q)$ на подходящем экстремальном бикомпакте Q, если потребовать, чтобы $\mathbf{1}$ соответствовала функция на Q, тождественно равная единице. Всякое K-пространство X является фундаментом в некотором расширенном K-пространстве W, которое называется *максимальным расширением* пространства X и которое мы будем обозначать через $\mathfrak{M}(X)$.

С любым K-пространством X связаны два пространства функционалов на X: пространство $\tilde{X}$ всех регулярных функционалов (([2]), стр. 267) и пространство $\overline{X}$ всех вполне линейных функционалов (([2]), стр. 239), называемое *сопряженным к X по Накано*.

KN-Пространством называется *K*-пространство X, являющееся одновременно нормированным пространством, в котором норма монотонна, т. е. из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$.

KB-Пространством называется *KN*-пространство X, в котором выполнены два дополнительных условия:

(A) Если $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\|_X \to 0$.

(B) Если $0 \leqslant x_n \uparrow$ и $\lim \|x_n\|_X < \infty$, то существует $\sup x_n \in X$.

Для произвольного *KN*-пространства X через X^* мы обозначаем его банахово сопряженное. Напомним, что $X^* \subset \tilde{X}$ и, если X банахово, то $X^* = \tilde{X}$.

§ 1. Пусть Q — экстремальный бикомпакт, $W = C_\infty(Q)$ — соответствующее расширенное *K*-пространство. Для краткости обозначим $C(Q)$, т. е. обычное пространство вещественных конечных непрерывных функций на Q, через M.

Определение 1. Пусть X — нормальное подпространство в $C_\infty(Q)$, $f \in \tilde{X}$, $u \in X_+$. Для любого $x \in M$ положим

$$f_{(u)}(x) = f(xu), \tag{1}$$

где xu есть произведение в смысле умножения в $C_\infty(Q)$, см. ([2]), стр. 163.

Ясно, что $f_{(u)} \in \tilde{M}$.

Определение 2. Пусть X и Y — нормальные подпространства в $C_\infty(Q)$, $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$. Будем говорить, что f и g дизъюнктны (обозначение fDg), если для любых $u \in X_+$, $v \in Y_+$ справедливо $f_{(u)}dg_{(v)}$, т. е. $f_{(u)}g_{(v)}$ дизъюнктны как элементы *K*-пространства $\tilde{M}$.

Подчеркнем, что о дизъюнктности элементов f, g в обычном смысле говорить нельзя, ибо они не являются элементами одного и того же *K*-пространства.

Теорема 1. *Пусть X — нормальное подпространство в $C_\infty(Q)$. Зафиксируем единицу 1_X в пространстве $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и единицу 1_M в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$. Тогда существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X есть компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, а R_X есть изоморфизм K-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ на K-пространство V_X, удовлетворяющая условиям:*

(1) *Для любых $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{M}$*

$$(fDg) \Leftrightarrow (R_X f dg);$$

(2) $R_X(1_X) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_M$.

Заметим, что здесь $R_X f$ и g суть элементы одного и того же *K*-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно говорить об их дизъюнктности в обычном смысле.

Определение 3. Оператор R_X, введенный в теореме 1, будем называть канонической реализацией пространства $\tilde{X}$.

Ясно, что оператор R_X зависит от выбора единиц 1_X, 1_M в пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{X})$, $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть X и Y — нормальные подпространства в $C_\infty(Q)$; R_X и R_Y — соответствующие канонические реализации. Тогда для любых $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$ и при любом выборе единиц 1_M, 1_X, 1_Y справедливо*

$$(fDg) \Leftrightarrow (R_X f d R_Y g).$$

§ 2. На протяжении этого параграфа считаем, что в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ выбрана единица и произведена реализация $\mathfrak{M}(\tilde{M}) = C_\infty(Q')$ на подходящем экстремальном бикомпакте Q'. Пусть X_0, X_1 — банаховы *KN*-пространства, являющиеся нормальными подпространствами в $C_\infty(Q)$. Следуя А. П. Кальдерону ([3]), положим для $0 < s < 1$

$$X_0^{1-s}X_1^s = \{z \in C_\infty(Q)\colon |z| \leqslant \lambda x_0^{1-s}x_1^s, \text{ где } 0 \leqslant x_i \in X_i, \\ \|x_i\|_{X_i} \leqslant 1 \ (i = 0, 1), \text{ число } \lambda > 0\}, \tag{2}$$

и для $z \in X_0^{1-s}X_1^s$ за $\|z\|_{X_0^{1-s}X_1^s}$ принимаем инфимум всех возможных λ в (2). Тогда $(X_0^{1-s}X_1^s, \|\cdot\|_{X_0^{1-s}X_1^s})$ есть банахово *KN*-пространство.

Выберем пока произвольно единицы в пространствах $\mathfrak{M}(X_0^*)$, $\mathfrak{M}(X_1^*)$, $\mathfrak{M}((X_0^{1-s}X_1^s)^*)$ и отождествим сами пространства X_0^*, X_1^*, $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ с их образами в $C_\infty(Q')$ при канонических реализациях. После этого можно рассмотреть кальдероново пространство $(X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$, построенное по X_0^* и X_1^* тем же способом (формула (2)), которым пространство $X_0^{1-s}X_1^s$ строится по X_0 и X_1.

Теорема 3. *Пусть единицы в пространствах $\mathfrak{M}(X_0^*)$ и $\mathfrak{M}(X_1^*)$ выбраны произвольно. Тогда в пространстве $\mathfrak{M}((X_0^{1-s}X_1^s)^*)$ можно выбрать единицу так, что при отождествлении соответствующих пространств с их образами при канонических реализациях будет справедливо равенство*

$$(X_0^{1-s}X_1^s)^* = (X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s, \tag{3}$$

как по запасу элементов, так и по норме.

Доказательство этой теоремы базируется на результатах, ранее полученных автором [4, 5].

Из теоремы 3 следует, что банаховы сопряженные к семейству $X_0^{1-s}X_1^s$ $(0 < s < 1)$ снова образуют подобное же семейство. Подчеркнем при этом, что в теореме 3 на банаховы KN-пространства X_0 и X_1 не накладывается никаких дополнительных ограничений.

Рассмотрим теперь важный частный случай конструкции Кальдерона. Пусть X — банахово KN-пространство, являющееся нормальным подпространством в $C_\infty(Q)$; $p > 1$ — произвольное число. Положим

$$X_p = \{x \in C_\infty(Q): \ |x|^p \in X\} \tag{4}$$

и для $x \in X_p$

$$\|x\|_{X_p} = \| |x|^p \|_X^{1/p}. \tag{5}$$

Ясно, что $X_p = X^{1-s}Y^s$, где $Y = C(Q)$ и $1 - s = 1/p$.

Теорема 4. а) *Справедлива формула $(X_p)^{**} = (\overline{X^*})_p$, где $\overline{X^*}$ есть сопряженное по Накано к банахову сопряженному X^*.*

б) *Банахово сопряженное нечетного порядка к X_p есть KB-пространство.*

в) *Если X не есть KB-пространство, то никакое банахово сопряженное четного порядка к X_p не является KB-пространством.*

Теорема 5. *Пусть $\overline{X}$ тотально на X и выполнено следующее условие: если направление $0 \leqslant x_\alpha\uparrow$ $(\alpha \in A)$ и $\sup\|x_\alpha\|_X < \infty$, то существует $\sup x_\alpha \in X$ и $\sup\|x_\alpha\|_X = \|\sup x_\alpha\|_X$.*

Тогда X_p алгебраически и структурно изоморфно и изометрично $(X_p)^{**}$.

Используя теорему 5, некоторые другие результаты автора [5] и теорему Бишопа — Фелпса об опорных функционалах [1], можно доказать следующую теорему о вполне линейных функционалах в KN-пространстве, опорных к его единичному шару.

Теорема 6. *Пусть X — банахово KN-пространство, удовлетворяющее всем условиям теоремы 5. Тогда:*

а) *для любого $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие $y \in X$ и $f \in \overline{X}$, что $\|x - y\|_X < \varepsilon$, $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(y) = \|y\|_X$;*

б) *для любого $f \in \overline{X}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие $g \in \overline{X}$ и $x \in X$, что $\|f - g\|_{X^*} < \varepsilon$, $\|x\|_X = 1$ и $g(x) = \|g\|_{X^*}$;*

в) *если $\mathfrak{M}(X)$ счетного типа, то найдутся слабая единица 1 в X и функционал $f \in \overline{X}$ такие, что $\|1\|_X = \|f\|_{X^*} = f(1) = 1$.*

В заключение автор выражает благодарность проф. Б. З. Вулиху за внимание к настоящей работе.

Поступило
1 II 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bishop, R. R. Phelps, Proc. Symp. in Pure Math., VII, Am. Math. Soc., 1963, p. 393. [2] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [3] A. P. Calderon, Studia Math., 24, № 2 (1964). [4] Г. Я. Лозановский, ДАН, 172, № 5 (1967). [5] Г. Я. Лозановский, Сибирск. матем. журн., 10, № 3 (1969).

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГОД ИЗДАНИЯ ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ

Журнал выходит 24 раза в год, по четыре номера каждой серии

13

МАТЕМАТИКА □ МЕХАНИКА □ АСТРОНОМИЯ

Выпуск 3

ИЮЛЬ

1969

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 517.5

Г. Я. Лозановский, В. А. Соловьев

О МОНОТОННОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ БАНАХОВОЙ НОРМЫ С ВЕКТОРНОЙ СТРУКТУРЫ НА ЕЕ ПОПОЛНЕНИЕ ПО ДЕДЕКИНДУ

1. Обозначения и терминология. В настоящей заметке мы в основном придерживаемся терминологии и обозначений из теории полуупорядоченных пространств, принятых в монографии [1].

Известно следующее. Пусть X — архимедов K-линеал. Тогда, применяя, например, метод сечений, можно построить его пополнение по Дедекинду $\hat{X}$, которое иначе называется K-пополнением (см., например, [1], стр. 125). Под KN-линеалом понимается K-линеал, являющийся одновременно нормированным пространством, причем норма в X удовлетворяет условию монотонности: если $x, y \in X$ и $|x| \leqslant |y|$, то $\|x\| \leqslant \|y\|$. Под KB-линеалом понимается (b)-полный KN-линеал, т. е. полный как нормированное пространство.

Пусть X — произвольный KN-линеал. Для любого $\hat{x} \in \hat{X}$ положим

$$\|\hat{x}\|_e = \inf \{ \|x\| : x \in X, \ |\hat{x}| \leqslant |x| \},$$

где $\|\cdot\|$ есть норма на X. Известно (см. [1], стр. 197), что $\|\cdot\|_e$ есть монотонная норма на $\hat{X}$, причем $\|x\|_e = \|x\|$ для любого $x \in X$, т. е. $\|\cdot\|_e$ есть распространение нормы $\|\cdot\|$ с X на $\hat{X}$ с сохранением монотонности. Это распространение мы будем называть естественным распространением нормы с X на $\hat{X}$. Ясно, что если $p(\cdot)$ есть какое-либо распространение нормы с X на $\hat{X}$ (разумеется, с сохранением монотонности), то для любого $\hat{x} \in \hat{X}$ справедливо неравенство $p(\hat{x}) \leqslant \|\hat{x}\|_e$. В этом смысле естественное распространение нормы мажорирует всякое другое монотонное распространение нормы. Всюду в дальнейшем, говоря о распространении нормы с X на $\hat{X}$, мы будем иметь в виду монотонное распространение, не оговаривая этого каждый раз. Как доказано в [3], естественное распространение банаховой нормы всегда банахово. Различные условия, обеспечивающие единственность распространения нормы с KN-линеала X на его K-пополнение $\hat{X}$, были приведены в [4]. Там же приводился пример такого KN-линеала X, для которого существует распространение нормы на $\hat{X}$, не эквивалентное естественному.

Труднее оказалось привести подобный же пример KB-линеала. В настоящей заметке будут приведены указанные примеры KB-линеалов, удовлетворяющих, кроме того, некоторым дополнительным условиям, как-то: с полунепрерывной нормой* или с монотонно полной

* Норма на KN-линеале X называется полунепрерывной, если из того, что $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$, $\sup\limits_n x_n = x$, следует, что $\|x_n\| \to \|x\|$.

нормой. Эти примеры показывают, что даже в случае KB-линеала наличие указанных свойств еще не гарантирует того, что все распространения нормы с X на $\hat{X}$ эквивалентны естественному.

2. Пример KB-линеала X счетного типа с единицей, норма в котором полунепрерывна, и такого, что существует распространение нормы с X на $\hat{X}$, не эквивалентное естественному. Для $n=1, 2, \ldots$ через X_n обозначим пространство всех вещественных сходящихся числовых последовательностей с обычными линеаризацией и упорядочением. Норму в X_n введем следующим образом: если $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots; \xi_k, \ldots\}\in X_n$, то

$$\|x\|_{X_n}=\sup_k|\xi_k|+n\sup_k|\xi_{2k}|.$$

Через X обозначим множество всех последовательностей

$$x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

где $x_n\in X_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, для которых $\|x\|_X=\sup\limits_n\|x_n\|_{X_n}<\infty$. Линеаризация и упорядочение в X естественные. Нетрудно проверить, что пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ — KB-линеал счетного типа с единицей и полунепрерывной нормой.

Наряду с нормой $\|\cdot\|_e$ рассмотрим в $\hat{X}$* другую норму. Именно, если

$$w=\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \ldots\}\in\hat{X}, \quad \text{где } n=1, 2, \ldots,$$
$$\hat{x}_n=\{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots\}\in\hat{X}_n,$$

положим

$$\|w\|_{\hat{X}}=\sup_n\left\{\sup_k\left|\xi_k^{(n)}\right|+n\sup_k\left|\xi_{2k}^{(n)}\right|\right\}.$$

Легко видеть, что $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ монотонна на $\hat{X}$, причем $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ есть распространение нормы $\|\cdot\|_X$. Покажем, что $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ и $\|\cdot\|_e$ не эквивалентны на $\hat{X}$. Построим последовательность

$$w_n=\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \hat{x}_n, 0, \ldots\}, \quad (n=1, 2, \ldots),$$

причем $\hat{x}_n=\{1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$. Ясно, что $\|w_n\|_{\hat{X}}=1+n\cdot 0=1$, но $\|w_n\|_e=1+n$. Отсюда видно, что эти две нормы не эквивалентны на $\hat{X}$.

Замечание. Так как монотонные нормы $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ и $\|\cdot\|_e$ не эквивалентны, а норма $\|\cdot\|_e$ банахова, то $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ не является банаховой, в чем можно убедиться и непосредственной проверкой.

3. Пример $K_\sigma N$-пространства X с монотонно полной** нормой, такого, что существует распространение нормы с X на $\hat{X}$, не эквивалентное естественному. Пусть E — какое-нибудь несчетное множество. Для $n=1, 2, \ldots$ обозначим через X_n множество всех ограниченных вещественных функций на E,

* Легко видеть, что $\hat{X}$ — множество всех последовательностей $x=\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \ldots\}$, где $\hat{x}_n\in\hat{X}_n$ ($\hat{X}_n$—пространство всех ограниченных вещественных последовательностей), для которых $\sup\limits_n\|\hat{x}_n\|_{\hat{X}_n}<\infty$; здесь $\|\cdot\|_{\hat{X}_n}$ есть естественное распространение нормы с X_n на $\hat{X}_n$.

** Норма на KN-линеале называется монотонно полной, если из того, что $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots x_n\leqslant\ldots$ и $\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$, следует существование $\sup\limits_n x_n\in X$.

удовлетворяющих условию: для каждого $x \in X_n$ существует такое число $a(x)$, что множество $\{t \in E : x(t) \neq a(x)\}$ не более чем счетно. Порядок и линеаризация в X_n естественные. Норму на X_n зададим так:

$$\|x\|_{X_n} = \sup_{t \in E} |x(t)| + n\,|a(x)|.$$

Нетрудно видеть, что $(X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ есть $K_\sigma N$-пространство с монотонно полной нормой. Известно (см., например, [1], стр. 210), что монотонно полная норма всегда банахова.

Через X обозначим множество всех последовательностей

$$x_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\},$$

где $x_n \in X_n$, для которых $\|x\|_X = \sup_n \|x_n\|_{X_n} < \infty$. Порядок и линеаризация в X естественные. Ясно, что $(X, \|\cdot\|_X)$ есть $K_\sigma N$-пространство с монотонно полной и, следовательно, банаховой нормой.

Убедимся, что X — требуемое пространство. По-прежнему $\hat{X}$ означает K-пополнение пространства X, а $\hat{X}_n$ — K-пополнение X_n. На $\hat{X}$ будем рассматривать две нормы: $\|\cdot\|_e$ — естественную и норму $\|\cdot\|_{\hat{X}}$, которую определим следующим образом. Зафиксируем такое $F \subset E$, что F и $E \setminus F$ несчетны. Через $\mathbf{A}(F)$ обозначим совокупность всех не более чем счетных подмножеств множества F.

Для $\hat{x} \in \hat{X}_n$ положим $\|\hat{x}\|_{\hat{X}_n} = \sup_{t \in E} |x(t)| + n \inf_{G \in \mathbf{A}(F)} \sup_{t \in F \setminus G} |x(t)|$.*

Для $\hat{x} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \ldots\} \in \hat{X}$ положим теперь

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = \sup_n \|\hat{x}_n\|_{\hat{X}_n}.$$

Как и в предыдущем примере, легко проверяется, что $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ есть распространение нормы $\|\cdot\|_X$ и что $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ не эквивалентны.

Замечания. а) В [2] было показано, что естественное распространение монотонно полной нормы с произвольного $K_\sigma N$-пространства на его K-пополнение снова есть монотонно полная норма. Приведенный пример показывает, что в этом случае могут существовать и такие распространения нормы (не эквивалентные естественному), которые не обладают свойством монотонной полноты.

б) В обоих примерах на X существует достаточное множество вполне линейных функционалов.

Summary

Two examples concerning the extension of monotone complete and complete norms on cut extension of normed lattice are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. В. А. Соловьев. О распространении полунепрерывной и монотонно полной нормы с KN-линеала на его K-пополнение. Вестник ЛГУ, № 1, 1968.
3. Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский. О метрической полноте нормированных счетно-нормировочных структур. Вестник ЛГУ, № 19, 1966.
4. В. А. Соловьев. О распространении монотонной нормы с нормированной структуры на ее пополнение по Дедекинду. Сиб. матем. ж., 7, № 6, 1966.

* Разумеется, $\|\cdot\|_{\hat{X}_n}$ не есть естественное распространение нормы $\|\cdot\|_{X_n}$.

Статья поступила в редакцию 2 апреля 1968 г.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1969

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X, № 1 Январь — Февраль 1969 г.

УДК 513.882

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

ОБ ИЗОМОРФНЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ

Хорошо известно, что упорядочение в банаховой структуре полностью определяет ее топологию. Мы рассмотрим обратный вопрос: в какой степени топология в банаховой структуре определяет ее остальные свойства? В частности, будет показано следующее. Пусть X и Y — две (σ)-полные банаховы структуры, которые изоморфны как банаховы пространства, т. е. существует взаимно однозначное линейное непрерывное отображение X на Y. Пусть также в X выполнено следующее условие, которое называется условием (A):

если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots x_n \geqslant \ldots$ и $\inf x_n = 0$, то $\|x_n\| \to 0$.

Тогда условие (A) выполняется и в пространстве Y. Таким образом, рассматриваемое свойство (σ)-полной банаховой структуры полностью определяется ее топологией. Это основной результат работы. Имеются и некоторые другие результаты.

1. Мы будем в основном пользоваться терминологией и обозначениями, принятыми в монографии ([1]). Два банаховых пространства X и Y, которые могут быть, в частности, KB-линеалами, будут называться изоморфными, если существует линейное непрерывное взаимно однозначное отображение одного из них на другое. В этом случае будем писать $X \sim Y$. Таким образом, термин «изоморфизм» будет в дальнейшем использоваться только в смысле теории банаховых пространств, а не пространств полуупорядоченных. Символом $X \times Y$ будет обозначаться декартово произведение банаховых пространств X и Y. Термины «сепарабельность», «рефлексивность», «подпространство», «сопряженное пространство» будут использоваться исключительно в смысле теории линейных нормированных пространств. В частности, под подпространством понимается замкнутое линейное подмножество банахова пространства.

Символами m, c, c_0, l^1 обозначаются обычные банаховы пространства вещественных числовых последовательностей с естественными упорядочениями и нормами. Сопряженное к банахову пространству X обозначается через X^*. Если K — бикомпакт, то символ $C(K)$ обозначает пространство всех вещественных непрерывных функций на K с обычными упорядочением и нормой. Через J будет обозначаться известное пространство Джеймса (см. ([5]), стр. 123). Через $M = M\ [0,\ 1]$ будет обозначаться обычное пространство вещественных измеримых и ограниченных на $[0,\ 1]$ функций с отождествлением эквивалентных.

2. Теорема 1 (см. ([2])). *КВ-линеал X является КВ-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон, т. е. каждая слабо фундаментальная последовательность его элементов слабо сходится.*

Теорема 2 (см. ([3])). *КВ-линеал X является КВ-пространством тогда и только тогда, когда в нем нет подпространства, изоморфного пространству c_0.*

Очевидно, что из любой из этих теорем вытекает следующее предложение.

Теорема 3. *Пусть X и Y — два КВ-линеала, причем $X \sim Y$. Если один из них является КВ-пространством, то это же справедливо и для второго.*

3. Хорошо известно, что в c_0 условие A выполнено, а в c не выполнено. Известно также, что $c \sim c_0$. Тем не менее, справедлива

Теорема 4. *Пусть X и Y два (b)-полных $K_\sigma N$-пространства, причем $X \sim Y$. Если в одном из них выполнено условие A, то и в другом пространстве выполняется условие A.*

Мы не будем сейчас доказывать теорему 4, так как она является прямым следствием теоремы 5, которую мы сформулируем и докажем далее.

А. Пельчинским было введено следующее определение.

Определение (([4]), стр. 251). Говорят, что банахово пространство **X обладает свойством u,** если для каждой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset X$ найдется такая последовательность $\{y_n\} \subset X$, что:

α) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty$ для любого $f \in X^*$.

β) последовательность $x_n - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ слабо сходится к нулю.

Теорема 5. *Для любого (b)-полного $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

а) *в X выполнено условие A;*

б) *в X выполнено условие u;*

в) *в X нет подпространств изоморфных пространству m;*

г) *в X нет подпространств изоморфных пространству $C[0, 1]$;*

д) *в X нет подпространств изоморфных пространству Джеймса J.*

Доказательству этой теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Пусть X — K-пространство с единицей 1, Y — его фундамент, причем $1 \in Y$. Тогда для любого $x \in X$ найдется такая последовательность попарно дизъюнктных элементов $\{y_n\} \subset Y$, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$ ~~(b)~~ (0) сходится в X и его сумма равна x.*

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Лемма 2. *Пусть X — K-пространство, $\overline{X}$ — пространство всех вполне линейных на X функционалов. Пусть последовательность $\{f_n\} \subset \overline{X}$, причем $f_n \xrightarrow{(0)} f \in \overline{X}$. Тогда для любого $x \in X$ будет $f_n(x) \to f(x)$.*

Доказательство. Найдется такая последовательность $\{g_n\} \subset \overline{X}$, что $g_n \downarrow 0$ и для всех n справедливо неравенство $|f_n - f| \leqslant g_n$. Для $x \in X$ положим $g(x) = \lim g_n(x)$. Тогда при всех n $0 \leqslant g \leqslant g_n$, а следовательно, $g = 0$. Таким образом, $\lim g_n(x) = 0$ для любого $x \in X$. Значит,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n - f|(|x|) \leqslant g_n(|x|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть X — (b)-полное KN-пространство, удовлетворяющее условию А. Если последовательность $\{x_n\} \subset X$, состоящая из попарно дизъюнктных элементов, такова, что для любого $f \in X^*$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ сходится, то при любом $f \in X^*$ этот ряд сходится абсолютно.*

Доказательство. Возьмем произвольный $f \in X^*$. Так как элементы $\{x_n\}$ попарно дизъюнктны, то найдется такой $g \in X^*$, что $|f| = |g|$ и $g(x_n) = |f|(|x_n|)$ при любом n. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f|(|x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. Импликации д) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ в) тривиальны. Импликация в) $\Rightarrow$ а) доказана в ([6]), а б) $\Rightarrow$ д) доказана в ([4]). Осталось только доказать, что а) $\Rightarrow$ б).

Обозначим через Z K-пространство всех вполне линейных функционалов на сопряженном к X пространстве X^*, т. е. $Z = \widetilde{X^*}$. Пусть T — оператор канонического вложения X в Z. Тогда TX есть фундамент в Z (см. ([1]), стр. 207, 208, 289). Положим

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2(\|x_n\| + 1)}$$

(написанный ряд сходится по норме). Обозначим через Z_0 главную компоненту пространства Z, порожденную элементом Tv. Положим для $f \in X^*$

$$F(f) = \lim f(x_n) = \lim\, (Tx_n)(f).$$

Так как $Tx_n \in Z_0$, то (см., например, ([7])) $F \in Z_0$. Применим теперь лемму 1. Найдется такая последовательность $\{F_n\} \subset Z_0 \cap TX$, состоящая из попарно дизъюнктных элементов, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n\,(o)$-сходится в Z_0 и сумма его равна F. Пусть $F_n = Ty_n$, где $\{y_n\} \subset X$. Ясно, что элементы $\{y_n\}$ попарно дизъюнктны.

В силу леммы 2, для любого $f \in X^*$

$$F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(y_n).$$

В силу леммы 3, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty$ при любом $f \in X^*$.

Остается заметить, что при любом $f \in X^*$.

$$\lim f\left(x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \lim f(x_n) - \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i) = F(f) - F(f) = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пространство $C[0, 1]$ не изоморфно никакому (b)-полному $K_\sigma N$-пространству.*

Это вытекает из теоремы 5 и теоремы Огасавара (см. [2]): (b)-полное сепарабельное $K_\sigma N$-пространство удовлетворяет условию A.

4. Определение. Говорят, что в KB-линеале X выполнено условие B, если из того, что $0 \leqslant x_n \uparrow +\infty$, следует $\|x_n\| \to \infty$.

Покажем, что для условия B теорема, аналогичная теореме 4, уже не справедлива. Пусть N — множество натуральных чисел в дискретной топологии, βN — его чеховское бикомпактное расширение.

Возьмем произвольную точку $q \in \beta N \setminus N$. Положим

$$X = C(\beta N), \quad Y = \{x : x \in X, \quad x(q) = 0\},$$

причем на Y рассматриваем норму и упорядочение, индуцированные из X. Ясно, что X и Y являются (b)-полными KN-пространствами, в X выполнено условие B, а в Y условие B не выполнено. Легко также показать, что $X \sim Y$.

5. Пусть X и Y — (b)-полные KN-пространства, причем $X \sim Y$. Возникает вопрос; если в X есть единица, то будет ли Y также пространством с единицей? Покажем, что, вообще говоря, это не так.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с конечной несепарабельной мерой. Тогда гильбертово пространство $L^2(T, \Sigma, \mu)$ несепарабельно и при естественном упорядочении является пространством с единицей.

Обозначим через X пространство $L^2(T, \Sigma, \mu)$ с естественным упорядочением. Выберем теперь в $L^2(T, \Sigma, \mu)$ полную ортогональную систему элементов $\{e_\xi\}_{\xi \in \Xi}$, которая необходимо будет несчетной.

Введем теперь в $L^2(T, \Sigma, \mu)$ новое упорядочение, считая $x \in L^2$ неотрицательным тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{e_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ неотрицательны. За Y примем L^2 с этим новым упорядочением. Ясно, что в KN-пространстве Y нет единицы. Таким образом, X и Y являются искомой парой пространств.

6. Приведем теперь пример пары (b)-полных KN-пространств X и Y таких, что $X \sim Y$, в X есть достаточное число вполне линейных функционалов, а в Y нет нетривиальных вполне линейных функционалов.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ K-пополнение (т. е. пополнение по Дедекинду) пространства $C(0, 1]$. При естественной нормировке $\mathfrak{M}$ является KN-пространством ограниченных элементов. Хорошо известно, что на $\mathfrak{M}$ нет нетривиальных вполне линейных функционалов. Мы убедимся, что $m \sim \mathfrak{M}$. Так как на m есть достаточное число вполне линейных функционалов, то m и $\mathfrak{M}$ и дают требуемый пример.

Теорема 6. *Пространства m и $\mathfrak{M}$ изоморфны.*

Нам понадобятся 3 леммы.

Лемма 4. $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$.

Доказательство. Обозначим через X соединение двух экземпляров K-линеала $C[0, 1/2]$:

$$X = \{(x_1, x_2)\}, \text{ где } x_1 \in C[0, 1/2],\ x_2 \in C[0, 1/2];$$

причем $(x_1, x_2) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$. Положим $Y = \{(x_1, x_2) \in X : x_1(1/2) = x_2(0)\}$. Y есть линейная подструктура в X, причем Y можно отождествить с $C\ [0, 1]$. Обозначим через Z K-пополнение X. Ясно, что Z будет K-пополнением и для Y тоже. Тем самым доказано, что соединение двух экземпляров K-пространства $\mathfrak{M}$ можно алгебраически и структурно отождествить с $\mathfrak{M}$. Это даже больше, чем утверждается в лемме.

Лемма 5. *В пространстве m существует подпространство, изоморфное пространству $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Занумеруем все рациональные точки отрезка $[0, 1]$ в последовательность $r_1, r_2, \ldots$. Для любого натурального n обозначим через f_n функционал на $C\ [0, 1]$, действующий по формуле

$$f_n(x) = x(r_n), \quad \text{где } x \in C\,[0, 1].$$

Обозначим теперь через F_n любое линейное положительное распространение f_n с $C\ [0, 1]$ на $\mathfrak{M}$. Пусть T — оператор, действующий из $\mathfrak{M}$ в m по формуле

$$Tx = (F_1(x),\ F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots) \in m, \text{ где } x \in \mathfrak{M}.$$

Нетрудно видеть, что $T\mathfrak{M}$ и есть искомое подпространство, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *В пространстве $\mathfrak{M}$ существует подпространство, изоморфное пространству m.*

Доказательство. Хорошо известно, что в $\mathfrak{M}$ не выполнено условие A. Тогда (см. ([8])) в $\mathfrak{M}$ существует подпространство, изоморфное пространству m, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6. А. Пельчинский ([8]) доказал, что $M \sim m$. Наше доказательство будет точной копией рассуждений Пельчинского. Напомним, что если в банаховом пространстве B имеется подпространство E, изоморфное KN-пространству ограниченных элементов, то E имеет в B топологическое дополнение. Следовательно, $B \sim E \times F$, где F — некоторое банахово пространство. Имеем

$$\mathfrak{M} \sim X \times m, \quad m \sim Y \times \mathfrak{M}, \quad m \sim m \times m, \quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M} \sim X \times m \sim X \times (m \times m) \sim (X \times m) \times m \sim \mathfrak{M} \times m,$$
$$m \sim Y \times \mathfrak{M} \sim Y \times (\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}) \sim (Y \times \mathfrak{M}) \times \mathfrak{M} \sim m \times \mathfrak{M}.$$

Тем самым $\mathfrak{M} \sim m$, что и требовалось доказать.

7. Теорема 7. *Пусть X — (b)-полное $K_\sigma N$-пространство, в котором выполнено условие A, но не выполнено условие B. Тогда X не изоморфно никакому сопряженному банахову пространству.*

Доказательство. В силу теоремы 5, в X нет подпространств, изоморфных пространству m. В силу теоремы 2, в X есть подпространство, изоморфное пространству c_0. Но (см. ([9])) если сопряженное банахово пространство содержит подпространство, изоморфное c_0, то оно содержит и подпространство, изоморфное пространству m. Теорема доказана.

Например, пространство Орлича E_M (см. ([10])) в случае, когда N-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, не изоморфно никакому сопряженному банахову пространству.

Следствие. *Пусть X — (b)-полное $K_\sigma N$-пространство такое, что X^* сепарабельно, а X^{**} несепарабельно. Тогда X не изоморфно никакому сопряженному банахову пространству.*

Заметим также, что существуют такие (b)-полные KN-пространства, в которых условие B не выполнено, но которые, однако, изоморфны сопряженным банаховым пространствам. Таким будет, например, пространство Y, рассматриваемое в п.4.

Поступило
12.IV.1967

ЛИТЕРАТУРА

1 Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
2 Ogasawara T., Theory of vector lattices, J. Hirosima Univ., Ser. A, 12 (1942), 37—100.
3 Лозановский Г. Я., О банаховых структурах и базисах, Функц. анализ и его приложения, 1, № 3 (1967), 92.
4 Pelczynski A., A connection between weakly unconditional convergence and weakly completeness of Banach spaces, Bull. Acad. Pol. Sci., Série sci. math., astr. et phys., 6, № 4 (1958), 251—253.
5 Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, М., 1961.
6 Лозановский Г. Я., Меклер А. А., Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах, Изв. высш. уч. заведений, Матем., № 11 (1967), 47—53.
7 Лозановский Г. Я., О пределе последовательности функционалов в полуупорядоченных пространствах, Вестник Ленингр. гос. ун-та, вып. 1 (1967), 148—149.
8 Pelczynski A., On the isomorphism of the spaces m and M, Bull. Acad. Pol. Sci., Série sci math., astr. et phys., 6 (1958), 695—696.
9 Bessaga C., Pelczynski A., Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0, Bull. Acad. Pol. Sci., Série sci. math., astr. et phys., 6 (1958), 249—250.
10 Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.

X

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1969

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X, № 3 Май — Июнь 1969 г.

УДК 513.737

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ

Пусть (T, Σ, μ) — вполне σ-конечное измеримое пространство, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на (T, Σ, μ) с отождествлением эквивалентных. Пусть X_1 и X_2 — две банановых структуры на (T, Σ, μ), т. е. X_i $(i = 1,2)$ есть банахово пространство, являющееся линейным подмножеством в S, причем выполнено следующее условие нормальности: если $x \in X_i$, $y \in S$ и $|y| \leqslant |x|$ п.в. на T, то $y \in X_i$ и $\|y\|_{X_i} \leqslant \|x\|_{X_i}$. А. Кальдерон рассмотрел следующую конструкцию (см. [1]). Для произвольного $0 < s < 1$ обозначим через X класс функций $x \in S$ таких, что $|x| \leqslant \lambda |u|^{1-s}|v|^s$ для некоторой константы $\lambda > 0$ и каких-нибудь

$$u \in X_1, \quad v \in X_2 \quad \text{с} \quad \|u\|_{X_1} \leqslant 1, \quad \|v\|_{X_2} \leqslant 1.$$

Обозначим через $\|x\|_X$ точную нижнюю грань тех значений λ, для которых выполняется последнее неравенство. Тогда X с нормой $\|\cdot\|_X$ является банаховой структурой на (T, Σ, μ), которая обозначается через $X_1^{1-s}X_2^s$. В работе [1] среди многих других результатов методами теории аналитических функций было получено описание сопряженного пространства $(X_1^{1-s}X_2^s)^*$ при некоторых ограничениях на исходные пространства X_1 и X_2. В настоящей работе будет дано построение пространства $(X_1^{1-s}X_2^s)^*$ для произвольных X_1 и X_2, причем методом, отличным от метода Кальдерона. Оказывается (теорема 1), что пространство $(X_1^{1-s}X_2^s)^*$ можно получить из пространств X_1^* и X_2^* в самом общем случае примерно так же, как пространство $X_1^{1-s}X_2^s$ получается из пространств X_1 и X_2. Это — основной результат работы. Он является ключом для получения других результатов: описанию пространств дуальных к Кальдероновым (теорема 2), установлению некоторых связей между банаховой структурой и ее дуальным пространством (теоремы 5, 6), некоторых фактов о рефлексивности банаховых структур (теоремы 3, 4). Отметим также теорему 7, из которой, например, следует, что любую банахову структуру измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ путем умножения на некоторую «весовую» функцию можно превратить в банахову структуру, содержащую L^∞ $[0, 1]$ и одновременно содержащуюся в L^1 $[0, 1]$. Некоторые из результатов настоящей работы были опубликованы ранее без доказательств (см. [2-4]). Отметим также, что упомянутые банаховы структуры Кальдерона с другой точки зрения исследовались в статье С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова (см. ([5])).

Мы систематически будем использовать методы и результаты теории линейных полуупорядоченных пространств (см. монографии ([6,7])). В частности, важную роль будет играть следующее хорошо известное обстоятельство. Пусть $L^\infty = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ — обычное пространство всех измеримых существенно ограниченных функций (эквивалентные функции отождествляются, норма равномерная). Тогда L^∞ алгебраически и структурно изоморфно и изометрично пространству $C(Q)$ всех непрерывных функций на подходящем бикомпакте Q. При этом бикомпакт Q экстремален, т. е. замыкание любого его открытого подмножества открыто-замкнуто. Указанный изоморфизм пространства L^∞ на $C(Q)$ можно продолжить до алгебраического и структурного изоморфизма пространства $S = S(T, \Sigma, \mu)$ на $C_\infty(Q)$, где $C_\infty(Q)$ — пространство всех непрерывных на Q функций, которые на нигде не плотных в Q множествах могут принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Алгебраические операции в $C_\infty(Q)$ производятся поточечно на плотных в Q множествах с последующим распространением по непрерывности на все Q (см. ([7]), стр. 133—170). Поэтому вместо банаховых структур измеримых функций можно рассматривать банаховы структуры, составленные из функций класса $C_\infty(Q)$ на экстремальном бикомпакте Q. Это не только удобнее, но и несколько общее, ибо пространств типа $C_\infty(Q)$ в определенном смысле существенно больше, чем пространств типа $S(T, \Sigma, \mu)$.

§ 1. Терминология и обозначения

Мы будем в основном следовать терминологии и обозначениям из теории полуупорядоченных пространств, принятым в монографии ([7]). Q всегда означает *экстремальный бикомпакт*, $C_\infty(Q)$ — соответствующее *расширенное К-пространство. Если* $u \in C_\infty(Q)$, то замыкание множества $\{t \in Q\colon u(t) \neq 0\}$ будет называться *носителем* и обозначаться через Q_u. Пусть $u, v \in C_\infty(Q)$, причем $Q_u \subset Q_v$. Тогда существует единственный элемент $w \in C_\infty(Q)$, такой, что $Q_w = Q_u$ и $u(t) = v(t)w(t)$ на плотном в Q множестве. Мы полагаем $w = u / v$. *Конус положительных элементов* K-линеала X будет обозначаться через X_+ или X^+. Если X — K-линеал и $u \in X$, то полагаем $X_{(u)} = \{x \in X : |x| \leqslant \lambda |u|$ для некоторого числа $\lambda > 0\}$, т. е. $X_{(u)}$ есть главный нормальный подлинеал в X, порожденный элементом u.

Символ (T, Σ, μ) означает вполне σ-конечное измеримое пространство, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — расширенное K-пространство всех измеримых почти всюду конечных на (T, Σ, μ) функций с отождествлением эквивалентных и естественным упорядочением. Символы $L^p(T, \Sigma, \mu)$, $l^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ имеют обычный смысл, а также c и c_0. Через L обозначается произвольное *КВ-пространство с аддитивной нормой, J — функционал на L, задающий норму*, т. е. $J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L$ для $x \in L$.

V)

Символ K будет означать произвольный бикомпакт, $C(K)$ — пространство всех вещественных непрерывных функций на K с равномерной нормой, $M(K)$ — класс всех неотрицательных вещественных конечных бэровских мер на K. Для $\mu \in M(K)$ символ $L^1(\mu)$ имеет само собой разумеющийся смысл.

Если E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, то E^* — его сопряженное пространство, сопряженная норма обозначается через $\|\cdot\|_{E^*}$. Для $x \in E$, $f \in E^*$ значение f на x обозначается через $f(x)$ или $\langle f, x \rangle$. Если E и F — банаховы пространства, то $E \times F$ — их топологическое произведение.

Всюду в работе через s обозначено произвольное число такое, что $0 < s < 1$.

§ 2. О функциях от элементов K-пространства

Понятие функции от элементов K-пространства хорошо известно (см. ([6]), стр. 146). Пусть $F(u, v)$ — вещественная функция определенная и непрерывная при $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$. Пусть X — произвольное K-пространство, Y — его максимальное расширение. Зафиксируем в Y единицу. Тогда можно считать, что $Y = C_\infty(Q)$ для некоторого экстремального бикомпакта Q. Для любых $x, y \in X$ найдется такой $z \in Y$, что $z(t) = F(x(t), y(t))$ для всех t из некоторого плотного в Q множества, на котором x, y и z принимают конечные значения. По определению полагаем $z = F(x, y)$. Заметим при этом, что значение $F(x, y)$ существенно зависит, вообще говоря, от выбора единицы в Y. Кроме того, $F(x, y)$ может не входить в X, хотя $x, y \in X$. Нетрудно однако доказать следующую лемму (ср. ([6]), стр. 157).

V

Лемма 1. *Пусть $F(u, v)$ удовлетворяет условиям*

1) $|F(u, v)| \leqslant A|u| + B|v|$,
2) $F(\lambda u, \lambda v) = \lambda F(u, v)$

для любых чисел $\lambda \geqslant 0$, $-\infty < u$, $v < \infty$, где A и B — некоторые константы. Тогда при любом выборе единицы в Y имеем $F(x, y) \in X$ для $x, y \in X$ и значение $F(x, y)$ от выбора единицы в Y не зависит.

Замечание 1. Функция $F(u, v) = |u|^{1-s}|v|^s$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Пусть K — произвольный бикомпакт, $X = C(K)^*$ — пространство сопряженное в смысле Банаха к $C(K)$, $F(u, v)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 1. Возьмем произвольные $f, g \in X$ и рассмотрим $F(f, g)$, т. е. значение функции $F(u, v)$ на элементах f и g K-пространства X. Нашей ближайшей целью является описание $F(f, g)$ как функционала на $C(K)$. Заметим сначала, что найдется такая $\mu \in M(K)$ и такие $p, q \in L^1(\mu)$, что $f(x) = \int_K xp\,d\mu$, $g(x) = \int_K xq\,d\mu$ для любого $x \in C(K)$.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$F(f, g)(x) = \int_K F(p, q)\, x\, d\mu \tag{1}$$

для любого $x \in C(K)$.

Несложное доказательство леммы мы опускаем.

Замечание 2. Если X K-пространство, $x, y \in X_+$, то всюду в дальнейшем символ $x^{1-s}y^s$ будет означать значение функции $F(u, v) = |u|^{1-s}|v|^s$ на элементах x и y.

§ 3

В этом параграфе мы приведем большей частью без доказательств несколько несложных вспомогательных предложений о пространствах $C(K)$, где K — произвольный бикомпакт.

Лемма 3. *Пусть P — некоторая главная компонента K-пространства $C(K)^*$. Тогда существует $\mu \in M(K)$, обладающая следующим свойством: для любого $g \in P$ найдется такая $q \in L^1(\mu)$, что $g(x) = \int_K xq\,d\mu$ для любого $x \in C(K)$.*

Лемма 4. *Пусть $f, g \in C(K)_+^*$; $x, y \in C(K)_+$. Тогда*

$$(f^{1-s}g^s)(x^{1-s}y^s) \leqslant (f(x))^{1-s}(g(y))^s.$$

Лемма 5. *Пусть $f, g, h \in C(K)_+^*$ таковы, что*

$$h(x^{1-s}y^s) \leqslant (f(x))^{1-s}(g(y))^s$$

для любых $x, y \in C(K)_+$. Тогда $h \leqslant f^{1-s}g^s$.

Лемма 5 есть

Лемма 6. *Пусть $\mu \in M(K)$; $p, q, r \in L^1(\mu)_+$.*

Если для любых $u, v, x \in C(K)_+$ справедливо неравенство

$$\int_K [(1-s)pu + sqv]\,x\,d\mu \geqslant \int_K ru^{1-s}v^s x\,d\mu,$$

то $p^{1-s}q^s \geqslant r$ μ-почти всюду.

Лемма 7. *Пусть $\mu \in M(K)$; $p, q \in L^1(\mu)_+$, пусть также дано число $A > 0$. Если для любой $\varphi \in C(K)$ такой, что $\min\{\varphi(t) : t \in K\} > 0$, справедливо неравенство*

$$\left(\int_K \varphi^s p\,d\mu\right)^{1-s}\left(\int_K \varphi^{s-1} q\,d\mu\right)^s \geqslant A,$$

то

$$\int_K p^{1-s}q^s\,d\mu \geqslant A.$$

Лемма 8. *Пусть $E = C(K) \times C(K)$. Возьмем произвольный $h \in C(K)_+^*$ и положим*

$$W = \{(f, g) \in E^* : f \geqslant 0, \quad g \geqslant 0, \quad f^{1-s}g^s \geqslant h\}.$$

Множество W выпукло и замкнуто в топологии $\sigma(E^*, E)$.

Доказательство. Выпуклость W проверяется без труда. Так как W выпукло, то для доказательства второго утверждения достаточно убедиться, что пересечение W с любым замкнутым шаром пространства E^* замкнуто в топологии $\sigma(E^*, E)$.

Возьмем произвольное ограниченное по норме направление $\{(f_\alpha, g_\alpha):$ $: \alpha \in A\} \subset W$, причем $(f_\alpha, g_\alpha) \to (f, g)$ в топологии $\sigma(E^*, E)$.

Нужно проверить, что $(f, g) \in W$. Не уменьшая общности, можно считать, что при любом $\alpha \in A$ как f_α, так и g_α содержатся в главной компоненте пространства $C(K)^*$, порожденной функционалом h. Поэтому (см. лемму 3) найдутся такие $\mu \in M(K)$ и $p_\alpha, q_\alpha, p, q, r \in L^1(\mu)_+$, что для всех $x \in C(K)$ и для всех $\alpha \in A$ имеем

$$f_\alpha(x) = \int_K x p_\alpha d\mu, \; g_\alpha(x) = \int_K x q_\alpha d\mu, \; f(x) = \int_K x p d\mu,$$

$$g(x) = \int_K xq\, d\mu, \; h(x) = \int_K xr\, d\mu.$$

Возьмем произвольные $x, u, v \in C(K)_+$. Имеем

$$\int_K [(1-s)p_\alpha u + sq_\alpha v]\, x\, d\mu \to \int_K [(1-s)pu + sqv]\, x\, d\mu. \tag{2}$$

Но μ-почти всюду

$$(1-s)p_\alpha u + sq_\alpha v \geqslant (p_\alpha u)^{1-s}(q_\alpha v)^s = p_\alpha^{1-s} q_\alpha^s u^{1-s} v^s \geqslant r u^{1-s} v^s,$$

ибо по условию $p_\alpha^{1-s} q_\alpha^s \geqslant r$ μ-почти всюду. Отсюда и из (2) следует, что

$$\int_K [(1-s)pu + sqv]\, x\, d\mu \geqslant \int_K r u^{1-s} v^s x\, d\mu. \tag{3}$$

Осталось применить лемму 6. Получаем $p^{1-s} q^s \geqslant r$ μ-почти всюду. Это равносильно тому, что $f^{1-s} g^s \geqslant h$, т. е. $(f, g) \in W$.

Лемма 9. *Пусть Q — экстремальный бикомпакт, $Z = C_\infty(Q)$ — соответствующее расширенное K-пространство, $u \in Z_+$ — произвольный элемент, $Z_{(u)}$ — соответствующее пространство ограниченных элементов. Пусть f — положительный линейный функционал на $Z_{(u)}$. Тогда найдется такая мера $\mu \in M(Q)$, что*

$$f(x) = \int_Q (x/u)\, d\mu \tag{4}$$

для любого $x \in Z_{(u)}$.

Справедливость леммы следует из того, что отображение $x \to (x/u)$ есть алгебраический и структурный изоморфизм $Z_{(u)}$ на $C(Q_u)$, где Q_u — носитель u.

§ 4

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства пространств Кальдерона. Пусть X и Y — (b)-полные KN-пространства, являющиеся фундаментами в $C_\infty(Q)$, где Q — экстремальный бикомпакт. Обозначим через $X^{1-s}Y^s$ множество всех таких $z \in C_\infty(Q)$, что

$$|z| \leqslant \lambda |x|^{1-s} |y|^s \tag{5}$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x \in X$, $y \in Y$ с $\|x\|_X \leqslant 1$, $\|y\|_Y \leqslant 1$. Через $\|z\|_{X^{1-s}Y^s}$ будем обозначать инфимум всех возможных λ в неравенстве (5).

Тогда (ср. ([1])) $X^{1-s}Y^s$ с нормой $\|\cdot\|_{X^{1-s}Y^s}$ есть (b)-полное KN-пространство и фундамент в $C_\infty(Q)$.

Возьмем теперь произвольные $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$. Исходя из этих функционалов f и g, мы сейчас построим некоторый функционал $h \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$. Эта конструкция будет играть крайне важную роль во всех дальнейших рассуждениях. На ней будет основан способ описания пространств, сопряженных к кальдероновым.

Возьмем произвольный $z \in X^{1-s}Y^s$. Тогда найдутся такие $u \in X_+$, $v \in Y_+$ и число $\lambda > 0$, что $|z| \leqslant \lambda u^{1-s}v^s$. Рассмотрим $X_{(u)}$ и $Y_{(v)}$. В силу леммы 9 найдутся такие $\mu \in M(Q)$; $p, q \in L^1(\mu)_+$, что

$$f(x) = \int_Q (x/u)\, p\, d\mu, \quad g(y) = \int_Q (y/v)\, q\, d\mu$$

для любых $x \in X_{(u)}$, $y \in Y_{(v)}$.

Положим теперь

$$h(z) = \int_Q (z/u^{1-s}v^s)\, p^{1-s}q^s\, d\mu. \tag{6}$$

Можно показать, что число $h(z)$ не зависит от выбора u, v и μ. Можно также показать, что $h \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$. Мы будем обозначать h через $f^{1-s}g^s$.

Замечание 3. Вообще говоря, $f^{1-s}g^s$ есть только обозначение. О функции от элементов K-пространства здесь говорить не приходится, ибо f и g являются элементами двух различных K-пространств X^* и Y^*. Рассмотрим, однако, частный случай, когда $X \cap Y$ плотно в X и Y по соответствующим нормам. Тогда $X \cap Y$ плотно в $X^{1-s}Y^s$. Следовательно, X^*, Y^* и $(X^{1-s}Y^s)^*$ естественным образом вкладываются в $(X \cap Y)^*$. Тогда f, g и h можно считать элементами одного и того же K-пространства $(X \cap Y)^*$ и, как нетрудно показать, h есть значение функции $F(u, v) = |u|^{1-s}|v|^s$ на элементах $u = f$, $v = g$.

Лемма 10. *Для* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, $x \in X_+$, $y \in Y_+$ *справедливо неравенство*

$$(f^{1-s}g^s)(x^{1-s}y^s) \leqslant (f(x))^{1-s}(g(y))^s.$$

Лемма 11. *Пусть* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, $h \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$ *таковы, что* $h(x^{1-s}y^s) \leqslant (f(x))^{1-s}(g(y))^s$ *для любых* $x \in X_+$, $y \in Y_+$. *Тогда* $h \leqslant f^{1-s}g^s$.

Леммы 10 и 11 легко следуют из леммы 4 и 5 соответственно. Без труда доказывается также

Лемма 12. *Пусть* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, $h \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$, *причем* $h \leqslant f^{1-s}g^s$. *Положим*

$$\varphi_0 = \inf\{\varphi \in Y_+^* : h \leqslant f^{1-s}\varphi^s\}.$$

Тогда $h = f^{1-s}\varphi_0^s$.

Идея доказательства леммы 12 — сведение к случаю пространств ограниченных элементов.

Аналогично доказываются следующие две леммы.

Лемма 13. *Если хотя бы один из двух функционалов* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$ *вполне линеен, то и* $f^{1-s}g^s$ *вполне линеен на* $X^{1-s}Y^s$.

Лемма 14. *Пусть* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, $h \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$, *причем* h *вполне линеен и* $f^{1-s}g^s \geqslant h$. *Обозначим через* f_1 *и* g_1 *вполне линейные составляющие функционалов* f *и* g *соответственно. Тогда* $f_1^{1-s}g_1^s \geqslant h$.

Лемма 15. *Пусть* $\{x_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — *направление в* X_+, *сходящееся к нулю в топологии* $\sigma(X, X^*)$, *а направление* $\{y_\alpha\colon \alpha \in A\} \subset Y_+$ *ограничено по норме в* Y. *Тогда направление* $\{z_\alpha\colon \alpha \in A\}$, *где* $z_\alpha = x_\alpha^{1-s}y_\alpha^s$, *сходится к нулю в* $X^{1-s}Y^s$ *в топологии* $\sigma(X^{1-s}Y^s, (X^{1-s}Y^s)^*)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такой $F \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$, что

$$F(z_\alpha) \geqslant 1 \tag{7}$$

для всех $\alpha \in A_1$, где A_1 — конфинальная часть A. Так как выпуклые замыкания множества в слабой и нормированной топологиях совпадают, то найдется такая последовательность v_i $(i = 1, 2, \ldots)$ выпуклых комбинаций, составленных из элементов множества $\{x_\alpha\colon \alpha \in A_1\}$, которая сходится по норме к нулю в X. Пусть

$$v_i = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}},$$

где для всех $i = 1, 2, \ldots$, и $k = 1, 2, \ldots, n_i$ будет $\alpha_{ki} \in A_1$,

$$t_{ki} \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} = 1.$$

Для $i = 1, 2, \ldots$ положим

$$r_i = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}}^{1-s}\, y_{\alpha_{ki}}^{s}.$$

Тогда, очевидно,

$$F(r_i) = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}F(z_{\alpha_{ki}}) \geqslant \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} = 1. \tag{8}$$

С другой стороны, имеем

$$r_i = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}}^{1-s}\, y_{\alpha_{ki}}^{s} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}}\right)^{1-s} \left(\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}y_{\alpha_{ki}}\right)^{s}.$$

Так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}} \right\|_X \xrightarrow[i\to\infty]{} 0, \qquad \sup_i \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}y_{\alpha_{ki}} \right\|_Y \right\} < \infty,$$

то

$$\|r_i\|_{X^{1-s}Y^s} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0. \tag{9}$$

Неравенства (8) и (9) несовместимы. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Для любого* $F \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$ *найдутся такие* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, *что* $F \leqslant f^{1-s}g^s$.

Доказательство. Из леммы 15 сразу следует, что для указанного

F найдутся такие $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, что $F(x^{1-s}y^s) \leqslant (f(x))^{1-s}(g(y))^s$ для любых $x \in X_+$, $y \in Y_+$. Применив лемму 11, получаем требуемое.

Лемма 17. *Возьмем произвольный $F \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$ и в пространстве $X^* \times Y^*$ рассмотрим множество*

$$W = \{(f, g): f \in X_+^*, g \in Y_+^*, f^{1-s}g^s \geqslant F\}.$$

Тогда W непусто, выпукло, замкнуто в топологии $\sigma(X^* \times Y^*, X \times Y)$.

Доказательство. Непустота W следует из леммы 16. Выпуклость W без труда проверяется непосредственно. Наконец, третье утверждение леммы 17 выводится из леммы 8.

§ 5

В этом параграфе будет доказана теорема о сопряженных пространствах к пространствам Кальдерона.

По-прежнему Q — экстремальный бикомпакт, X и Y — (b)-полные KN-пространства, являющиеся фундаментами в $C_\infty(Q)$. На пространстве $(X^{1-s}Y^s)^*$ рассмотрим две нормы: обычную сопряженную норму $\|\cdot\|_{(X^{1-s}Y^s)^*}$ и норму $\|\cdot\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s}$ типа кальдероновой. Именно, для $F \in (X^{1-s}Y^s)^*$ полагаем

$$\|F\|_{(X^{1-s}Y^s)^*} = \sup\{F(z): z \in X^{1-s}Y^s,\ \|z\|_{X^{1-s}Y^s} \leqslant 1\}, \tag{10}$$

$$\|F\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s} = \inf\{\lambda > 0: |F| \leqslant \lambda |f|^{1-s}|g|^s \tag{11}$$

для некоторых $f \in X^*$, $g \in Y^*$ с $\|f\|_{X^*} \leqslant 1$, $\|g\|_{Y^*} \leqslant 1\}$. Далее мы убедимся, что эти нормы совпадают. Пока только отметим без труда проверяемое неравенство

$$\|F\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s} \geqslant \|F\|_{(X^{1-s}Y^s)^*} \tag{12}$$

для любого $F \in (X^{1-s}Y^s)^*$.

Лемма 18. *Для любого $F \in (X^{1-s}Y^s)^*$ справедливо неравенство*

$$\|F\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s} \leqslant \|F\|_{(X^{1-s}Y^s)^*}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $X \times Y$ с нормой

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_X / (1-s),\ \|y\|_Y / s\}, \tag{14}$$

где $(x, y) \in X \times Y$. Сопряженным к нему по норме будет пространство $X^* \times Y^*$ с нормой

$$\|(f, g)\|^* = (1-s)\|f\|_{X^*} + s\|g\|_{Y^*}, \tag{15}$$

где $(f, g) \in X^* \times Y^*$. Разумеется, мы считаем, что для $(x, y) \in X \times Y$ и $(f, g) \in X^* \times Y^*$ справедливо

$$\langle (f, g), (x, y)\rangle = f(x) + g(y). \tag{16}$$

Зафиксируем произвольный $F_0 \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$ такой, что $\|F_0\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s} = 1$. Для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\|F_0\|_{(X^{1-s}Y^s)^*} \geqslant 1. \tag{17}$$

Положим

$$W = \{(f, g) : f \in X_+^*, g \in Y_+^*, f^{1-s}g^s \geqslant F_0\}.$$

Возьмем произвольное число A, причем $0 < A < 1$, и положим

$$V_A = \{(f, g) \in X^* \times Y^*, \|(f, g)\|^* \leqslant A\}.$$

Тогда W и V_A не пересекаются, оба они выпуклы и замкнуты в топологии $\sigma(X^* \times Y^*, X \times Y)$, причем V_A в этой топологии бикомпактно. Следовательно, эти два множества отделимы гиперплоскостью замкнутой в топологии $\sigma(X^* \times Y^*, X \times Y)$. Таким образом, найдется такой $(x_0, y_0) \in X \times Y$, что $\|(x_0, y_0)\| = 1$ и

$$\inf\{\langle (f, g), (x_0, y_0)\rangle : (f, g) \in W\} \geqslant A. \tag{18}$$

Положим $x_0 / (1-s) = u_0$, $y_0 / s = v_0$. Тогда

$$\|u_0\|_X \leqslant 1, \qquad \|v_0\|_Y \leqslant 1. \tag{19}$$

Из (18) следует, что для $(f, g) \in W$ справедливо неравенство

$$(1-s)f(u_0) + sg(v_0) \geqslant A. \tag{20}$$

Заметим, что для $(f, g) \in W$ и любого числа $a > 0$ имеем, очевидно:

$$(a^s f, a^{s-1}g) \in W. \tag{21}$$

Отсюда

$$(1-s)a^s f(u_0) + sa^{s-1}g(v_0) \geqslant A. \tag{22}$$

Из (22) следует, что $f(u_0) \neq 0$ и $g(v_0) \neq 0$.

Действительно, пусть $f(u_0) = 0$. Тогда, устремив a к $+\infty$, получим $0 \geqslant A$, что невозможно. Если бы было $g(v_0) = 0$, то, устремив a к 0, получили бы $0 \geqslant A$, что невозможно. Итак, $f(u_0) \neq 0$ и $g(v_0) \neq 0$. Взяв в (22) $a = g(v_0) / f(u_0)$, получим

$$[f(u_0)]^{1-s}[g(v_0)]^s \geqslant A. \tag{23}$$

Зафиксируем теперь произвольный $(f, g) \in W$ такой, что $f^{1-s}g^s = F_0$, и возьмем произвольную функцию $\varphi \in C(Q)$ такую, что $\min\{\varphi(t) : t \in Q\} > 0$.

Для любых $x \in X$, $y \in Y$ положим

$$f_1(x) = f(\varphi^s x), \qquad g_1(y) = g(\varphi^{s-1}y). \tag{24}$$

Без труда проверяем, что $f_1 \in X_+^*$, $g_1 \in Y_+^*$ и что $f_1^{1-s}g_1^s = f^{1-s}g^s = F_0$, т. е. $(f_1, g_1) \in W$.

В силу (23) отсюда получаем

$$[f_1(u_0)]^{1-s}[g_1(v_0)]^s \geqslant A. \tag{25}$$

Найдем такую $\mu \in M(Q)$ и $p_0, q_0 \in L^1(\mu)_+$, что

$$f(x) = \int\limits_Q (x/u_0)\, p_0 d\mu, \quad g(y) = \int\limits_Q (y/v_0)\, q_0 d\mu,$$

для всех $x \in X_{(u_0)}$, $y \in Y_{(v_0)}$. Тогда для указанных x, y имеем

$$f_1(x) = \int\limits_Q (\varphi^s x/u_0)\, p_0\, d\mu, \quad g_1(y) = \int\limits_Q (\varphi^{s-1} y/v_0)\, q_0\, d\mu \tag{26}$$

Из (25) и (26) получаем

$$\left(\int\limits_Q \varphi^s p_0\, d\mu \right)^{1-s} \left(\int\limits_Q \varphi^{s-1} q_0\, d\mu \right)^s \geqslant A. \tag{27}$$

В силу леммы 7 отсюда следует, что

$$\int\limits_Q p_0^{1-s} q_0^s\, d\mu \geqslant A. \tag{28}$$

Далее, имеем

$$F_0(u_0^{1-s} v_0^s) = (f^{1-s} g^s)\,(u_0^{1-s} v_0^s) = \int\limits_Q (u_0^{1-s} v_0^s / u_0^{1-s} v_0^s) \times$$

$$\times\, p_0^{1-s} q_0^s\, d\mu = \int\limits_Q p_0^{1-s} q_0^s\, d\mu,$$

откуда

$$F_0(u_0^{1-s} v_0^s) \geqslant A. \tag{29}$$

Но из (19) следует, что $\|u_0^{1-s} v_0^s\|_{X^{1-s}Y^s} \leqslant 1$. Тогда из (29) вытекает

$$\|F_0\|_{(X^{1-s}Y^s)^*} \geqslant A. \tag{30}$$

Но A — любое число, удовлетворяющее неравенству $0 < A < 1$. Следовательно, неравенство (17) и, тем самым, лемма 18 доказаны.

Из неравенства (12) и леммы 18 следует, что для любого $F \in (X^{1-s}Y^s)^*$ справедливо равенство

$$\|F\|_{(X^{1-s}Y^s)^*} = \|F\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s}. \tag{31}$$

Теорема 1. *Пусть Q — экстремальный бикомпакт, X и Y — (b)-полные KN-пространства и фундаменты в $C_\infty(Q)$. Тогда справедлива формула*

$$(X^{1-s}Y^s)^* = (X^*)^{1-s}(Y^*)^s, \tag{32}$$

понимаемая в следующем смысле:

1) *если $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, то $f^{1-s}g^s \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$;*

2) *если $F \in (X^{1-s}Y^s)_+^*$, то найдутся такие*

$$f \in X_+^*,\ g \in Y_+^*, \text{ что } F = f^{1-s}g^s;$$

3) *для любого $F \in (X^{1-s}Y^s)^*$ справедливо равенство*

$$\|F\|_{(X^{1-s}Y^s)^*} = \|F\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s}.$$

Кроме того, инфимум в формуле (11) *всегда достигается, т. е. для любого* $F \in (X^{1-s}Y^s)^*$ *найдутся такие* $f \in X_+^*$, $g \in Y_+^*$, *что* $\|f\|_{X^*} \leqslant 1$, $\|g\|_{Y^*} \leqslant 1$

$$\text{и} \ |F| \leqslant \lambda f^{1-s} g^s, \quad \text{где} \ \lambda = \|F\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s}.$$

Доказательство. Доказываем только последнее утверждение, так как все остальные уже установлены. Пусть

$$F_0 \in (X^{1-s}Y^s)_+^*, \quad \|F_0\|_{(X^*)^{1-s}(Y^*)^s} = 1.$$

Построим по этому F_0 множество W (см. доказательство леммы 18). Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдем такие $(f_n, g_n) \in W$, что $\|f_n\|_{X^*} \leqslant 1 + 1/n$ и $\|g_n\|_{Y^*} \leqslant 1 + 1/n$. Так как ограниченные по норме множества в $X^* \times Y^*$ бикомпактны в топологии $\sigma(X^* \times Y^*, X \times Y)$, а W в указанной топологии замкнуто, то в этой топологии последовательность (f_n, g_n) имеет обобщенную предельную точку $(f, g) \in W$, которая и является искомой парой функционалов.

Замечание 4. Любопытно отметить, что в неравенстве (5) инфимум всех возможных λ может и не достигаться. Так будет, например, для $X = c_0$, $Y = l^1$, вложенных в пространство всех вещественных числовых последовательностей и любого $0 < s < 1$.

Замечание 5. Теорема 1 может быть использована для установления интерполяционных теорем в пространствах рассматриваемого типа, аналогичных классической теореме Рисса — Торина.

§ 6. О дуальных пространствах

Пусть Q — экстремальный бикомпакт, L — KB-пространство с аддитивной нормой, являющееся фундаментом в $C_\infty(Q)$, J — функционал на L, действующий по формуле

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{33}$$

Например, можно взять $C_\infty(Q) = S(T, \Sigma, \mu)$; $L = L^1(T, \Sigma, \mu)$. Тогда

$$J(x) = \int_T x \, d\mu \ \text{для} \ x \in L^1(T, \Sigma, \mu).$$

Пусть X — произвольный фундамент в $C_\infty(Q)$. Положим

$$X' = \{x' \in C_\infty(Q) : xx' \in L \ \text{для любого} \ x \in X\}.$$

X' называется *дуальным* к X *пространством*. Пространство X' можно отождествить с K-пространством $\overline{X}$ всех вполне линейных функционалов на X, если по каждому $x' \in X'$ построить функционал $f_{x'}$ на X по формуле

Баканова
$$f_{x'}(x) = J(xx'), \quad x \in X. \tag{34}$$

Если X есть KN-пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, то через $\|\cdot\|_{X'}$ мы будем обозначать дуальную норму на X', а именно

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{J(xx') : x \in X, \|x\|_X \leqslant 1\}. \tag{35}$$

Тем самым X' можно рассматривать как замкнутое подпространство в X^*.

Заметим, что если в X выполнено известное условие (A) (см. ([7]), стр. 207), то X^* и X' естественным образом отождествляются.

Нам далее понадобится

Лемма 19. *Для того чтобы выполнялось равенство*

$$X'' = X \tag{36}$$

как по запасу элементов, так и по норме, необходимо и достаточно, чтобы норма в X была универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Напомним, что универсальная полунепрерывность нормы означает следующее: если направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in X$, то $\|x_\alpha\|_X \to \|x\|_X$. Монотонная полнота нормы означает, что если направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow \infty$ в X, то $\|x_\alpha\|_X \to \infty$. (униө)

Доказательство леммы 19 следует из критерия рефлексивности по Накано (см. ([7]), 290) и результатов работы ([8]).

Пусть теперь X и Y — (b)-полные KN-пространства, являющиеся фундаментами в $C_\infty(Q)$. Мы будем сейчас рассматривать три пространства: $X^{1-s}Y^s$, $(X^{1-s}Y^s)'$ и $(X')^{1-s}(Y')^s$. На $X^{1-s}Y^s$ рассматриваем обычную кальдеронову норму $\|\cdot\|_{X^{1-s}Y^s}$; на пространстве $(X^{1-s}Y^s)'$, дуальном к $X^{1-s}Y^s$, рассматриваем норму $\|\cdot\|_{(X^{1-s}Y^s)'}$ дуальную к норме $\|\cdot\|_{X^{1-s}Y^s}$. Наконец, на $(X')^{1-s}(Y')^s$ рассматриваем кальдеронову норму, построенную по нормам пространств X' и Y', т. е. для $z' \in (X')^{1-s}(Y')^s$ полагаем

$$\|z'\|_{(X')^{1-s}(Y')^s} = \inf\{\lambda > 0:\ |z'| \leqslant \lambda |x'|^{1-s}|y'|^s \tag{37}$$

для некоторых $x' \in X'$, $y' \in Y'$ с $\|x'\|_{X'} \leqslant 1$, $\|y'\|_{Y'} \leqslant 1\}$.

Из лемм 13 и 14 и теоремы 1 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Имеем*

$$(X^{1-s}Y^s)' = (X')^{1-s}(Y')^s, \tag{38}$$

причем равенство имеет место как по запасу элементов, так и по норме. При этом инфимум в (37) всегда достигается, т. е. для любого $z' \in (X')^{1-s}(Y')^s$ найдутся такие $x' \in X'$, $y' \in Y'$, что $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'} = 1$ и

$$|z'| \leqslant \lambda |x'|^{1-s}|y'|^s,$$

где

$$\lambda = \|z'\|_{(X')^{1-s}(Y')^s}.$$

Следствие 1. *Если нормы в X и Y универсально-полунепрерывны и универсально-монотонно полны, то этим же свойством обладает и норма в $X^{1-s}Y^s$.*

Действительно, имеем

$$(X^{1-s}Y^s)'' = ((X^{1-s}Y^s)')' = ((X')^{1-s}(Y')^s)' = (X'')^{1-s}(Y'')^s = X^{1-s}Y^s.$$

Следствие 2. *Пусть нормы в X и Y универсально полунепрерывны и универсально-монотонно полны. Тогда для любого $z \in X^{1-s}Y^s$ найдутся такие $x \in X$, $y \in Y$ с $\|x\|_X = \|y\|_Y = 1$, что*

$$|z| \leqslant \|z\|_{X^{1-s}Y^s}|x|^{1-s}|y|^s. \tag{39}$$

§ 7. О (b)-рефлексивности

Символы Q, X, Y, L, J имеют тот же самый смысл, что и в § 6. Нам понадобится следующая лемма, несложное доказательство которой мы опускаем.

Лемма 20. *Пусть в X выполнено условие (A) (см. ([7]), стр. 207), т. е. если $x_n \downarrow 0$ в X, то $\|x_n\|_X \to 0$. Тогда в $X^{1-s}Y^s$ тоже выполнено условие (A) и, следовательно, пространство $(X^{1-s}Y^s)^*$ отождествляется с пространством $(X^{1-s}Y^s)'$.*

Теперь мы докажем теорему, являющуюся обобщением критерия (b)-рефлексивности Огасавары в части достаточности (см. ([7]), стр. 294).

Теорема 3. *Пусть одно из пространств X и Y, а также одно из пространств X^* и Y^* является KB-пространством. Тогда $Z = X^{1-s}Y^s$ есть (b)-рефлексивное KB-пространство.*

Доказательство. Используя лемму 20, получаем $Z^* = Z' = (X')^{1-s}(Y')^s$. Еще раз применив лемму 20, получим $Z^{**} = (Z')^* = (Z')' = (X'')^{1-s}(Y'')^s$. Пусть X — KB-пространство. Тогда $X'' = X$ и, следовательно, $(X'')^{1-s}(Y'')^s = X^{1-s}(Y'')^s$ удовлетворяет условию (A), поэтому можно еще раз применить лемму 20. Получим

$$Z^{***} = (Z^{**})' = (X^{1-s}(Y'')^s)' = (X')^{1-s}(Y''')^s \doteq (X')^{1-s}(Y')^s = Z^*.$$

Следовательно, пространство Z^* (b)-рефлексивно. Но тогда рефлексивно и Z. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда $Y = C(Q)$.

Теорема 4. *Пусть X — (b)-полное KN-пространство и фундамент в $C_\infty(Q)$, а $Y = C(Q)$. Для того чтобы пространство $X^{1-s}Y^s$ было (b)-рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы X было KB-пространством.*

Доказательство. Достаточность прямо следует из теоремы 3, ибо Y^* есть KB-пространство с аддитивной нормой (см. ([7]), стр. 283). Пусть пространство $X^{1-s}Y^s$ (b)-рефлексивно. Тогда оно является KB-пространством (см. ([7]), стр. 294). Отсюда легко следует, что и X—KB-пространство.

Замечание 6. Теорему 4 удобно использовать в следующей форме. Пусть (T, Σ, μ) — вполне σ-конечное измеримое пространство, X — (b)-полное KN-пространство и фундамент в $S = S(T, \Sigma, \mu)$. Для числа $p > 1$ полагаем

$$X_p = \{x \in S \colon |x|^p \in X\} \tag{40}$$

и для $x \in X_p$ определяем норму по формуле

$$\|x\|_{X_p} = \| |x|^p \|_X^{1/p}. \tag{41}$$

Пространство X_p с нормой $\|\cdot\|_{X_p}$ (b)-рефлексивно тогда и только тогда, когда X есть KB-пространство. Для примера рассмотрим пространства Лоренца $\Lambda(\alpha)$ (см. ([9])).

Из того, что $\Lambda(\alpha)$ есть KB-пространство, следует (b)-рефлексивность пространства $\Lambda(\alpha, p)$ при любом $p > 1$. Здесь через $\Lambda(\alpha, p)$ обозначено пространство, которое получается из $\Lambda(\alpha)$ указанным способом. Используя теорему 2 и тот факт, что сопряженное к $\Lambda(\alpha)$ есть $M(\alpha)$, нетрудно построить сопряженное пространство к $\Lambda(\alpha, p)$: так как $\Lambda(\alpha, p) = (\Lambda(\alpha))^s(L^\infty)^{1-s}$, где $s = 1/p$, то $(\Lambda(\alpha, p))^* = (\Lambda(\alpha, p))' = (\Lambda'(\alpha))^s((L^\infty)')^{1-s} = (M(\alpha))^s(L^1)^{1-s}$.

§ 8. О связи между банаховой структурой и ее дуальной структурой

Пусть Q, L, J имеют прежний смысл. Положим

$$L^2 = \{z \in C_\infty(Q): z^2 \in L\} \tag{42}$$

и для $z_1, z_2 \in L^2$ определим скалярное произведение формулой $(z_1, z_2) = J(z_1 \cdot z_2)$. Тогда L^2 превращается в гильбертово пространство с нормой $\|z\|_{L^2} = \{J(z^2)\}^{1/2}$, где $z \in L^2$.

Нам понадобится лемма, несложное доказательство которой мы опускаем.

Лемма 21. *Пусть X — (b)-полное KN-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов. Если сопряженное по Накано пространство $\bar{X}$ (b)-рефлексивно (норма на $\bar{X}$ индуцирована из X^*), то и само X (b)-рефлексивно.*

Теорема 5. *Пусть X — (b)-полное KN-пространство и фундамент в $C_\infty(Q)$. Тогда*

$$X^{1/2}(X')^{1/2} = L^2 \tag{43}$$

как по запасу элементов, так и по норме, т. е. для любого $z \in L^2$ справедливо равенство

$$\|z\|_{L^2} = \|z\|_{X^{1/2}(X')^{1/2}}. \tag{44}$$

Доказательство. Положим $Z = X^{1/2}(X')^{1/2}$. Тогда

$$Z' = (X')^{1/2}(X'')^{1/2}, \quad Z'' = (X'')^{1/2}(X''')^{1/2} = (X'')^{1/2}(X')^{1/2} = Z',$$

причем эти равенства имеют место и по запасу элементов, и по норме. Так как $Z' = Z''$, то $Z' = Z'' \subset L^2$. Так как $Z' \subset L^2$, то $Z'' \supset L^2$. Следовательно, $Z' = Z'' = L^2$ по запасу элементов. Но нормы $\|\cdot\|_{Z'}$ и $\|\cdot\|_{Z''}$, как уже установлено, совпадают. Отсюда нетрудно уже вывести, что каждая из них совпадает с нормой $\|\cdot\|_{L^2}$.

Итак, $Z' = L^2$ по запасу элементов и по норме. В силу леммы 21 Z — (b)-рефлексивное KB-пространство. Поэтому $Z = Z'' = (Z')' = (L^2)' = L^2$ по запасу элементов и по норме.

Следствие 3. *В условиях теоремы 5 при любом $0 < s < 1$ пространство $X^{1-s}(X')^s$ (b)-рефлексивно.*

Доказательство. Для $s = 1/2$ это уже доказано. Для $s \neq 1/2$ сказанное следует из равенств

$$X^{1-s}(X')^s = (X^{1/2}(X')^{1/2})^{2s}X^{1-2s} = (L^2)^{2s}X^{1-2s} \quad \text{при} \quad 0 < s < 1/2$$

и

$$X^{1-s}(X')^s = (X^{1/2}(X')^{1/2})^{2-2s}(X')^{2s-1} = (L^2)^{2-2s}(X')^{2s-1} \text{ при } 1/2 < s < 1$$

и теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть Q, L, J имеют прежний смысл, X — (b)-полное KN-пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, являющееся фундаментом в $C_\infty(Q)$, X' —*

его дуальное пространство с нормой $\|\cdot\|_{X'}$, определенной ранее (см. формулу (35)). *Тогда:*

1) *если* $z \in L$, $x \in X$, $x' \in X'$ *и* $z = xx'$,
то

$$\|z\|_L \leqslant \|x\|_X \|x'\|_{X'}; \tag{45}$$

2) *для любого* $z \in L$ *и числа* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $x \in X$, $x' \in X'$, *что*

$$z = xx', \tag{46}$$

$$\|z\|_L \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|_X \|x'\|_{X'}; \tag{47}$$

3) *если норма в* X *универсально-полунепрерывна и универсально-монотонно полна, то утверждение* 2) *допускает следующее усиление: для любого* $z \in L$ *найдутся такие* $x \in X$, $x' \in X'$, *что*

$$z = xx', \tag{48}$$

$$\|z\|_L = \|x\|_X \|x'\|_{X'}. \tag{49}$$

Доказательство. Справедливость утверждения 1) следует из самого определения дуальной нормы. Справедливость утверждения 2) легко выводится из теоремы 5. Наконец, для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно воспользоваться теоремой 5 и следствием 2 теоремы 2.

Пример. Возьмем $C_\infty(Q) = S[0, 1]$, $L = L^1[0, 1]$, $X = L^p[0, 1]$ для какого-нибудь $p > 1$. Тогда $X' = L^q[0, 1]$, где $1/p + 1/q = 1$. Возьмем произвольный $z \in L = L^1[0, 1]$; для простоты считая, что $z \geqslant 0$ почти всюду. Тогда, взяв $x = z^{1/p}$, $x' = z^{1/q}$, имеем $z = xx'$ и $\|z\|_L = \|x\|_X \|x'\|_{X'}$ в соответствии с утверждением 3 теоремы 6.

Замечание 7. В формулировке утверждения 3) теоремы 6 требование универсальной полунепрерывности и универсальной монотонной полноты нормы на X нельзя, вообще говоря, опустить. Приведем соответствующий пример. Полагаем: $C_\infty(Q)$ — обычное пространство всех вещественных числовых последовательностей, $L = l^1$, $X = c_0$. Тогда, очевидно, $X' = l^1$.

Возьмем произвольный элемент пространства $L = l^1$, у которого бесконечное множество координат отлично от нуля.

Легко видеть, что его нельзя разложить в такое произведение, о котором говорится в утверждении 3) теоремы 6. Причина этого заключается в том, что норма в пространстве c_0 не является универсально-монотонно полной, хотя она и обладает свойством универсальной полунепрерывности.

V
V
V
Vc_0

§ 9. О пространствах с единицей

Всюду в этом параграфе мы будем придерживаться следующих обозначений: (T, Σ, μ) — измеримое пространство с вполне конечной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$, $L^1 = L^1(T, \Sigma, \mu)$, $L^\infty = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$; через $\mathbf{1}$ будет обозначаться функция, которая тождественно равна единице на T. Ясно, что $\mathbf{1} \in L^1$, ибо мера μ вполне конечна.

Пусть теперь X — (b)-полное KN-пространство, являющееся фундаментом в S. Разумеется, что, вообще говоря, X не содержится в L^1 и не содержит пространство L^∞. Однако, справедлива

Теорема 7. *Существует такой элемент $z \in S$, что*

$$L^\infty \subset X[z] \subset L^1, \tag{50}$$

где

$$X[z] = \{xz : x \in X\}. \tag{51}$$

Доказательство. Так как $1 \in L^1$, то в силу теоремы 6 найдутся такие $x_0 \in X$ и $z_0 \in X'$, где X' — дуальное к X пространство, что $x_0 z_0 = 1$. Ясно, что это z_0 и является искомым элементом z. Теорема доказана.

Замечание 8. Введем на $X[z]$ норму, положив для любого $x \in X[z]$

$$\|x\|_{X[z]} = \|x/z\|_X. \tag{52}$$

Тогда $X[z]$ становится (b)-полным KN-пространством, являющимся фундаментом в S, которое алгебраически и структурно изоморфно и изометрично пространству X. Таким образом, любое (b)-полное KN-пространство X, являющееся фундаментом в S, путем умножения на некоторую «весовую» функцию, можно превратить в такое же пространство, но «зажатое» между L^∞ и L^1. V V,

Замечание 9. В монографии ([6], стр. 525) показано, что всякое KB-пространство с единицей изоморфно и изометрично некоторому K-пространству суммируемых функций, заданных на некотором бикомпакте. Из нашей теоремы следует, в частности, что при этом можно требовать, чтобы это K-пространство содержало все ограниченные суммируемые функции.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Б. З. Вулиху, прочитавшему рукопись данной статьи и сделавшему ряд ценных указаний.

Поступило
28.IX.1967

ЛИТЕРАТУРА

[1] Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., 24, № 2 (1964), 113—190.

[2] Лозановский Г. Я., О топологически рефлексивных KB-пространствах, Доклады Ак. наук СССР, 158, № 4 (1964), 516—519.

[3] Лозановский Г. Я., О рефлексивных пространствах, обобщающих рефлексивные пространства Орлича, Доклады Ак. наук СССР, 163, № 3 (1965), 573—576.

[4] Лозановский Г. Я., О банаховых структурах Кальдерона, Доклады Ак. наук СССР, 172, № 6 (1967), 1018—1020.

[5] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Гиперппкалы банаховых структур, Доклады Ак. наук СССР, 170, № 2 (1966), 265—267.

[6] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М., 1950.

[7] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

[8] Mori T., Amemiya I., Nakano H., On the reflexivity of semi-continuous norms, Proc. Jap. Acad., 31 (1955), 684—685. I V

[9] Lorentz G. G., Some new functional spaces, Ann. of Math., 51 (1950), 37—55.

XI

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1971

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII, № 3 Май — Июнь 1971 г.

УДК 513.737

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ. II

Наша статья продолжает работу ([1]), в которой исследовалась следующая конструкция, введенная Кальдероном ([2]). Пусть X_1, X_2 — банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в расширенном K-пространстве W. Для произвольного $s \in (0, 1)$ через $X_1^{1-s}X_2^s$ обозначается множество всех таких $z \in W$, что

$$|z| \leqslant \lambda |x_1|^{1-s}|x_2|^s \tag{1}$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$. Через $\|z\|_{X_1^{1-s}X_2^s}$ обозначается инфимум всех возможных λ в (1). Тогда $X_1^{1-s}X_2^s$ с указанной нормой — банахово KN-пространство и фундамент в W. Если в W имеется фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой, то для любого фундамента Z в W можно рассматривать дуальное пространство $Z' \subset W$, которое в определенном смысле совпадает с пространством $\bar{Z}$, сопряженным к Z в смысле Накано. Если Z — еще и банахово KN-пространство, то Z' с естественной нормой тоже оказывается банаховым KN-пространством.

В ([1]) установлено, что $(X_1^{1-s}X_2^s)' = (X_1')^{1-s}(X_2')^s$ как по набору элементов, так и по норме. Аналогичный результат был получен и для банаховых сопряженных пространств (см. также ([3])). Для широкого класса $\mathfrak{A}_2$ вогнутых функций $\varphi(u, v)$ по заданным X_1, X_2 можно естественным образом построить пространство $\varphi(X_1, X_2)$, при этом, в частности, если $\varphi(u, v) = u^{1-s}v^s$, то $\varphi(X_1, X_2) = X_1^{1-s}X_2^s$. Цель заметки — найти все такие пары $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_2$, что

$$(\varphi(X_1, X_2))' = \psi(X_1', X_2') \tag{2}$$

для любых пространств X_1, X_2 рассматриваемого типа. Равенство (2) мы понимаем не только по набору элементов, но и по норме. Покажем, что каждая такая пара есть $\varphi(u, v) = Au^{1-s}v^s$, $\psi(u, v) = A^{-1}u^{1-s}v^s$, где $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$.

Таким образом, (2) полностью характеризует конструкцию Кальдерона. Рассмотрим конструкцию, основанную на использовании свойств вогнутых функций одного переменного.

Терминология и обозначения из теории полуупорядоченных пространств — в основном принятые в ([1, 4]). W — произвольное расширенное K-пространство, в котором зафиксирована единица $\mathbb{1}$; Z, X_1, X_2 — произвольные банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в W.

Предполагаем, что в W имеется фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой. Для $x \in L$ полагаем $I(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L$. Тогда I — существенно положительный вполне линейный функционал на L. Дуальное пространство к Z есть

$$Z' = \{z' \in W : zz' \in L \text{ для любого } z \in Z\}, \tag{3}$$

и для $z' \in Z'$ полагаем

$$\|z'\|_{Z'} = \sup\,\{I(zz') : z \in Z, \quad \|z\|_Z \leqslant 1\}. \tag{4}$$

Z' естественным образом отождествляется с сопряженным по Накано пространством $\overline{Z}$, причем дуальная норма $\|\cdot\|_{Z'}$ тогда совпадает с нормой на $\overline{Z}$, индуцированной из банахова сопряженного пространства Z^*. Для произвольного K-пространства V полагаем $V_+ = \{x \in V : x \geqslant 0\}$.

R^n $(n = 1, 2, \ldots)$ — n-мерное арифметическое пространство с естественным упорядочением. При этом в тех случаях, когда $W = R^n$, для $x = (x^1, \ldots, x^n)$ примем $\|x\|_L = |x^1| + \ldots + |x^n|$, т. е. $I(x) = x^1 + \ldots + x^n$.

Определение 1. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначим множество всех вещественных функций φ, заданных и непрерывных по совокупности аргументов на R^2_+ и таких, что:

а) φ вогнута, т. е.

$$\varphi[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2, \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2] \geqslant \alpha\varphi(u_1, v_1) + (1-\alpha)\varphi(u_2, v_2)$$

при всех $u_1, u_2, v_1, v_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$;

б) $\varphi(u, 0) = \varphi(0, v) = 0$ при всех $u, v \geqslant 0$;

в) $\lim\limits_{p\to+\infty} \varphi(u, p) = \lim\limits_{q\to+\infty} \varphi(q, v) = +\infty$ при всех $u, v > 0$.

Из определения следует, что:

г) для любого $u > 0$ функция $\varphi(u, \cdot)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$;

д) для любого $v > 0$ функция $\varphi(\cdot, v)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$;

е) $\varphi(u, v) > 0$ при всех $u, v > 0$.

Определение 2. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2$. Через $\varphi(X_1, X_2)$ обозначим множество всех таких $z \in W$, что

$$|z| \leqslant \lambda\varphi(|x_1|, |x_2|) \tag{5}$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$. Через $\|z\|_{\varphi(X_1, X_2)}$ обозначим инфимум всех возможных λ в (5).

$\varphi(X_1, X_2)$ с нормой $\|\cdot\|_{\varphi(X_1, X_2)}$ — банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Определение 3. Пусть $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_2$. Пара (φ, ψ) *согласована*, если

$$(\varphi(X_1, X_2))' = \psi(X_1', X_2') \tag{6}$$

для любых W, L, X_1, X_2, указанных выше. При этом равенство (6) понимается не только по набору элементов, но и по норме.

Теорема 1. 1) *Пусть*

$$\varphi(u, v) = Au^{1-s}v^s, \qquad \psi(u, v) = A^{-1}u^{1-s}v^s \tag{7}$$

для $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$. *Пара* (φ, ψ) *согласована.*

2) *Обратно. Для любой согласованной пары* (φ, ψ) *найдутся* $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$ *такие, что имеем* (7).

Первое утверждение теоремы установлено ранее (см. [1], теорема 2). Второе утверждение мы докажем ниже.

Лемма 1. *Пусть вещественная функция* g *на* $(0, +\infty)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) g *абсолютно непрерывна в любом конечном промежутке;*

2) $g(t) > 0$ *при всех* $t \in (0, +\infty)$, $g(1) = 1$;

3) *для любых* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$ *имеем*

$$\frac{\beta g(\alpha x)}{g(\beta x)} + \frac{(1-\beta) g[(1-\alpha) y]}{g[(1-\beta) y]} \leqslant 1. \tag{8}$$

Тогда существует $p \in [0, 1]$ *такое, что* $g(t) = t^p$ *при всех* $t \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть T — множество всех $t \in (0, +\infty)$, в которых существует обыкновенная конечная производная $g'(t)$. Зафиксируем $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$. Пусть

$$f(t) = \frac{g(2tt_1)}{2g(t_1)} + \frac{g[2(1-t)t_2]}{2g(t_2)} \quad (0 < t < 1). \tag{9}$$

Взяв в (8) $\alpha = t$, $\beta = 1/2$, $x = 2t_1$, $y = 2t_2$, видим, что $f(t) \leqslant 1$ при всех $t \in (0, 1)$. С другой стороны, $f(1/2) = 1$. Следовательно, $f'(1/2) = 0$, т. е.

$$\frac{t_1 g'(t_1)}{g(t_1)} - \frac{t_2 g'(t_2)}{g(t_2)} = 0,$$

т. е. $\dfrac{tg'(t)}{g(t)}$ постоянна на T.

Пусть $\dfrac{tg'(t)}{g(t)} = p$ при всех $t \in T$. В силу абсолютной непрерывности функции g следует, что $g(t) = Ct^p$, где $C = \mathrm{const}$.

Из условий леммы имеем $0 \leqslant p \leqslant 1$ и $C = 1$. Лемма доказана.

Замечание. Функция $g(t) = t^p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Пусть (φ, ψ) — согласованная пара.

Лемма 2. *Для любых* λ *и* μ *таких, что* $0 < \lambda < +\infty$, $0 < \mu < +\infty$, *имеем*

$$\varphi(\lambda, \mu)\psi(1/\lambda, 1/\mu) = 1. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $W = R^1$. Для $x \in R^1$ положим $\|x\|_{X_1} = |x|/\lambda$, $\|x\|_{X_2} = |x|/\mu$. Тогда

$$\|x\|_{\varphi(X_1, X_2)} = \frac{1}{\varphi(\lambda, \mu)}|x|, \; \|x\|_{(\varphi(X_1, X_2))'} = \varphi(\lambda, \mu)|x|.$$

С другой стороны,

$$\|x\|_{X_1'} = \lambda |x|, \; \|x\|_{X_2'} = \mu |x|, \; \|x\|_{\psi(X_1', X_2')} = \frac{1}{\psi(1/\lambda, 1/\mu)}|x|.$$

Так как $\|\cdot\|_{(\varphi(X_1, X_2))'} = \|\cdot\|_{\psi(X_1', X_2')}$, то $\varphi(\lambda, \mu) = 1/\psi(1/\lambda, 1/\mu)$.

Лемма доказана.

Определение 4. Для $0 < \lambda < +\infty$, $0 < \mu < +\infty$ $p_{\lambda,\mu}$, $q_{\lambda,\mu}$ — нормы на R^2:

$$p_{\lambda,\mu}(x) = \max\{|x^1|/\lambda, |x^2|/\mu\}, \tag{11}$$

$$q_{\lambda,\mu}(x) = \lambda|x^1| + \mu|x^2|, \tag{12}$$

где $x = (x^1, x^2) \in R^2$.

Следующие две леммы тривиальны.

Лемма 3. *Для* $0 < \lambda < +\infty$, $0 < \mu < +\infty$ *имеем* $(R^2, p_{\lambda,\mu})' = (R^2, q_{\lambda,\mu})$, $(R^2, q_{\lambda,\mu})' = (R^2, p_{\lambda,\mu})$.

Лемма 4. *Пусть* $W = R^2$, $0 < \lambda, \mu, \alpha, \beta < +\infty$, $\|\cdot\|_{X_1} = p_{\lambda,\mu}$, $\|\cdot\|_{X_2} = p_{\alpha,\beta}$. *Тогда*

$$\|\cdot\|_{\varphi(X_1,X_2)} = p_{\varphi(\lambda,\alpha),\varphi(\mu,\beta)}. \tag{13}$$

Лемма 5. *Функции* φ *и* ψ *положительно однородны, т. е.* $\varphi(au, av) = a\varphi(u, v)$ *при всех* $0 \leqslant a, u, v < +\infty$ *и аналогично для* ψ.

Доказательство. Фиксируем u и v, $0 < u, v < +\infty$. Положим $\lambda = 1/2u$, $\mu = 1/2v$. Пусть $W = R^2$, $\|\cdot\|_{X_1} = q_{\lambda,\lambda}$, $\|\cdot\|_{X_2} = q_{\mu,\mu}$. Тогда $\|\cdot\|_{X_1'} = p_{\lambda,\lambda}$, $\|\cdot\|_{X_2'} = p_{\mu,\mu}$. Следовательно, $\|\cdot\|_{\psi(X_1',X_2')} = p_{\psi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)}$. Отсюда $\|\cdot\|_{\varphi(X_1,X_2)} = \|\cdot\|_{(\psi(X_1',X_2'))'} = q_{\psi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)}$. Таким образом,

$$\|\cdot\|_{\varphi(X_1,X_2)} = q_{\psi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)}. \tag{14}$$

Пусть $x = (1, 1) \in R^2$. В силу равенства (14)

$$\|x\|_{\varphi(X_1,X_2)} = q_{\psi(\lambda,\mu),\psi(\lambda,\mu)}(x) = 2\psi(\lambda,\mu) = 2/\varphi(1/\lambda, 1/\mu) =$$
$$= 2/\varphi(2u, 2v). \tag{15}$$

С другой стороны, по определению $\|x\|_{\varphi(X_1,X_2)} = \inf\{R \geqslant 0: 1 \leqslant R\varphi(b_1, c_1)$, $1 \leqslant R\varphi(b_2, c_2)$, где

$$0 \leqslant b_1, c_1, b_2, c_2 < +\infty, \quad \lambda(b_1 + b_2) \leqslant 1, \quad \mu(c_1 + c_2) \leqslant 1\}. \tag{16}$$

Из соображений компактности ясно, что инфимум в (16) достигается. Пусть он равен R_0 и реализуется на числах $b_1^0, c_1^0, b_2^0, c_2^0$. Заметим, что $b_1^0, c_1^0, b_2^0, c_2^0 > 0$ в силу условия б) определения класса $\mathfrak{A}_2$. Покажем, что

$$1 = R_0\varphi(b_1^0, c_1^0), \quad 1 = R_0\varphi(b_2^0, c_2^0). \tag{17}$$

Допустим, например, что $1 < R_0\varphi(b_1^0, c_1^0)$. Возьмем $\delta > 0$ настолько малое, что $b_1' = b_1^0 - \delta > 0$, $1 < R_0\varphi(b_1', c_1^0)$. Положим $b_2' = b_2^0 + \delta$. Тогда $1 < R_0\varphi(b_2', c_2^0)$. Итак,

$$\lambda(b_1' + b_2') = \lambda(b_1^0 + b_2^0) \leqslant 1, \quad \mu(c_1^0 + c_2^0) \leqslant 1,$$
$$1 < R_0\varphi(b_1', c_1^0), \quad 1 < R_0\varphi(b_2', c_2^0).$$

Это дает $\|x\|_{\varphi(X_1,X_2)} < R_0$, что невозможно, ибо $R_0 = \|x\|_{\varphi(X_1,X_2)}$. Итак, имеем (17). Кроме того,

$$\lambda(b_1^0 + b_2^0) = 1, \quad \mu(c_1^0 + c_2^0) = 1. \tag{18}$$

В силу вогнутости функции φ

$$1 = R_0[\varphi(b_1^0, c_1^0)/2 + \varphi(b_2^0, c_2^0)/2] \leqslant R_0\varphi(b^*, c^*), \tag{19}$$

где $b^* = (b_1^0 + b_2^0)/2$, $c^* = (c_1^0 + c_2^0)/2$. Так как $\lambda(b^* + b^*) = 2\lambda b^* = 1$, $\mu(c^* + c^*) = 2\mu c^* = 1$, то в (19) не может быть строгого неравенства, ибо иначе $\|x\|_{\varphi(X_1, X_2)} < R_0$. Следовательно, $1 = R_0\varphi(b^*, c^*) = R_0\varphi(1/2\lambda, 1/2\mu) = R_0\varphi(u, v)$.

Отсюда

$$R_0 = \|x\|_{\varphi(X_1, X_2)} = 1/\varphi(u, v). \tag{20}$$

Сравнив (15) и (20), получаем

$$\varphi(2u, 2v) = 2\varphi(u, v). \tag{21}$$

Отсюда в силу вогнутости φ следует положительная однородность φ. Наконец, из леммы 2 получаем положительную однородность функции ψ. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $0 < u_1, u_2, v_1, v_2, a_1, a_2, b_1, b_2 < +\infty$ *и* $u_1a_1 + u_2a_2 = v_1b_1 + v_2b_2 = 1$. *Тогда*

$$\varphi(u_1, v_1)\psi(a_1, b_1) + \varphi(u_2, v_2)\psi(a_2, b_2) \leqslant 1. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $W = R^2$, $\|\cdot\|_{X_1} = q_{a_1, a_2}$, $\|\cdot\|_{X_2} = q_{b_1, b_2}$. Тогда $\|\cdot\|_{X_1'} = p_{a_1, a_2}$, $\|\cdot\|_{X_2'} = p_{b_1, b_2}$. Следовательно,

$$\|(u_1, u_2)\|_{X_1} = \|(v_1, v_2)\|_{X_2} = \|(a_1, a_2)\|_{X_1'} = \|(b_1, b_2)\|_{X_2'} = 1.$$

Поэтому $\|(\varphi(u_1, v_1), \varphi(u_2, v_2))\|_{\varphi(X_1, X_2)} \leqslant 1$, $\|(\psi(a_1, b_1), \psi(a_2, b_2))\|_{\psi(X_1', X_2')} \leqslant 1$. Следовательно, по определению согласованной пары имеем (22).

Доказательство теоремы 1. Пусть $A = \varphi(1, 1)$ и $g(t) = A^{-1}\varphi(t, 1)$, $t \in (0, +\infty)$. Функция g удовлетворяет условиям леммы 1. Действительно, условия 1), 2) тривиальны. Фиксируя $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$, воспользуемся леммами 2, 5 и 6 при $u_1 = \alpha x$, $v_1 = 1$, $a_1 = 1/x$, $b_1 = \beta$, $u_2 = (1-\alpha)y$, $v_2 = 1$, $a_2 = 1/y$, $b_2 = 1 - \beta$:

$$\frac{\beta g(\alpha x)}{g(\beta x)} + \frac{(1-\beta)g[(1-\alpha)y]}{g[(1-\beta)y]} = \frac{\beta\varphi(\alpha x, 1)}{\varphi(\beta x, 1)} + \frac{(1-\beta)\varphi[(1-\alpha)y, 1]}{\varphi[(1-\beta)y, 1]} =$$
$$= \frac{\varphi(\alpha x, 1)}{\varphi(x, 1/\beta)} + \frac{\varphi[(1-\alpha)y, 1]}{\varphi(y, 1/(1-\beta))} = \varphi(\alpha x, 1)\psi(1/x, \beta) + \varphi[(1-\alpha)y, 1] \times$$
$$\times \psi(1/y, 1-\beta) = \varphi(u_1, v_1)\psi(a_1, b_1) + \varphi(u_2, v_2)\psi(a_2, b_2) \leqslant 1.$$

Итак, g удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому найдется $p \in [0, 1]$ такое, что $g(t) = t^p$ $(t \in (0, +\infty))$. Отсюда $\varphi(u, v) = v\varphi(u/v, 1) = vAg(u/v) = Au^pv^{1-p}$. Положим $1 - p = s$. Из определения 1 следует, что $0 < s < 1$. Наконец, из леммы 2 получаем, что $\psi(u, v) = A^{-1}u^{1-s}v^s$. Теорема доказана.

Определение 5. Через $\mathfrak{A}_1$ обозначим множество вещественных функций φ, заданных и непрерывных на R_+^1 и таких, что: а) φ вогнута; б) $\varphi(0) = 0$; в) $\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u) = +\infty$.

Определение 6. $\varphi(X)$ ($\varphi \in \mathfrak{A}_1$, X — банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W) $\varphi(X)$ — множество всех таких $z \in W$, что

$$|z| \leqslant \lambda\varphi(|x|) \tag{23}$$

для некоторого $\lambda > 0$ и какого-нибудь $x \in X$ с $\|x\|_X \leqslant 1$; $\|z\|_{\varphi(X)}$ — инфимум всех возможных λ в (23).

$\varphi(X)$ с нормой $\|\cdot\|_{\varphi(X)}$ — банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Определение 7. Пара (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_1)$ *согласована*, если

$$(\varphi(X))' = \psi(X') \tag{24}$$

для любых W, L, X, причем (24) понимается не только по набору элементов, но и по норме.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_1$ *и пара* (φ, ψ) *согласована. Тогда найдется такое* $A \in (0, \infty)$, *что* $\varphi(u) = Au$, $\psi(u) = A^{-1}u$ *при всех* $u \in [0, +\infty)$.

Теорема доказывается аналогично теореме 1. Обратное утверждение тривиально.

Замечание. При определении согласованной пары (определения 3, 7) мы требовали не только совпадения соответствующих пространств по набору элементов, но и равенства их норм. Если отказаться от последнего требования, то нахождение всех согласованных пар становится сложнее.

Поступила в редакцию
28 ноября 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах, Сиб. матем. ж., X, № 3 (1969), 584—599.

[2] Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., 24, № 2 (1964), 113—190.

[3] Лозановский Г. Я., О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях, Докл. АН СССР, 188, № 3 (1969), 522—524.

[4] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1972

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIII, № 6 Ноябрь — Декабрь 1972

УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ III

Настоящая заметка является продолжением работ ([1]) и ([2]), в которых исследовалась следующая конструкция, введенная Кальдероном ([3]). Пусть X_0, X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся нормальными подпространствами в расширенном K-пространстве W. Для произвольного $0 < s < 1$ через $X_s = X_0^{1-s}X_1^s$ обозначается множество всех таких $x \in W$, что $|x| \leqslant \lambda |x_0|^{1-s}|x_1|^s$ для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$. Через $\|x\|_{X_s}$ обозначается инфимум всех возможных λ, при которых выполняется последнее неравенство. Тогда $(X_s, \|\cdot\|_{X_s})$ есть банахово KN-пространство, являющееся нормальным подпространством в W. В ([1]) было дано построение пространства $(X_s)^*$ сопряженного к X_s. В настоящей заметке указанное построение существенно уточняется с помощью аппарата канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанного в ([4]) и ([5]). Основной результат работы (теорема 1) заключается в следующем: пространства $(X_0)^*$, $(X_1)^*$, $(X_s)^*$ можно вложить как нормальные подпространства в подходящее расширенное K-пространство таким образом, что справедливо равенство $(X_s)^* = ((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s$; тем самым пространство $(X_s)^*$ получается из пространств $(X_0)^*$ и $(X_1)^*$ в точности так же, как пространство X_s получается из пространств X_0 и X_1. Найдены необходимые и достаточные условия того, что в X_s выполнено условие (A) из определения KB-пространства (теорема 2). Исследуется также важный частный случай кальдероновой конструкции — *степенное преобразование нормы* (теоремы 3 и 4). Именно, пусть X — банахово KN-пространство, число $p > 1$ и пусть пространство X_p получено из X так же, как обычное пространство L_p получается из L. Тогда (теорема 3) справедливо равенство $(X_p)^{**} = (\overline{X}^*)_p$, где $\overline{X}^*$ есть сопряженное по Накано к банахову сопряженному X^*. В работе ([1]) были даны некоторые приложения кальдероновой конструкции к общей теории банаховых структур (([1]), теоремы 6 и 7). В настоящей заметке дано еще одно подобное приложение (теорема 5), а также даны приложения к теории банаховых пространств с безусловным базисом (теоремы 6 и 7). Большинство результатов настоящей заметки было опубликовано ранее без доказательств (см. ([4]) и ([6])). Отметим также, что упомянутая конструкция Кальдерона с другой точки зрения изучалась в работе ([7]).

1. Терминология и обозначения

Через N обозначается множество всех натуральных чисел. *Сопряженное* к банахову пространству B обозначается через B^*. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы в основном следуем монографии ([8]). Пусть X — K-пространство. Через $\mathfrak{M}(X)$ обозначается *максимальное расширение* X, причем мы всегда считаем, что $X \subset \mathfrak{M}(X)$ естественным образом. Если в X фиксирована *единица*, то она обозначается через $1(X)$. Если $u \in X$, то $\langle\!\langle u \rangle\!\rangle$ есть *проектор* (см. ([8]), стр. 102) на *главную компоненту, порожденную элементом* u; X_u есть множество всех $x \in X$, таких что $|x| \leqslant \lambda |u|$ для некоторого числа $\lambda > 0$, т. е. X_u есть нормальное подпространство в X, порожденное u. При этом X_u есть *KN-пространство ограниченных элементов*, если положить

$$\|x\|_{X_u} = \inf \{\lambda > 0: |x| \leqslant \lambda |u|\}, \quad x \in X_u.$$

Осколком элемента $u \in X_+$ называется любой элемент $v \in X_+$, для которого $v \wedge (u - v) = 0$. Если на K-пространстве X задана *монотонная норма* (из $|x| \leqslant |y|$, $x, y \in X$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$), то X называется *KN-пространством*. *KB-пространством* называется KN-пространство X, в котором выполнены следующие два условия:

(A) *если* $x_n \downarrow 0$ $(n \in N)$ *в* X, *то* $\|x_n\| \to 0$;

(B) *если* $0 \leqslant x_n \uparrow$ $(n \in N)$ *в* X *и* $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$,

то существует $\sup x_n \in X$.

Пусть X K-пространство. Через $\tilde{X}$ $(\bar{X})$ обозначается K-пространство всех *регулярных (вполне линейных)* функционалов на X. При этом $\bar{X}$ называется также *сопряженным по Накано* пространством к X. Функционал $f \in \tilde{X}$ называется *антинормальным*, если он дизъюнктен всем вполне линейным функционалам на X. Через $\tilde{X}_{\mathrm{ant}}$ обозначается пространство всех антинормальных функционалов на X. Если X KN-пространство, то полагаем $X^*_{\mathrm{ant}} = \tilde{X}_{\mathrm{ant}} \cap X^*$. Напомним, что, если X есть банахово KN-пространство, то $X^* = \tilde{X}$ и потому $X^*_{\mathrm{ant}} = \tilde{X}_{\mathrm{ant}}$.

2. Реализация пространств, сопряженных к пространствам Кальдерона

Всюду в этом параграфе W есть расширенное K-пространство, в котором фиксирована единица $1(W)$, $M = W_{1(W)}$ есть соответствующее пространство ограниченных элементов.

Напомним, что для любых $x, y \in W$ определено *произведение* $xy \in W$ и, если $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle \leqslant \langle\!\langle y \rangle\!\rangle$, то и *частное* $x / y \in W$.

Пусть X и Y суть произвольные нормальные подпространства в W. Для $u \in X_+$, $f \in \tilde{X}$ через $f_{(u)}$ обозначаем функционал на M, действующий по формуле

$$f_{(u)}(x) = f(xu), \quad x \in M.$$

Напомним (([5]), стр. 348), что функционалы $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$ называются *дизъюнктными* (обозначение: fDg), если $f_{(u)}$ и $g_{(v)}$ дизъюнктны, как элементы K-пространства $\tilde{M}$ для любых $u \in X_+$, $v \in Y_+$. При этом, если $X = Y$, то так определенная дизъюнктность совпадает с обычной дизъюнктностью. Важную роль в дальнейших построениях играет следующая теорема о реализации пространств регулярных функционалов.

Теорема А (см. ([5]), теорема 3,1). *Пусть в* $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ *и* $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ *фиксированы единицы* $1_1 = 1(\mathfrak{M}(\tilde{X}))$ *и* $1_2 = 1(\mathfrak{M}(\tilde{M}))$. *Тогда существует единственная пара* (R_X, V_X), *где* V_X *— компонента в* $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, *а* R_X *— изоморфизм* K*-пространства* $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ *на* V_X, *удовлетворяющая условиям:*

1) *для любых* $f \in \tilde{X}$ *и* $g \in \tilde{M}$ *соотношения* $f \mathrm{D} g$ *и* $R_X f \mathrm{d} g$ *равносильны;*

2) $R_X(1_1) = Pr_{V_X} 1_2$.

Этот оператор R_X называется *канонической реализацией* пространства $\tilde{X}$. Заметим, что V_X (в отличие от R_X) не зависит от выбора единиц 1_1 и 1_2.

До конца этого раздела пусть X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся нормальными подпространствами в W. Фиксируем также число s, такое что $0 < s < 1$. Через $X_s = X_0^{1-s} X_1^s$ обозначаем множество всех таких $x \in W$, что $|x| \leqslant \lambda |x_0|^{1-s} |x_1|^s$ для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$. Через $\|x\|_{X_s}$ будем обозначать инфимум всех возможных λ, при которых выполняется последнее неравенство. Напомним ([1]), что X_s с нормой $\|\cdot\|_{X_s}$ есть банахово KN-пространство, являющееся нормальным подпространством в W.

Замечание. Пусть V есть компонента в W, порожденная множеством $X_0 \cap X_1$. Пусть также $Y_i = X_i \cap V$, причем норма в Y_i индуцирована из X_i $(i = 0, 1)$. Тогда очевидно $X_s = Y_0^{1-s} Y_1^s$, и каждое из пространств Y_0, Y_1, X_s есть не просто нормальное подпространство, но фундамент в V.

Напомним (([1]), стр. 589), что, исходя из любых двух функционалов $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, можно построить некоторый функционал $h \in (X_s)_+^*$ следующим образом. Пусть $z \in X_s$. Покажем как определяется число $h(z)$. Найдем $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$ и число $\lambda > 0$, такие что $|z| \leqslant \lambda u^{1-s} v^s$. Рассмотрим $(X_0)_u$ и $(X_1)_v$. Представим W в виде $C_\infty(Q)$ на подходящем экстремально несвязном бикомпакте Q, так чтобы $1(W)$ соответствовала функция, тождественно равная единице на Q. Тогда (см. ([1]), лемма 9) существуют неотрицательная регулярная борелевская мера μ на Q и функции $p, q \in L^1(\mu)$, такие что

$$f(x) = \int_Q (x/u)\, p\, d\mu, \qquad g(y) = \int_Q (y/v)\, q\, d\mu$$

для любых $x \in (X_0)_u$, $y \in (X_1)_v$, соответственно. Здесь (x/u), (y/v) суть частные в смысле деления элементов расширенного K-пространства. Теперь полагаем

$$h(z) = \int_Q (z/u^{1-s} v^s)\, p^{1-s} q^s\, d\mu.$$

Так построенный функционал h на X_s обозначаем через $f^{1-s} g^s$. Напомним, что, если $X_0 = X_1$, то $f^{1-s} g^s$ есть значение функции $|t_1|^{1-s} |t_2|^s$ на элементах f и g K-пространства $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_1$. Если же $X_0 \neq X_1$, то $f^{1-s} g^s$ есть только обозначение. Из сказанного и леммы 2 из ([1]) непосредственно следует

Лемма 1. *Пусть* $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $h \in (X_s)_+^*$. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

(1) $h = f^{1-s}g^s$;

(2) $h_{(u^{1-s}v^s)} = (f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$ *для любых* $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$. Здесь $(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$ есть значение функции $|t_1|^{1-s}|t_2|^s$ на элементах $f_{(u)}$, $g_{(v)}$ K-пространства $\bar{M}$.

Лемма 2.

(1) *Если* $f_1, f_2 \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, *причем* $f_1 \wedge f_2 = 0$, *то* $f_1^{1-s}g^s \wedge f_2^{1-s}g^s = 0$ *и* $(f_1+f_2)^{1-s}g^s = f_1^{1-s}g^s + f_2^{1-s}g^s$.

(2) *Если* $f \in (X_0)_+^*$, g_1, $g_2 \in (X_1)_+^*$, *причем* $g_1 \wedge g_2 = 0$, *то* $f^{1-s}g_1^s \wedge f^{1-s}g_2^s = 0$ *и* $f^{1-s}(g_1+g_2)^s = f^{1-s}g_1^s + f^{1-s}g_2^s$.

(3) *Если* $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$ *и числа* $a, b \geqslant 0$, *то* $(af)^{1-s}(bg)^s = a^{1-s}b^s f^{1-s}g^s$.

(4) *Если* $0 \leqslant f_\alpha \uparrow f \in (X_0)^*$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, $0 \leqslant g_\beta \uparrow g \in (X_1)^*$ $(\beta \in \mathrm{B})$, *то* $f_\alpha^{1-s}g_\beta^s \uparrow f^{1-s}g^s$ $((\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B})$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение, ибо остальные три доказываются аналогично. Положим $h = (f_1+f_2)^{1-s}g^s$, $h_1 = f_1^{1-s}g^s$, $h_2 = f_2^{1-s}g^s$. Возьмем произвольные $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$. Из ((5), лемма 9) следует, что $(f_1)_{(u)} \wedge (f_2)_{(u)} = 0$, тогда из леммы 1 получаем $(h_1)_{(u^{1-s}v^s)} \wedge (h_2)_{(u^{1-s}v^s)} = 0$, $h_{(u^{1-s}v^s)} = (h_1)_{(u^{1-s}v^s)} + (h_2)_{(u^{1-s}v^s)}$. В силу произвольности u, v отсюда немедленно вытекает требуемое.

Пусть до конца раздела в $\mathfrak{M}(\bar{M})$ фиксирована какая-нибудь единица. Выберем пока произвольно единицы 1_0, 1_1 и 1_s в максимальных расширениях пространств $(X_0)^*$, $(X_1)^*$ и $(X_s)^*$, соответственно, и рассмотрим соответствующие канонические реализации

$$R_i\colon \mathfrak{M}((X_i)^*) \to \mathfrak{M}(\bar{M}) \quad (i = 0, 1, s).$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $h = f^{1-s}g^s$. *Пусть* K_f, K_g, K_h *суть компоненты в* $\mathfrak{M}(\bar{M})$, *порожденные элементами* $R_0(f)$, $R_1(g)$, $R_s(h)$ *соответственно. Тогда* $K_h = K_f \cap K_g$.

Справедливость леммы 3 прямо вытекает из леммы 1 и ((5), теорема 3.2).

Определение 1. Для $i = 0, 1, s$ через $\mathfrak{E}_i$ обозначим *базу* пространства $\mathfrak{M}((X_i)^*)$, т. е. $\mathfrak{E}_i = \{e\colon e \in \mathfrak{M}((X_i)^*),\ e \wedge (1_i - e) = 0\}$. Полагаем также

$$E_i = \mathfrak{E}_i \cap (X_i)^* \quad (i = 0, 1, s).$$

Определение 2. Будем говорить, что единица 1_s *подчинена* единицам 1_0, 1_1, если для любых $e_0 \in E_0$, $e_1 \in E_1$ справедливо $e_0^{1-s}e_1^s \in E_s$.

Лемма 4. *Пусть* 1_0 *и* 1_1 *выбраны произвольно. Тогда существует и единственна единица* 1_s, *подчиненная единицам* 1_0, 1_1. *При этом*

$$1_s = \sup\{e_0^{1-s}e_1^s\colon e_0 \in E_0,\ e_1 \in E_1\} \text{ в } \mathfrak{M}((X_s)^*).$$

Доказательство. Положим $T = \{e_0^{1-s}e_1^s\colon e_0 \in E_0,\ e_1 \in E_1\}$. Из леммы 2 следует, что инфимум любых двух элементов из множества T является осколком каждого из них. Поэтому существует $\sup T \in \mathfrak{M}((X_s)^*)$. Из леммы 3 и (([1]), теорема 1, утверждение 2)) следует, что T полно в $\mathfrak{M}((X_s)^*)$ т. е. компонента в $\mathfrak{M}((X_s)^*)$, порожденная T, есть все $\mathfrak{M}((X_s)^*)$. Из сказанного ясно, что $\mathbf{1}_s = \sup T$ есть единица в $\mathfrak{M}((X_s)^*)$, подчиненная единицам $\mathbf{1}_0$, $\mathbf{1}_1$ и другой такой единицы не существует.

Пусть до конца раздела фиксированы произвольные единицы $\mathbf{1}_0$, $\mathbf{1}_1$ и пусть единица $\mathbf{1}_s$ подчинена им.

Лемма 5. *Для любых* $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$ *справедливо*

$$R_s(f^{1-s}g^s) = [R_0(f)]^{1-s}[R_1(g)]^s.$$

Здесь в правой части стоит значение функции $|t_1|^{1-s}|t_2|^s$ на элементах $R_0(f)$, $R_1(g)$ K-пространства $\mathfrak{M}(\hat{M})$.

Доказательство. Пусть сначала $f \in E_0$, $g \in E_1$. Тогда $R_s(f^{1-s}g^s)$, $R_0(f)$, $R_1(g)$ суть единичные элементы пространства $\mathfrak{M}(\hat{M})$, причем в силу леммы 3 имеем $R_s(f^{1-s}g^s) = R_0(f) \wedge R_1(g)$ или, что то же самое $R_s(f^{1-s}g^s) = [R_0(f)]^{1-s}[R_1(g)]^s$. Пусть теперь f и g ступенчатые, т. е. $f = \sum_{i=1}^{m} a_i p_i$, $g = \sum_{j=1}^{n} b_j q_j$, где $p_i \in E_0$ попарно дизъюнктны, $q_j \in E_1$ попарно дизъюнктны и числа a_i, $b_j > 0$. Тогда, в силу леммы 2, имеем $f^{1-s}g^s = \sum_{i,j} a_i^{1-s} b_j^s p_i^{1-s} q_j^s$.

Отсюда

$$R_s(f^{1-s}g^s) = \sum_{i,j} a_i^{1-s} b_j^s R_s(p_i^{1-s} q_j^s) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i^{1-s} b_j^s [R_0(p_i)]^{1-s}[R_1(q_j)]^s = [R_0(f)]^{1-s}[R_1(g)]^s.$$

Общий случай. Пусть ступенчатые f_n, g_n $(n \in N)$ таковы, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$, $0 \leqslant g_n \uparrow g$. По уже доказанному $R_s(f_n^{1-s}g_n^s) = [R_0(f_n)]^{1-s}[R_1(g_n)]^s$.

Остается применить последнее утверждение леммы 2.

Прежде чем формулировать основной результат этого раздела отметим следующее. *Отождествим* (для простоты записи) *пространства* $(X_0)^*$, $(X_1)^*$, $(X_s)^*$ *с их образами* $R_0((X_0)^*)$, $R_1((X_1)^*)$, $R_s((X_s)^*)$ *при канонических реализациях.* Тогда эти пространства суть нормальные подпространства пространства $\mathfrak{M}(\hat{M})$. Теперь из пространств $(X_0)^*$, $(X_1)^*$ можно образовать пространство $((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s$ точно так же, как $X_0^{1-s}X_1^s$ строится из пространств X_0, X_1.

Теорема 1. *Пусть попрежнему единицы* $\mathbf{1}_0$, $\mathbf{1}_1$ *выбраны произвольно, а единица* $\mathbf{1}_s$ *подчинена им. Тогда равенство*

$$(X_s)^* = ((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s$$

имеет место как по запасу элементов, так и по норме.

Доказательство. В ([1], теорема 1) доказано, что $\{f^{1-s}g^s : f \in (X_0)_+^*,\ g \in (X_1)_+^*\} = (X_s)_+^*$ и для любого $F \in (X_s)_+^*$ справедливо $\|F\|_{(X_s)^*} = \inf\{\lambda > 0 : F \leqslant \lambda f^{1-s}g^s$ для некоторых

$$f \in (X_0)_+^*,\ g \in (X_1)_+^* c \|f\|_{(X_0)^*} \leqslant 1,\ \|g\|_{(X_1)^*} \leqslant 1\}.$$

Отсюда и из леммы 5 немедленно вытекает требуемое.

Ранее показано (см. [1], лемма 20), что, если в одном из пространств X_0, X_1 выполнено условие (А) из определения KB-пространства, то условие (А) выполнено и в X_s. Используя теорему 1, мы сейчас получим необходимое и достаточное условие того, что в X_s выполнено (А). Нам понадобятся следующие две леммы, первая из которых тривиальна, а вторая легко вытекает из хорошо известных результатов.

Лемма 6. *Если X_0 и X_1 дизъюнктны, то $X_s = \{0\}$ и для любых $f \in (X_0)^*$, $g \in (X_1)^*$ справедливо $f\mathrm{D}g$.*

Лемма 7. *Пусть Y есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W, $R_Y : \mathfrak{M}(Y^*) \to \mathfrak{M}(\bar{M})$ каноническая реализация пространства Y^*. Тогда множества $R_Y(\bar{Y})$ и $\bar{M}$ порождают в $\mathfrak{M}(\bar{M})$ одну и ту же компоненту.*

Теорема 2. *Для того чтобы в X_s было выполнено условие* (А) *необходимо и достаточно чтобы для любых $f \in (X_0)^*_{\mathrm{ant}}$, $g \in (X_1)^*_{\mathrm{ant}}$ было $f\mathrm{D}g$.*

Доказательство. В силу леммы 6 можно считать, что X_0 и X_1 суть фундаменты в W.

Докажем необходимость. Пусть $0 \leqslant f \in (X_0)^*_{\mathrm{ant}}$, $0 \leqslant g \in (X_1)^*_{\mathrm{ant}}$. Из леммы 7 следует, что $f\mathrm{D}\bar{M}$. Тогда $f^{1-s}g^s\mathrm{D}\bar{M}$ в силу леммы 3. Так как в X_s выполнено (А), то все регулярные функционалы на X_s вполне линейны, поэтому $\bar{M}$ и $R_s((X_s)^*)$ порождают в $\mathfrak{M}(\bar{M})$ одну и ту же компоненту. Тем самым $f^{1-s}g^s\mathrm{D}R_s((X_s)^*)$. Следовательно, $f^{1-s}g^s = 0$ и в силу леммы 3 имеем $f\mathrm{D}g$.

Докажем достаточность. Возьмем произвольные $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$ и положим $h = f^{1-s}g^s$. Пусть $f = f_1 + f_2$, $g = g_1 + g_2$, где f_1 и g_1 вполне линейны, а f_2 и g_2 антинормальны. Имеем

$$h = (f_1 + f_2)^{1-s}(g_1 + g_2)^s = f_1^{1-s}g_1^s + f_2^{1-s}g_1^s +$$

$$+ f_1^{1-s}g_2^s + f_2^{1-s}g_2^s = f_1^{1-s}g_1^s.$$

Здесь $f_2^{1-s}g_1^s = f_1^{1-s}g_2^s = 0$ ибо $f_2\mathrm{D}g_1$ и $f_1\mathrm{D}g_2$ всегда; $f_2^{1-s}g_2^s = 0$ ибо $f_2\mathrm{D}g_2$ по условию. Тем самым h вполне линеен. Итак, все регулярные функционалы на X_s вполне линейны, поэтому в X_s выполнено (А) (см. [3], теорема IX.4.4. и гл. VII § 6).

3. О степенном преобразовании нормы

В этом разделе X есть произвольное банахово KN-пространство, p — число такое, что $1 < p < \infty$. Положим $W = \mathfrak{M}(X)$ и зафиксируем в W какую-нибудь единицу $1(W)$. Считаем, что X содержится в W естественным образом. Полагаем.

$$X_p = \{x \in W : |x|^p \in X\}$$

и для $x \in X_p$

$$\|x\|_{X_p} = (\||x|^p\|_X)^{1/p}.$$

Напомним, что $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ есть банахово KN-пространство и фундамент в W. Заметим, что X_p зависит от выбора единицы $1(W)$, однако нетрудно показать, что все получающиеся при этом пространства алгебраически и порядково изоморфны и изометричны.

Пусть $M = W_{1(W)}$ с естественной нормой KN-пространства ограниченных элементов. Ясно, что $X_p = X^{1-s}M^s$, где $1 - s = 1/p$. Поэтому при изучении сопряженных пространств к X_p можно применять результаты предыдущего раздела.

Теорема 3.

1) *Пространство* $(X_p)^*$ *есть* KB*-пространство.*

2) *Пространство* $(X_p)^{**}$ *алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству* $(\overline{X^*})_p$, *где* $\overline{X^*}$ *есть сопряженное по Накано к банахову сопряженному* X^*.

Доказательство. Выберем произвольно единицы 1_1 и 1_2 в пространствах $\mathfrak{M}(X^*)$ и $\mathfrak{M}(M^*)$, а единицу в $\mathfrak{M}((X_p)^*)$ выберем так, чтобы она была подчинена единицам 1_1, 1_2. Тогда, отождествляя пространства X^* и $(X_p)^*$ с их образами в $\mathfrak{M}(M^*)$ при канонических реализациях, в силу теоремы 1 имеем

$$(X_p)^* = (X^{1-s}M^s)^* = (X^*)^{1-s}(M^*)^s.$$

Так как M есть KN-пространство ограниченных элементов, то M^* есть KB-пространство. Поэтому ((1), лемма 20) $(X_p)^*$ есть KB-пространство. Пусть $P = \mathfrak{M}(M^*)_{1_2}$ с естественной нормой KN-пространства ограниченных элементов. Выберем произвольно единицы в пространствах $\mathfrak{M}(X^{**})$, $\mathfrak{M}(M^{**})$, $\mathfrak{M}(P^*)$, а единицу в $\mathfrak{M}((X_p)^{**})$ выберем так, чтобы она была подчинена единицам пространств $\mathfrak{M}(X^{**})$ и $\mathfrak{M}(M^{**})$. Отождествив пространства X^{**}, M^{**}, $(X_p)^{**}$ с их образами в $\mathfrak{M}(P^*)$ при канонических реализациях, в силу теоремы 1 получим

M^{**}

$$(X_p)^{**} = (X^{**})^{1-s}(M^{**})^s.$$

Заметим, что $M^{**} = \overline{M^*}$, ибо M^* есть KB-пространство. Пусть V есть компонента в $\mathfrak{M}(P^*)$, порожденная M^{**}. Ясно, что $X^{**} \cap V = \overline{X^*}$. Поэтому

$$(X^{**})^{1-s}(M^{**})^s = (\overline{X^*})^{1-s}(\overline{M^*})^s.$$

Остается заметить, что $(\overline{X^*})^{1-s}(\overline{M^*})^s$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично $(\overline{X^*})_p$, ибо $\overline{M^*}$ есть KN-пространство ограниченных элементов.

Замечание. В связи со вторым утверждением теоремы 3 напомним, что $\overline{X^*}$ можно «выделить» из X^{**} без использования какой бы то ни было информации о полуупорядоченности в X (([6]), теорема 2). Именно, $\overline{X^\bullet}$ состоит из всех $F \in X^{\bullet\bullet}$, таких что $\sum_T F(f_t) = 0$ для любого семейства $[f_t, T]$ в $X^\bullet$, удовлетворяющего условию: $\sum_T |f_t(x)| < \infty$, $\sum_T f_t(x) = 0$ для любого $x \in X$.

Известно, что сопряженное банахово пространство обладает рядом полезных свойств, которыми, вообще говоря, не обладает произвольное банахово пространство. С этой точки зрения представляет интерес следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть X есть банахово KN-пространство с тотальным $\overline{X}$ и норма в X обладает следующим дополнительным свойством: если направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ в X $(\alpha \in \mathrm{A})$ и $\sup\limits_\alpha \|x_\alpha\|_X < \infty$, то существует $\sup\limits_\alpha x_\alpha = x \in X$ и $\sup\limits_\alpha \|x_\alpha\|_X = \|x\|_X$. Положим $Y = X_p$, $Z = \overline{Y}$. Тогда X_p алгебраически и порядково изоморфно и изометрично $Z^\bullet$. При этом мы считаем, что норма в $Z = \overline{Y}$ индуцирована из $Y^\bullet$.*

Доказательство. Из (([1]), лемма 19) следует, что X_p алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $\overline{Z}$. Остается заметить, что в силу теоремы 3 пространство $(X_p)^\bullet$, а значит и его компонента Z, суть KB-пространства, а потому $\overline{Z} = Z^\bullet$.

4. Приложение к общей теории банаховых структур

Пусть W есть расширенное K-пространство с фиксированной единицей, L — KB-пространство с аддитивной нормой, являющееся фундаментом в W, J — функционал на L, действующий по формуле

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L,\ x \in L.$$

Пусть X есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W. *Дуальное* пространство X' состоит из всех $x' \in W$, таких что

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{J(|xx'|) : x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\} < \infty.$$

Напомним, что $\overline{X}$ естественным образом можно отождествить с X'. Кроме того, всякий антинормальный функционал на X *анормален* *), т. е. аннулируется на некотором фундаменте в X.

Теорема 5. *Для любых $f \in X^\bullet_{\mathrm{ant}}$, $g \in (X')^\bullet_{\mathrm{ant}}$ справедливо $f \mathrm{D} g$.*

Доказательство. Из (([1]), теорема 5 или следствие 3) следует, что $X^{1-s}(X')^s$ есть KB-пространство при любом $s \in (0, 1)$. Тем самым в $X^{1-s}(X')^s$ выполнено условие (A), и требуемое немедленно вытекает из теоремы 2.

5. Приложение к банаховым пространствам с безусловным базисом

В этом разделе будут доказаны две теоремы о банаховых пространствах с безусловными базисами, являющиеся следствиями результатов, полученных в ([1]) § 8. Всюду в этом разделе l^1 есть обычное пространство

* Обратное всегда имеет место.

всех последовательностей $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел, таких что $\|\lambda\|_{l^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$. Через s обозначается пространство всех последовательностей вещественных чисел.

Пусть E есть банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$. Будем говорить, что базис $\{e_k\}$ *удовлетворяет условию* (*), *если из того что* $\{a_k\}$, $\{b_k\} \in s$, $|a_k| \leqslant |b_k|$ $(k \in N)$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k$ *сходится, следует, что*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right\|_E \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k \right\|_E.$$

Напомним, что для любого банахова пространства E с безусловным базисом $\{e_k\}$ существует эквивалентная перенормировка, после которой базис $\{e_k\}$ будет удовлетворять условию (*).

Теорема 6. *Пусть E — произвольное банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$ и пусть $\{f_k\}$ есть биортогональная с $\{e_k\}$ система функционалов. Тогда существует константа $c > 0$, обладающая следующим свойством. Для любой последовательности $\lambda = \{\lambda_k\} \in l^1$ найдутся числовые последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ такие что:*

1) $u_k v_k = \lambda_k$ $(k \in N)$;

2) *ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k f_k$ *сходятся в нормированных топологиях пространств E и E^* к некоторым $x \in E$ и $\varphi \in E^*$;*

3) *справедливо неравенство.*

$$\|\lambda\|_{l^1} \geqslant c \|x\|_E \|\varphi\|_{E^*}.$$

При этом, если базис $\{e_k\}$ удовлетворяет условию (*), *то за c можно принять любое число меньшее* 1.

Теорема 7. *Пусть E, $\{e_k\}$, $\{f_k\}$ те же, что и в теореме* 6, *причем вдобавок базис $\{e_k\}$ ограниченно полон и удовлетворяет условию* (*). *Тогда для любой последовательности $\lambda = \{\lambda_k\} \in l^1$ найдутся числовые последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, такие что:*

1) $u_k v_k = \lambda_k$ $(k \in N)$;

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k$ *сходится по норме к некоторому $x \in E$, а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k f_k$ *слабо * сходится к некоторому $\varphi \in E^*$;*

3) $\|\lambda\|_{l^1} = \|x\|_E \|\varphi\|_{E^*}$.

Докажем теоремы 6 и 7. Пусть базис $\{e_k\}$ удовлетворяет условию (*). Вложим E и E^* в пространство s, отождествив каждый $x \in E$ с последовательностью $\{f_k(x)\} \in s$ и каждый $f \in E^*$ с последовательностью $\{f(e_k)\} \in s$. Заметим, что s есть расширенное K-пространство, l^1 есть KB-пространство с аддитивной нормой и фундамент в s, E и E^* суть банаховы KN-пространства и фундаменты в s, причем E^* есть дуальное пространство к E. Теперь осталось только применить теорему 6 работы [1].

Поступила в редакцию
28 сентября 1971 г.

Литература

1. Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах, Сибирской математический журнал, X, № 3, (1969), 584—599.
2. Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах II, Сибирский математический журнал, XII, № 3, (1971), 582—587.
3. Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., 24, № 2 (1964), 113—190.
4. Лозановский Г. Я., О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях, Докл. АН СССР, 188, № 3 (1969), 522—524.
5. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я., О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах, Матем. Сб. 84 (126), № 3 (1971), 331—352.
6. Лозановский Г. Я., О банаховых пространствах, эквивалентных $K\dot{B}$-линеалам, XXIV Герценовские чтения, Математика, Лен. пед. ин-т им. А. И. Герцена, март — апрель 1971 г., стр. 52—54.
7. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. и Семенов Е. М., Шкалы банаховых структур измеримых функций, Тр. Моск. матем. о-ва, 17 (1967), 293—322.
8. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.
9. Лозановский Г. Я., О вполне линейных функционалах в полуупорядоченных пространствах, Матем. заметки, 8, № 2 (1970), 187—195.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1973

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIV, № 1 Январь — Февраль 1973

УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ. IV

Настоящая работа является продолжением работ ([1–3]). В ней продолжается исследование введенной Кальдероном ([4]) конструкции, позволяющей по заданным банаховым структурам, являющимся фундаментами некоторого расширенного K-пространства, образовать большое число новых банаховых структур с помощью вогнутых функций, удовлетворяющих определенным условиям. Эта конструкция является существенным обобщением известной конструкции пространств Орлича ([5]). Напомним, что банаховы структуры измеримых функций на пространстве с мерой, так же как и банаховы структуры числовых последовательностей, суть частные случаи общего понятия абстрактной банаховой структуры. Поэтому приводимые в данной статье результаты нетрудно переформулировать для указанных частных случаев. Основные результаты работы (теоремы 1–3) сформулированы в разделе 2. В разделах 3–6 приведены их доказательства. В разделе 7 рассмотрены важные частные случаи основной конструкции. Некоторые из результатов работы были опубликованы без доказательств в ([6]).

1. Терминология и обозначения

Сопряженное к нормированному пространству X обозначается через X^*. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы, в основном, следуем монографии ([7]). Напомним, что K-пространство W называется *расширенным*, если любое множество попарно дизъюнктных его элементов ограничено по упорядочению. Пусть в расширенном K-пространстве W фиксирована *единица* 1. Тогда W допускает реализацию в виде пространства $C_\infty(Q)$ на подходящем *экстремально несвязном* бикомпакте Q так, что 1 превращается в функцию тождественно равную 1 на Q. Здесь $C_\infty(Q)$ есть пространство всех непрерывных на Q функций, которые на нигде не плотных в Q множествах могут принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Для $u \in C_\infty(Q)$ через Q_u обозначается открыто-замкнутый *носитель* элемента u. Напомним, что подобного рода реализация позволяет, например, для некоторых элементов $u, v \in W$ и функции $f(\xi, \eta)$ вещественных аргументов ξ и η определить элемент $f(u, v) \in W$. В частности, для любых $u, v \in W$ определено *произведение* $uv \in W$. *Следом* элемента $u \in W$ называется элемент $e_u = (u)1$, т. е. проекция 1 на компоненту в W порожденную u. Всюду в работе для любого $u \in W$ через u^{-1} обозначается элемент, удовлетворяющий условиям $e_{u^{-1}} = e_u = uu^{-1}$.

Нам понадобится понятие минимального распространения функционала ([6]). Пусть X — K-пространство, Y — его нормальное подпространство и пусть $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$. Функционал f называется *минимальным распространением* функционала g, если сужение $f|_Y = g$ и для любого $x \in X_+$ справедливы равенства

$$f_+(x) = \sup\{g_+(y) : 0 \leqslant y \leqslant x,\ y \in Y\},$$

$$f_-(x) = \sup\{g_-(y) : 0 \leqslant y \leqslant x,\ y \in Y\}.$$

Напомним также следующее. Пусть $\tilde{X}_Y = \{f \in \tilde{X} : f|_Y = 0\}$. Тогда $\tilde{X}_Y$ есть компонента в $\tilde{X}$ и ее дизъюнктное дополнение совпадает с множеством всех $f \in \tilde{X}$, таких что f есть минимальное распространение своего сужения $f|_Y$.

Если X есть K-пространство, $u \in X$, то через X_u обозначается множество всех $x \in X$, таких что $|x| \leqslant \lambda |u|$ для некоторого числа $\lambda \geqslant 0$. Если для $x \in X_u$ положить

$$\|x\|_{X_u} = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda |u|\},$$

то X_u превращается в *KN-пространство ограниченных элементов.*

Наконец, напомним следующее. Пусть X есть KN-пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Норма $\|\cdot\|_X$ называется *полунепрерывной*, если из того, что $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \uparrow x \in X_+$ следует, что $\sup\limits_n \|x_n\|_X = \|x\|_X$. Норма $\|\cdot\|_X$ называется *монотонно полной*, если из того что $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|x_n\|_X < \infty$ следует, что существует $\sup\limits_n x_n \in X$. Заменив в этих определениях последовательности направлениями с произвольными множествами индексов, получим определения *универсально полунепрерывной* и *универсально монотонно полной* норм.

2. Формулировки основных результатов

Определение 1. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначим множество всех вещественных вогнутых функций $\varphi(\xi, \eta)$, заданных и непрерывных по совокупности аргументов при $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, таких что

$$\varphi(\xi, 0) = \varphi(0, \eta) = 0 \quad \text{при всех} \quad \xi, \eta \geqslant 0 \tag{1}$$

и

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\xi, \alpha) = \lim_{\beta \to +\infty} \varphi(\beta, \eta) = +\infty \text{ при всех } \xi, \eta > 0. \tag{2}$$

Через $\mathfrak{A}_2^0$ обозначим множество всех *положительно однородных* функций $\varphi \in \mathfrak{A}_2$.

Определение 2. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$. Положим

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varphi(\alpha, \beta)} \quad \text{для } \xi, \eta \geqslant 0. \tag{3}$$

Ясно, что $\hat{\varphi} \in \mathfrak{A}_2^0$. Заметим, что $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$.

Между функциями из $\mathfrak{A}_2^0$ и *N-функциями* в смысле монографии ([5]) существует тесная связь.

Предложение 1. *a) Пусть $M(\xi)$ и $N(\eta)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций. Положим для $\xi, \eta \geqslant 0$*

$$\varphi(\xi,\eta)=\begin{cases} 0 & \text{при } \eta=0 \\ \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) & \text{при } \eta>0. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, причем

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\begin{cases} 0 & \text{при } \xi=0. \\ \xi N^{-1}(\eta\xi^{-1}) & \text{при } \xi>0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь M^{-1} и N^{-1} суть функции обратные к M и N, рассматриваемым при неотрицательных значениях аргумента.

b) Обратно, для любой $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ найдется единственная N-функция $M(\xi)$, такая что справедливо (4).

Справедливость предложения 1 проверяется без труда.

На протяжении всей работы W означает произвольное расширенное K-пространство с единицей 1, X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в W.

Определение 3. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2$. Через $\varphi(X_0, X_1)$ обозначим множество всех таких $x \in W$, что

$$|x| \leqslant \lambda\varphi(|x_0|, |x_1|) \tag{6}$$

для некоторого числа $\lambda>0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i=0, 1)$. Через $\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ обозначим инфимум всех возможных λ в (6).

Так построенное пространство $\varphi(X_0, X_1)$ с нормой $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ есть банахово KN-пространство и фундамент в W, см. ([2]) *).

Напомним, что $X_0 \cap X_1$ и X_0+X_1 оказываются банаховыми KN-пространствами, если на них ввести следующие нормы:

$$\|x\|_{X_0\cap X_1}=\max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}, \quad x \in X_0 \cap X_1, \tag{7}$$

$$\|x\|_{X_0+X_1}=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1,\ |x_0|+|x_1|=|x|\},$$
$$x \in X_0+X_1. \tag{8}$$

Прежде чем формулировать теорему 1, заметим следующее. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, $\psi=\hat{\varphi}$, $X=\varphi(X_0, X_1)$. Ясно, что $X_0 \cap X_1 \subset X$. Через $X^*_{\min}$ будем обозначать совокупность всех $F \in X^*$, таких что F есть минимальное распространение на X своего сужения $F|_{X_0\cap X_1}$. Тогда $X^*_{\min}$ естественно вкладывается как нормальное подпространство в $(X_0 \cap X_1)^*$, если каждому $F \in X^*_{\min}$ сопоставить $F|_{X_0\cap X_1}$. Аналогично, если $X_0 \cap X_1$ плотно в X_i $(i=0, 1)$, то, сопоставив каждому $f \in X_i^*$ его сужение на $X_0 \cap X_1$, мы получим вложение X_i^* в $(X_0 \cap X_1)^*$. В этом случае, вложив X_0^* и X_1^* в $(X_0 \cap X_1)^*$, можно (см. определение 3) образовать пространство $\psi(X_0^*, X_1^*)$, являющееся нормальным подпространством в $(X_0 \cap X_1)^*$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, $\psi=\hat{\varphi}$ и пусть $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и в X_1. Пусть $X=\varphi(X_0, X_1)$. Тогда после указанного вложения $X^*_{\min}$, X_0^* и X_1^**

*) Заметим, что определение 3 имеет смысл и тогда, когда X_0, X_1 суть произвольные нормальные подпространства (не обязательно фундаменты) в W. При этом $\varphi(X_0, X_1)$ оказывается нормальным подпространством в W.

в $(X_0 \cap X_1)^*$ *справедливо равенство*

$$X^*_{\min} = \psi(X_0^*, X_1^*) \tag{9}$$

по запасу элементов и

$$\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} \leqslant \|F\|_{X^*} \leqslant \tilde{2} \|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} \text{ при } F \in X^*_{\min}. \tag{10}$$

Если, кроме того, M и N из (4) и (5) удовлетворяют Δ_2-условию, то $X_0 \cap X_1$ плотно в X и, следовательно, $X^*_{\min} = X^*$.

Далее в этом разделе не требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в X_0 или X_1.

Предложение 2. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$. Тогда*

a) Равенство

$$(\varphi_1(X_0, X_1), \|\cdot\|_{\varphi_1(X_0, X_1)}) = (\varphi_2(X_0, X_1), \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0, X_1)})$$

при всевозможных W, 1, X_0, X_1 имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_1 = \varphi_2$.

b) Равенство $\varphi_1(X_0, X_1) = \varphi_2(X_0, X_1)$ по запасу элементов при всевозможных W, 1, X_0, X_1 имеет место тогда и только тогда, когда существуют числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1\varphi_2 \leqslant \varphi_1 \leqslant c_2\varphi_2. \tag{11}$$

При этом, если это условие выполнено, то

$$c_1\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0, X_1)} \leqslant \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0, X_1)} \leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0, X_1)}. \tag{12}$$

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству теоремы 13.2 из ([5]), и мы его опускаем.

Определение 4. Функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$ будем называть *эквивалентными*, если для некоторых $c_1, c_2 > 0$ справедливо (11).

До конца этого раздела будем предполагать теперь, что в W имеется фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой (см. ([7]), гл. VII, § 7). Для $x \in L$ полагаем

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L. \tag{13}$$

Напомним, что J есть существенно положительный вполне линейный функционал на L. Если $x \in W_+$, но $x \notin L$, то для удобства полагаем $J(x) = +\infty$. Если Y есть произвольный фундамент в W, то пространство

$$Y' = \{y' \in W : yy' \in L \text{ для любого } y \in Y\} \tag{14}$$

называется пространством *дуальным* к Y. Напомним, что Y' естественным образом отождествляется с пространством $\overline{Y}$ всех вполне линейных функционалов на Y. Если, вдобавок, Y есть банахово KN-пространство, то на Y' рассматриваем *дуальную норму*

$$\|y'\|_{Y'} = \sup \{J(|yy'|) : y \in Y, \ \|y\|_Y \leqslant 1\}. \tag{15}$$

Определение 5. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$.

a) Пара (φ_1, φ_2) называется *согласованной*, если

$$((\varphi_1(X_0, X_1))', \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0, X_1))'}) = (\varphi_2(X_0', X_1'), \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0', X_1')}) \tag{16}$$

при всевозможных W, 1, L, J, X_0, X_1.

b) Пара (φ_1, φ_2) называется *слабо согласованной, если*

$$(\varphi_1(X_0, X_1))' = \varphi_2(X_0', X_1') \tag{17}$$

по запасу элементов при всевозможных W, 1, L, J, X_0, X_1.

В [2] показано, что все согласованные пары (φ_1, φ_2) суть

$$\varphi_1(\xi, \eta) = A\xi^{1-s}\eta^s, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s,$$

где $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$ — любые. В следующей теореме дается описание всех слабо согласованных пар.

Теорема 2. *a*) *Для любой* $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ *пара* $(\varphi, \hat{\varphi})$ *слабо согласована. При этом всегда*

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')}. \tag{18}$$

b) *Обратно, пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$ *и пара* (φ_1, φ_2) *слабо согласована. Тогда существует* $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, *такая что* φ *эквивалентна* φ_1, *а* $\hat{\varphi}$ *эквивалентна* φ_2.

Следующая теорема описывает некоторые полезные свойства пространства $\varphi(X_0, X_1)$.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$.

a) *Если нормы* $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ *универсально монотонно полны, то этим же свойством обладает норма* $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$.

b) *Пусть нормы* $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ *универсально монотонно полны и универсально полунепрерывны. Тогда этими же двумя свойствами обладает и норма* $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$. *При этом для любого* $x \in \varphi(X_0, X_1)$ *существуют* $x_i \in X_i$, *такие что* $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$ *и*

$$|x| \leqslant \|x\|_{\varphi(X_0, X_1)} \varphi(|x_0|, |x_1|). \tag{19}$$

Иными словами в этом случае среди чисел λ из определения 3 существует наименьшее.

Замечание. Из универсальной полунепрерывности норм $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ не следует, что норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ универсально полунепрерывна. Соответствующий пример приводится в разделе 7.

3. Некоторые вспомогательные предложения

Всюду в этом разделе пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ фиксирована, $\psi = \hat{\varphi}$, N-функции M и N из (4) и (5).

Лемма 1. *Пусть* $M_+'(\xi)$ *есть правая производная функции* $M(\xi)$. *Пусть* $u, v \in W_+$, *причем* $e_u = e_v$. *Положим*

$$w = M_+'(M^{-1}(uv^{-1})), \quad x = w^{-1}, \quad y = N(w)w^{-1}. \tag{20}$$

Тогда

$$\psi(x, y) = e_u, \ \varphi(u, v) = xu + yv. \tag{21}$$

Доказательство. Имеем (см. [5], стр. 24)

$$\xi M_+'(\xi) = M(\xi) + N(M_+'(\xi)) \text{ при всех } \xi \geqslant 0. \tag{22}$$

Имеем $\psi(x, y) = \psi(w^{-1}, N(w)w^{-1}) = w^{-1}\psi(1, N(w)) = w^{-1}N^{-1}(N(w)) = w^{-1}w = e_w = e_u$. Аналогично доказывается второе равенство.

Лемма 2. *Пусть $u, v, w \in W_+$, причем $w \leqslant \varphi(u, v)$. Тогда существуют $u', v' \in W_+$ такие что $u' \leqslant u$, $v' \leqslant v$, $w = \varphi(u', v) = \varphi(u, v')$.*

Справедливость леммы очевидна в силу строгого возрастания функций M и N на $[0, +\infty)$.

Лемма 3. *Пусть K — произвольный бикомпакт, $E = C(K) \times C(K)$. Возьмем произвольный $h \in C(K)_+^*$ и положим $H = \{(f, g) \in E_+^* : \psi(f, g) \geqslant h\}$. Множество H непусто, выпукло и замкнуто в топологии $\sigma(E^*, E)$.*

Эта лемма есть обобщение леммы 8 из [1]. Ее доказательство, подобное доказательству последней, мы опускаем.

Лемма 4. *Пусть K — произвольный бикомпакт, $f_0, f_1 \in C(K)_+^*$, $z \in C(K)_+$, число $a > 0$. Пусть*

$$(u_0, u_1 \in C(K)_+, \ \varphi(u_0, u_1) \geqslant z) \Rightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \not\leqslant a). \tag{23}$$

Тогда $(\psi(f_0, f_1))(z) \not\leqslant a$.

Доказательство. Пусть μ — неотрицательная регулярная борелевская мера на K, p_0, p_1 неотрицательные борелевские функции на K, такие что

$$f_i(x) = \int_K xp_i d\mu \ \text{ при } x \in C(K) \quad (i = 0, 1).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $p_i^{(\varepsilon)} = p_i + \varepsilon$ $(i = 0, 1)$. В силу (22) и леммы 1 найдутся борелевские функции $q_i^{(\varepsilon)}$ $(i = 0, 1)$, такие что $\varphi(q_0^{(\varepsilon)}, q_1^{(\varepsilon)}) = 1$ на K, $\psi(p_0^{(\varepsilon)}, p_1^{(\varepsilon)}) = q_0^{(\varepsilon)}p_0^{(\varepsilon)} + q_1^{(\varepsilon)}p_1^{(\varepsilon)}$ и $c_1 \leqslant q_i^{(\varepsilon)} \leqslant c_2$ на K, где числа $c_1, c_2 > 0$ зависят от ε. Возьмем последовательность $y_n \in C(K)_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $y_n \to q_1^{(\varepsilon)}$ μ- почти всюду и $c_1 \leqslant y_n \leqslant c_2$ при всех n. Положим $x_n = y_n M(y_n^{-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что $x_n \in C(K)_+$, $\varphi(x_n, y_n) = 1$ на K, $x_n \to q_0^{(\varepsilon)}$ μ-почти всюду, причем $c_1' \leqslant x_n \leqslant c_2'$, где числа $c_1', c_2' > 0$. Положим $u_0^{(n)} = x_n z$, $u_1^{(n)} = y_n z$. Имеем $\varphi(u_0^{(n)}, u_1^{(n)}) = \varphi(x_n, y_n) z = z$. Поэтому $f_0(u_0^{(n)}) + f_1(u_1^{(n)}) \geqslant a$, т. е. $\int_K z(x_n p_0 + y_n p_1)\, d\mu \geqslant a$ при всех n.

Отсюда $\int_K z(q_0^{(\varepsilon)}p_0 + q_1^{(\varepsilon)}p_1)\, d\mu \geqslant a$. Тогда и подавно $\int_K z(q_0^{(\varepsilon)}p_0^{(\varepsilon)} + q_1^{(\varepsilon)}p_1^{(\varepsilon)}) \times d\mu \geqslant a$, т. е. $\int_K z\psi(p_0^{(\varepsilon)}, p_1^{(\varepsilon)})\, d\mu \geqslant a$.

Перейдя к пределу в последнем неравенстве при $\varepsilon \downarrow 0$, получим

$$\int_K z\psi(p_0, p_1) d\mu \geqslant a, \ \text{т. е.} \ (\psi(f_0, f_1))(z) \geqslant a.$$

Следующие четыре леммы почти очевидны, их доказательства мы опускаем.

Лемма 5. *Пусть Y_1, Y_2 суть банаховы KN-пространства, причем Y_1 есть нормальное подпространство в Y_2 и $\|\cdot\|_{Y_1}$ эквивалентна сужению $\|\cdot\|_{Y_2}$*

на Y_1. *Тогда, если норма* $\|\cdot\|_{Y_1}$ *универсально монотонно полна, то* Y_1 *есть компонента в* Y_2.

Лемма 6. *Пусть* Y *есть банахово* KN*-пространство,* Y_1 — *его фундамент плотный по норме в* Y. *Тогда для любого* $y \in Y_+$ *существует такая последовательность* $y_n \in (Y_1)_+$ $(n=1, 2, \ldots)$, *что* $\|y-y_n\|_Y \to 0$, $y_n \uparrow y$ *и* $(y_{n+1}-y_n) \wedge y_n = 0$ *при всех* n.

Лемма 7. *Пусть* Y *есть* KN*-пространство,* $(Y^\bullet)_1$ *есть компонента в* $Y^\bullet$, $0 < F \in Y^\bullet$, *причем* F *дизъюнктен* $(Y^\bullet)_1$. *Тогда существует направление* $y_\alpha \in Y_+$ $(\alpha \in A)$, *такое что* $f(y_\alpha) \to 0$ *для любого* $f \in (Y^\bullet)_1$ *и* $F(y_\alpha) \geqslant 1$ *при всех* $\alpha \in A$.

Лемма 8. *Пусть* Y *есть банахово* KN*-пространство,* Y_1 — *его замкнутый по норме фундамент, причем* $\|\cdot\|_{Y_1} = \|\cdot\|_Y\big|_{Y_1}$. *На* $\overline{Y}$ *и* $\overline{Y}_1$ *рассматриваем нормы, индуцированные из* $Y^\bullet$ *и* $Y_1^\bullet$ *соответственно. Тогда отображение* $\overline{Y} \ni f \to f|_{Y_1}$ *есть изометрический изоморфизм* $\overline{Y}$ *на* $\overline{Y}_1$.

Лемма 9. *Если* M *и* N *удовлетворяют* Δ_2*-условию, то существует число* $b > 2$, *такое что*

$$\varphi(\xi, \eta) \leqslant \varphi(b\xi/2, \eta/2), \ \varphi(\xi, \eta) \leqslant \varphi(\xi/2, b\eta/2) \ \text{\textit{при}}\ \xi, \eta \geqslant 0.$$

Доказательство. Так как M удовлетворяет Δ_2-условию, то существует $k > 2$ такое, что $M(2\xi) \leqslant kM(\xi)$ при всех $\xi \geqslant 0$. Так как N удовлетворяет Δ_2-условию, то (см. ([5]), стр. 38, 39) существует $l > 1$ такое, что $M(\xi) \leqslant \dfrac{1}{2l} M(l\xi)$ при всех $\xi \geqslant 0$. Простые вычисления показывают, что можно принять $b = \max\{k, 2l\}$.

4. Доказательство теоремы 1

Положим для краткости $Z = X_0 \cap X_1$. Обозначим (временно) через π, π_0, π_1 указанные перед теоремой 1 операторы естественного вложения пространств $X^\bullet_{\min}$, $X_0^\bullet$, $X_1^\bullet$ в $Z^\bullet$.

Лемма 10. *Пусть* $f_i \in (X_i)_+^\bullet$ $(i=0, 1)$. *Тогда*

$$\psi(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1) \in \pi(X^\bullet_{\min}) \tag{24}$$

и для $F = \pi^{-1}\psi(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1)$ *и любых* $u_i \in (X_i)_+$ $(i=0, 1)$ *справедливо*

$$F(\varphi(u_0, u_1)) \leqslant f_0(u_0) + f_1(u_1), \tag{25}$$

$$\|F\|_{X^\bullet} \leqslant \|f_0\|_{X_0^\bullet} + \|f_1\|_{X_1^\bullet}. \tag{26}$$

Доказательство. Положим $G = \psi(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1)$. Имеем, очевидно, $G \in Z^\bullet$. Реализуем W в виде $C_\infty(Q)$ на подходящем экстремально несвязном бикомпакте Q так, что 1 есть функция на Q тождественно равная единице. Возьмем произвольные $z \in Z_+$, $u_0 \in (X_0)_+$, $u_1 \in (X_1)_+$ такие что $z \leqslant \varphi(u_0, u_1)$. Положим $w_i = z \vee u_i$ $(i=0, 1)$. Пусть μ — неотрицательная регулярная борелевская мера на Q, l_i $(i=0, 1)$ неотрицательные борелевские функции на Q, такие что

$$f_i(x) = \int\limits_Q (xw_i^{-1}) l_i d\mu \ \text{при}\ x \in W_{w_i} \ (i=0, 1). \tag{27}$$

Здесь $xw_i^{-1} \in C(Q)$ есть произведение в смысле умножения элементов расширенного K-пространства, а $(xw_i^{-1})l_i$ есть уже обычное поточечное произведение конечных функций (xw_i^{-1}) и l_i. Так как очевидно $xw_i^{-1} = (xz^{-1}) \times (zw_i^{-1})$ при $x \in W_z$, то из (27) следует что

$$f_i(x) = \int\limits_Q (xz^{-1})(zw_i^{-1})l_i d\mu \text{ при } x \in W_z \quad (i = 0, 1). \tag{28}$$

Отсюда

$$G(x) = \int\limits_Q (xz^{-1})\psi((zw_0^{-1})l_0,\ (zw_1^{-1})l_1)d\mu \text{ при } x \in W_z.$$

Тем самым

$$G(z) = \int\limits_{Q_z} \psi((zw_0^{-1})l_0,\ (zw_1^{-1})l_1)d\mu. \tag{29}$$

Положим

$$Q_z^0 = \{s \in Q_z : 0 < z(s) \leqslant w_i(s) < +\infty \text{ при } i = 0, 1\}.$$

Множество Q_z^0 открыто и плотно в Q_z. Положим

$$p(t) = \psi((zw_0^{-1})(t)l_0(t),\ (zw_1^{-1})(t)l_1(t)),\ t \in Q,$$

$$p_t(s) = \psi((zw_0^{-1})(s)l_0(t),\ (zw_1^{-1})(s)l_1(t)),\ t \in Q,\ s \in Q.$$

Пусть $s \in Q_z^0$. Тогда

$$(zw_i^{-1})(s) = z(s)/w_i(s) \leqslant \varphi(u_0(s),\ u_1(s))/w_i(s).$$

Откуда

$$p_t(s) \leqslant \varphi(u_0(s),\ u_1(s))\psi(l_0(t)/w_0(s),\ l_1(t)/w_1(s)) \leqslant$$
$$\leqslant u_0(s)l_0(t)/w_0(s) + u_1(s)l_1(t)/w_1(s).$$

Но

$$p(t) = \lim_{\substack{s \to t_0 \\ s \in Q_z^0}} p_t(s) \quad \text{при} \quad t \in Q_z.$$

Из сказанного ясно, что

$$p(t) \leqslant (u_0 w_0^{-1})(t)l_0(t) + (u_1 w_1^{-1})(t)l_1(t) \text{ при всех } t \in Q. \tag{30}$$

Из (30) теперь следует, что

$$G(z) \leqslant \int\limits_{Q_z} (u_0 w_0^{-1})l_0 d\mu + \int\limits_{Q_z} (u_1 w_1^{-1})l_1 d\mu \leqslant f_0(u_0) + f_1(u_1). \tag{31}$$

Итак, для любых $u_0 \in (X_0)_+$, $u_1 \in (X_1)_+$ справедливо

$$\sup\{G(z) : z \in Z_+,\ z \leqslant \varphi(u_0,\ u_1)\} \leqslant f_0(u_0) + f_1(u_1). \tag{32}$$

Поэтому G допускает положительное распространение на X. Пусть F есть минимальное распространение. Ясно, что $F \in X^*_{\min}$ и $\pi F = \psi(\pi_0 f_0,\ \pi_1 f_1)$. Теперь из (32) легко следуют (25) и (26).

Далее будем отождествлять пространства $X^*_{\min}$, X_0^*, X_1^* с их образами в Z^*. Теперь можно образовать пространство $\psi(X_0^*,\ X_1^*)$ с нормой $\|\cdot\|_{\psi(X_0^*,\ X_1^*)}$. Заметим, что из леммы 10 немедленно следует, что $\psi(X_0^*,\ X_1^*) \subset X^*_{\min}$ и

$$\|F\|_{X^*} \leqslant 2\|F\|_{\psi(X_0^*,\ X_1^*)} \text{ при } F \in \psi(X_0^*,\ X_1^*) \tag{33}$$

Далее полагаем $E = X_0 \times X_1$, причем

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \text{ для } (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда естественным образом $E^* = X_0^* \times X_1^*$, причем

$$\|(f_0, f_1)\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{X_0^*}, \|f_1\|_{X_1^*}\} \text{ для } (f_0, f_1) \in E^*.$$

Через τ будем обозначать топологию $\sigma(E^*, Z \times Z)$ в E^*. Заметим, что топология τ хаусдорфова и $\tau \leqslant \sigma(E^*, E)$.

Лемма 11. *Пусть* $0 \leqslant F \in \psi(X_0^*, X_1^*)$. *Положим*

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : \psi(f_0, f_1) \geqslant F\}.$$

Множество H непусто, выпукло и τ-замкнуто в E^*.

Ясно, что лемма 11 есть следствие леммы 3.

Лемма 12. *Норма* $\|\cdot\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)}$ *универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.*

Доказательство. Пусть направление $0 \leqslant F_\alpha \in \psi(X_0^*, X_1^*)$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, $F_\alpha \uparrow$ и $\sup \|F_\alpha\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} = d < +\infty$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим

$$H_\alpha = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : \|f_i\|_{X_i^*} \leqslant 1 \quad (i = 0, 1), F_\alpha \leqslant (d + \varepsilon)\psi(f_0, f_1)\}.$$

В силу леммы 11 H_α τ-компактно. Так как система множеств $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, очевидно, центрирована, то ее пересечение непусто. Пусть $(f_0, f_1) \in \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} H_\alpha$. Тогда $F_\alpha \leqslant (d + \varepsilon)\psi(f_0, f_1)$ при $\alpha \in \mathrm{A}$. Поэтому существует $\sup F_\alpha = F \in \psi(X_0^*, X_1^*)$ и $F \leqslant (d + \varepsilon)\psi(f_0, f_1)$. Тем самым $\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} \leqslant d + \varepsilon$. Остается заметить, что $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Лемма 13. *Пусть* $0 \leqslant F \in \psi(X_0^*, X_1^*)$, $\|F\|_{\psi(X_0^*, X_1^*)} = 1$ *и пусть a — число, такое что* $0 < a < 1$. *Тогда существуют* $x_0, x_1 \in Z_+$, *такие что* $\|(x_0, x_1)\|_E = 1$ *и*

$$(f_0 \in (X_0)_+^*, f_1 \in (X_1)_+^*, \psi(f_0, f_1) \geqslant F) \Rightarrow (f_0(x_0) + f_1(x_1) \geqslant a). \quad (34)$$

Доказательство. Положим

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : \psi(f_0, f_1) \geqslant F\},$$

$$B_a = \{(f_0, f_1) \in E^* : \|(f_0, f_1)\|_{E^*} \leqslant a\}.$$

Так как $H \cap B_a = \varnothing$, H τ-замкнуто, B_a τ-компактно, то H и B_a отделимы τ-замкнутой гиперплоскостью. Поэтому существует $(y_0, y_1) \in Z \times Z$, такой что $\|y_0\|_{X_0} + \|y_1\|_{X_1} = 1$ и

$$\inf_{(f_0, f_1) \in H} \{f_0(y_0) + f_1(y_1)\} \geqslant \sup_{(f_0, f_1) \in B_a} \{f_0(y_0) + f_1(y_1)\} = a.$$

Остается положить $x_0 = |y_0|$, $x_1 = |y_1|$.

Лемма 14. *Пусть* $0 \leqslant F \in \psi(X_0^*, X_1^*)$. *Тогда существует последовательность* $0 \leqslant F_n \in \psi(X_0^*, X_1^*)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *такая что* $F_n \uparrow F$ *и каждый* F_n *допускает (единственное) положительное распространение на* $X_0 + X_1$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что, как нетрудно видеть, Z плотно в $X_0 + X_1$. В силу леммы 2 существуют $f_i \in (X_i)_+^*$ $(i = 0, 1)$, такие что $F = \psi(f_0, f_1)$. Так как мы условились считать, что $X_i^\bullet \subset Z^\bullet$, то существует $f_0 \wedge f_1 = g \in Z^\bullet$. Ясно, что g допускает положительное распространение на $X_0 + X_1$ и потому $g \in \psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)$. Остается положить $F_n = F \wedge ng$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 15. *Для любого $F \in \psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)$ справедливо*

$$\|F\|_{\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)} \leqslant \|F\|_{X^\bullet}. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $F \geqslant 0$. В силу лемм 12 и 14 можно считать, что F допускает положительное распространение на $X_0 + X_1$. Можно считать также, что $\|F\|_{\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)} = 1$. Фиксируем произвольное число a, такое что $0 < a < 1$. Пусть x_0, x_1 из леммы 13. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $u = x_0 + \varepsilon x_1$, $v = x_1 + \varepsilon x_0$. Положим $w = M_+'(M^{-1}(uv^{-1}))$, $p = w^{-t}$, $q = N(w)w^{-t}$. В силу леммы 1 имеем $\psi(p, q) = e_u$, $\varphi(u, v) = pu + qv$. Положим $r = \dfrac{1}{\psi(1, 1)}(1 - e_u)$. Наконец, для $x \in X_0 + X_1$ полагаем

$$f_0(x) = F(px) + F(rx), \quad f_1(x) = F(qx) + F(rx).$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что $\psi(f_0, f_1) = F$. Тогда имеем $f_0(x_0) + f_1(x_1) \geqslant a$, откуда $f_0(u) + f_1(v) \geqslant a$, т. е. $F(pu + qv) \geqslant a$. Тем самым $F(\varphi(u, v)) \geqslant a$. Но очевидно $\|\varphi(u, v)\|_X \leqslant 1 + \varepsilon\theta$, где $\theta = \max\{\|x_1\|_{X_0}, \|x_0\|_{X_1}\}$, откуда

$$\|F\|_{X^\bullet} \geqslant \frac{a}{1 + \varepsilon\theta}. \tag{36}$$

В силу произвольности $a \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ из (36) следует, что $\|F\|_{X^\bullet} \geqslant 1$.

Лемма 16. *$\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)$ есть компонента в $X^\bullet_{\min}$ и*

$$\|F\|_{\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)} \leqslant \|F\|_{X^\bullet} \leqslant 2\|F\|_{\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)} \text{ при } F \in \psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet). \tag{37}$$

Доказательство. Неравенства (37) уже доказаны, см. (33) и (35). Остается применить леммы 5 и 12.

Лемма 17. *Пусть $f_i \in (X_i)_+^\bullet$ $(i = 0, 1)$, $z \in Z_+$, число $a > 0$. Пусть*

$$(u_i \in (X_i)_+ \ (i = 0, 1), \ \varphi(u_0, u_1) \geqslant z) \Rightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geqslant a).$$

Тогда $(\psi(f_0, f_1))(z) \geqslant a$.

Ясно, что лемма 17 есть следствие леммы 4.

Лемма 18. $\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet) = X^\bullet_{\min}$.

Доказательство. Пусть $0 < F \in X^\bullet_{\min}$, причем F дизъюнктен $\psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)$. В силу леммы 7 найдется направление $z_\alpha \in Z_+$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, такое что $f(z_\alpha) \to 0$ для любого $f \in \psi(X_0^\bullet, X_1^\bullet)$ и $F(z_\alpha) \geqslant 1$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Пусть T есть выпуклая оболочка множества $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Ясно, что

$$\inf\{\|z\|_X : z \in T\} = a > 0. \tag{38}$$

Положим $D = \{(u_0, u_1) \in E_+$: существует $z \in T$, такое что $\varphi(u_0, u_1) \geqslant z\}$. Ясно, что D непусто, выпукло и $\|(u_0, u_1)\|_E \geqslant a$ для всех $(u_0, u_1) \in D$. Тогда существует $(f_0, f_1) \in E_+^\bullet$ и число $\gamma > 0$, такие что $f_0(u_0) + f_1(u_1) \geqslant \gamma$ для всех $(u_0, u_1) \in D$. Тогда в силу леммы 17 имеем $(\psi(f_0, f_1))(z_\alpha) \geqslant \gamma$ при всех $\alpha \in A$, что невозможно, ибо $\psi(f_0, f_1) \in \psi(X_0^*, X_1^*)$.

Для завершения доказательства теоремы 1 теперь осталось только установить справедливость следующей леммы.

Лемма 19. *Пусть M и N удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда Z плотно по норме в X.*

Доказательство. Пусть $x \in X_+$. В силу леммы 2 существуют $x_0 \in (X_0)_+$, $x_1 \in (X_1)_+$, такие что $\varphi(x_0, x_1) = x$. В силу леммы 6 для $i = 0, 1$ существуют последовательности $z_n^{(i)} \in Z_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$, такие что $z_n^{(i)} \uparrow x_i$, $(z_{n+1}^{(i)} - z_n^{(i)}) \wedge z_n^{(i)} = 0$ и $\|x_i - z_n^{(i)}\|_{X_i} \to 0$. Так как $\varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) \in Z$, то осталось только показать, что $\|x - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)})\|_X \to 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть натуральное число m таково, что $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 2^m\varepsilon$ $(i = 0, 1)$. Пусть натуральное число n_0 таково, что $(b/2)^m \|x_i - z_n^{(i)}\|_{X_i} \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ $(i = 0, 1)$, где число b из леммы 9. Так как $x - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) = \varphi(x_0, x_1) - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) = \varphi(x_0, x_1) - \varphi(z_n^{(0)}, x_1) + \varphi(z_n^{(0)}, x_1) - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)}) = \varphi(x_0 - z_n^{(0)}, x_1) + \varphi(z_n^{(0)}, x_1 - z_n^{(1)}) \leqslant \varphi((b/2)^m (x_0 - z_n^{(0)}), x_1/2^m) + \varphi(z_n^{(0)}/2^m, (b/2)^m (x_1 - z_n^{(1)}))$, то при всех $n \geqslant n_0$ имеем $\|x - \varphi(z_n^{(0)}, z_n^{(1)})\|_X \leqslant 2\varepsilon$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Докажем сначала утверждение а). Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, W, 1, L, J, X_0, X_1 фиксированы. Положим $\psi = \hat{\varphi}$. Нужно доказать, что

$$(\varphi(X_0, X_1))' = \psi(X_0', X_1') \tag{39}$$

и

$$\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')}. \tag{40}$$

Обозначим через Y_i замыкание $X_0 \cap X_1$ в X_i, причем пусть $\|\cdot\|_{Y_i} = \|\cdot\|_{X_i}|_{Y_i}$ $(i = 0, 1)$. Так как $Y_0 \cap Y_1$ плотно в Y_i $(i = 0, 1)$, то в силу теоремы 1 имеем

$$(\varphi(Y_0, Y_1))' = \psi(Y_0', Y_1') \tag{41}$$

и

$$\|\cdot\|_{\psi(Y_0', Y_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(Y_0, Y_1))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\psi(Y_0', Y_1')}. \tag{42}$$

Но $(Y_i', \|\cdot\|_{Y_i'}) = (X_i', \|\cdot\|_{X_i'})$ $(i = 0, 1)$ в силу леммы 8. Так как очевидно $\psi(X_0', X_1') \subset (\varphi(X_0, X_1))'$ и $\varphi(Y_0, Y_1) \subset \varphi(X_0, X_1)$, то $(\varphi(Y_0, Y_1))' \supset (\varphi(X_0, X_1))' \supset \psi(X_0', X_1') = \psi(Y_0', Y_1') = (\varphi(Y_0, Y_1))'$, откуда следует (39). Так как очевидно $\|y\|_{\varphi(Y_0, Y_1)} \geqslant \|y\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ при $y \in \varphi(Y_0, Y_1)$, то $\|\cdot\|_{(\varphi(Y_0, Y_1))'} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'}$, откуда $\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')} \leqslant \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'}$ в силу левого неравенства из (42).

Таким образом левое неравенство из (40) доказано. Докажем правое. Пусть $0 \leqslant w' \in \psi(X_0', X_1')$, $\|w'\|_{\psi(X_0', X_1')} = \lambda$. Пусть $u_i' \in (X_i')_+$ $(i = 0, 1)$ таковы, что $\|u_i'\|_{X_i'} \leqslant 1$, $w' \leqslant (\lambda + \varepsilon)\psi(u_0', u_1')$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Возьмем теперь произвольный $w \in \varphi(X_0, X_1)$, такой что $w \geqslant 0$, $\|w\|_{\varphi(X_0, X_1)} \leqslant 1$. Найдутся $u_i \in (X_i)_+$ $(i = 0, 1)$, такие что $\|u_i\|_{X_i} \leqslant 1$, $w \leqslant (1 + \varepsilon) \times$

$\times\varphi(u_0, u_1)$. Тогда $J(ww') \leqslant (\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)J(\psi(u_0', u_1')\varphi(u_0, u_1)) \leqslant$ $\leqslant (\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)J(u_0'u_0+u_1'u_1) \leqslant 2(\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)$. В силу произвольности ε и w отсюда получаем $\|w'\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leqslant 2\lambda$.

Докажем теперь утверждение b). До конца этого раздела фиксируем произвольную слабо согласованную пару (φ_1, φ_2), где $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$.

Лемма 20. *Существуют числа* $c_1, c_2 > 0$, *такие что* $c_1\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0', X_1')} \leqslant$ $\leqslant \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0, X_1))'} \leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0', X_1')}$ *для любых* W, 1, L, J, X_0, X_1.

Несложное доказательство этой леммы, основанное на использовании нормированных произведений (см. [9], гл. II, § 2) мы опускаем.

Применив лемму 20 к тому случаю, когда W есть вещественная прямая, получим

$$c_1 \leqslant \varphi_1(a, b)\varphi_2(a^{-1}, b^{-1}) \leqslant c_2 \text{ при всех } a, b > 0 \tag{43}$$

Лемма 21. *Пусть числовые последовательности* $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\xi_n \geqslant$ $\geqslant 0, \eta_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *таковы, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n a_n^{-1} \leqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n b_n^{-1} \leqslant 1. \quad \textit{Тогда} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n, \eta_n)/\varphi_1(a_n, b_n) \leqslant c_2/c_1,$$

где числа c_1 и c_2 *из леммы* 20.

Доказательство. Примем за W K-пространство всех последовательностей вещественных чисел. Пусть X_0 есть множество всех $z = \{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ таких что

$$\|z\|_{X_0} = \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|a_n^{-1} < +\infty,$$

и пусть X_1 есть множество всех $z = \{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$, таких что

$$\|z\|_{X_1} = \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|b_n^{-1} < +\infty.$$

Положим $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что $\varphi_1(x, y) \in \varphi_1(X_0, X_1)$ и $\|\varphi_1(x, y)\|_{\varphi_1(X_0, X_1)} \leqslant 1$. Несложные вычисления показывают, что $\varphi_2(a^{-1}, b^{-1}) \in \varphi_2(X_0', X_1')$ и $\|\varphi_2(a^{-1}, b^{-1})\|_{\varphi_2(X_0', X_1')} \leqslant 1$. Тогда $\|\varphi_2(a^{-1}, b^{-1})\|_{(\varphi_1(X_0, X_1))'} \leqslant c_2$ в силу леммы 20. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n, \eta_n)\varphi_2(a_n^{-1}, b_n^{-1}) \leqslant c_2.$$

Применив теперь (43), получим $1/\varphi_1(a_n, b_n) \leqslant \varphi_2(a_n^{-1}, b_n^{-1})/c_1$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n, \eta_n)/\varphi_1(a_n, b_n) \leqslant c_2/c_1.$$

Лемма 22. *Для любых чисел λ, α, $\beta > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{\varphi_1(\lambda\alpha, \lambda\beta)}{\lambda\varphi_1(\alpha, \beta)} \leqslant K,$$

где $K = c_2 / c_1$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha, \beta > 0$ и рассмотрим функцию

$$\theta(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda\alpha, \lambda\beta)}{\lambda\varphi_1(\alpha, \beta)} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

Из вогнутости функции φ_1 следует, что θ убывает на $(0, +\infty)$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{\varphi_1(n^{-1}\alpha, n^{-1}\beta)}{n^{-1}\varphi_1(\alpha, \beta)} \leqslant K \tag{44}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Применим лемму 21, положив $a_k = \alpha$, $b_k = \beta$, $\xi_k = n^{-1}\alpha$, $\eta_k = n^{-1}\beta$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ и $a_k = b_k = 1$, $\xi_k = \eta_k = 0$ при $k = n+1, n+2, \ldots$. Получим (44). Положим теперь для $\xi, \eta \geqslant 0$

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 \text{ при } \xi = \eta = 0 \\ (\xi + \eta)\varphi_1\left(\dfrac{\xi}{\xi+\eta}, \dfrac{\eta}{\xi+\eta}\right) \text{ при } \xi + \eta > 0. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, причем из леммы 22 следует, что $K^{-1}\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant K\varphi_1$. Тем самым φ и φ_1 эквивалентны. Теперь нетрудно показать, что $\hat{\varphi}$ и φ_2 эквивалентны, это завершает доказательство теоремы 2.

6. Доказательство теоремы 3 и пример

Напомним следующий хорошо известный факт. Пусть R банахово KN-пространство с тотальным $\bar{R}$ и с универсально монотонно полной нормой. Тогда $\|\cdot\|_R$ эквивалентна монотонной норме, являющейся одновременно универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной. Отсюда следует, что а) есть следствие б). Итак, достаточно доказать утверждение б). Положим $\psi = \hat{\varphi}$. Заметим, что $(X_i)'' = X_i$ и $\|\cdot\|_{X_i''} = \|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0, 1)$ (см. ([1]), лемма 19), поэтому ясно, что можно поменять местами X_i с X_i' и φ с ψ, т. е. достаточно доказать следующие два утверждения.

B_1) Норма $\|\cdot\|_{\psi(X_0', X_1')}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

B_2) Пусть $x' \in \psi(X_0', X_1')_+$, $\|x'\|_{\psi(X_0', X_1')} = \lambda$. Тогда существуют $x_i' \in (X_i')_+$ с $\|x_i'\|_{X_i'} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$, такие что

$$x' \leqslant \lambda\psi(x_0', x_1'). \tag{45}$$

В силу леммы 8 можно считать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1. Тогда B_1) прямо следует из леммы 12.

Доказываем утверждение B_2). Как и ранее полагаем $E = X_0 \times X_1$, причем

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \text{ для } (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда $E^* = X_0^* \times X_1^*$, причем

$$\|(f_0, f_1)\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{X_0^*}, \|f_1\|_{X_1^*}\} \text{ для } (f_0, f_1) \in E^*.$$

Положим

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : \psi(f_0, f_1) \geqslant F_{x'}\},$$

где $F_{x'}$ есть образ x' при естественном вложении $\psi(X_0', X_1') = (\varphi(X_0, X_1))'$ в $(\varphi(X_0, X_1))^*$. В силу леммы 11 множество H непусто, выпукло и $\sigma(E^*, E)$ — замкнуто. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдем $(f_0^{(n)}, f_1^{(n)}) \in H$, такой что $\|f_i^{(n)}\|_{X_i^*} \leqslant \lambda + n^{-1}$ $(i = 0, 1)$. Пусть (f_0, f_1) есть обобщенная предельная точка последовательности $\{(f_0^{(n)}, f_1^{(n)})\}_{n=1}^\infty$ в топологии $\sigma(E^*, E)$. Тогда $(f_0, f_1) \in H$. Положим $f_i' = \mathrm{Pr}_{\overline{X}_i} f_i$ и пусть $u_i' \in X_i'$ есть прообраз f_i' при естественном вложении X_i' в X_i^* $(i = 0, 1)$. Остается положить $x_i' = \lambda^{-1} u_i'$ $(i = 0, 1)$. Теорема 3 доказана.

В заключение приведем пример, показывающий, что *из универсальной полунепрерывности норм* $\|\cdot\|_{X_0}$, $\|\cdot\|_{X_1}$ *не следует, что норма* $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ *полунепрерывна.*

Пример. Зафиксируем какую-нибудь N-функцию $M(\xi)$, удовлетворяющую следующим двум условиям.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} M(2^n)/M(2^{n+1}) = 0$;

б) $M((1 + m^{-1})2^n) / M(2^{n+1}) \geqslant 1/m$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$.

Существование такой N-функции не вызывает сомнений. Теперь функцию $\varphi(\xi, \eta)$ зададим по формуле (4). За W примем K-пространство всех последовательностей вещественных чисел. За X_0 примем пространство всех $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in W$, таких что

$$\|x\|_{X_0} = \sup_n |\xi_n|/M(2^{n+1}) < +\infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n/M(2^{n+1}) = 0.$$

За X_1 примем обычное пространство l^∞ всех ограниченных последовательностей вещественных чисел с равномерной нормой. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ произвольный элемент W. Ясно *), что $x \in \varphi(X_0, X_1)$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\lambda > 0$ справедливо $\{M(|\xi_n| / \lambda)\}_{n=1}^\infty \in X_0$ и, если это условие выполнено, то

$$\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)} = \inf\{\lambda > 0 : \|\{M(|\xi_n| / \lambda)\}_{n=1}^\infty\|_{X_0} \leqslant 1\}.$$

Пусть $u = \{2^n\}_{n=1}^\infty$. Докажем, что $u \in \varphi(X_0, X_1)$ и $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} = 1$. Ясно, что $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} \leqslant 1$. Допустим, что $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} \neq 1$. Тогда существует натуральное число m, такое что $\|u\|_{\varphi(X_0, X_1)} < \dfrac{m}{m+1}$. Следовательно

$$\{M((1 + m^{-1})2^n)\}_{n=1}^\infty \in X_0, \text{ откуда } \lim_{n\to\infty} \frac{M((1 + m^{-1})2^n)}{M(2^{n+1})} = 0,$$

*) См. также раздел 7.

что невозможно. Итак, $\|u\|_{\varphi(X_0,\,X_1)}=1$. Положим $u^{(n)}=(2,2^2,\dots$ $\dots,2^n,0,0,\dots)$. Ясно, что $0\leqslant u^{(n)}\uparrow u$, причем $\|u^{(n)}\|_{\varphi(X_0,\,X_1)}\leqslant 0{,}5$ при всех n. Тем самым норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,\,X_1)}$ не является полунепрерывной. Остается заметить, что нормы $\|\cdot\|_{X_0}$, $\|\cdot\|_{X_1}$ очевидно, универсально полунепрерывны.

7. Некоторые частные случаи основной конструкции

Пусть $M(\xi)$ и $N(\eta)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций, $\varphi(\xi,\eta)$ и $\hat{\varphi}(\xi,\eta)$ вычислены по формулам (4) и (5). Пусть W, 1, L, J имеют тот же смысл что и в разделе 2, причем на W_1 рассматриваем обычную норму KN-пространства ограниченных элементов. Наконец, пусть X есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Определение 6. Полагаем

$$X_M=\{x\in W: M(|x|/\lambda)\in X \textit{ для некоторого числа } \lambda>0\}$$

и для $x\in X_M$

$$\|x\|_{X_M}=\inf\{\lambda>0: M(|x|/\lambda)\in X,\quad \|M(|x|/\lambda)\|_X\leqslant 1\}.$$

Определение 7. Через X^N обозначаем множество всех $x\in W$, таких что $J(yN(\lambda^{-1}xy^{-1}))\leqslant 1$ для некоторого числа $\lambda>0$ и некоторого $y\in X_+$ с $\|y\|_X\leqslant 1$ и $e_x\leqslant e_y$. Через $\|x\|_{X^N}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в этом неравенстве.

Предложение 3. *Справедливы равенства*

$$X_M=\varphi(X,W_1),\quad X^N=\hat{\varphi}(X,L)$$

по запасу элементов и по норме.

Несложное доказательство предложения 3 опускаем. Теперь из теоремы 2 прямо вытекает следующее предложение.

Предложение 4. *Справедливы равенства*

$$(X_M)'=(X')^N,\quad (X^N)'=(X')_M$$

по запасу элементов, причем

$$\|\cdot\|_{(X')^N}\leqslant\|\cdot\|_{(X_M)'}\leqslant 2\|\cdot\|_{(X')^N},$$

$$\|\cdot\|_{(X')_M}\leqslant\|\cdot\|_{(X^N)'}\leqslant 2\|\cdot\|_{(X')_M}.$$

Замечание. В частности, если взять $X=L$, то $X_M=L_M$ есть обычное пространство Орлича, а $\|\cdot\|_{X_M}$ совпадает с нормой Люксембурга в нем (см. ([5]), стр. 95). Таким образом пространство Орлича $L_M=\varphi(L,W_1)$.

Поступила в редакцию
28 сентября 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах, Сиб. матем. ж., X, № 3 (1969), 584—599.

[2] Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах II, Сиб. матем. ж., XII, № 3 (1971), 582—587.

[3] Лозановский Г. Я., О некоторых банаховых структурах III, Сиб. матем. ж., XIII, № 6 (1972), 1304—1313.

[4] Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia math., 24, № 2 (1964), 113—190.

[5] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958.

[6] Лозановский Г. Я., О банаховых структурах и вогнутых функциях, Докл. АН СССР, 199, № 3 (1971), 536—539.

[7] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

[8] Вулих Б. З., Лозановский Г. Я., О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах. Матем. Сб., 84 (126), № 3 (1971), 331—352.

[9] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, ИЛ, М., 1961.

VIII

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 4
ВЫПУСК 1
1968

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 4, № 1 (1968), 41—44

УДК 513.88

О ПРОЕКТОРАХ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ

Г. Я. Лозановский

Приводится обобщение известного результата Филипса о несуществовании проектора из m на c_0. Из полученных результатов вытекает, например, следующее. Если пространство Орлича $\overset{*}{L}_M \neq E_M$, то не существует проектора из $\overset{*}{L}_M$ на E_M и E_M не изоморфно никакому сопряженному банахову пространству. Библ. 7 назв.

Хорошо известный результат Филипса о несуществовании проектора из пространства m на его подпространство c_0 (см. [1], стр. 540) обобщался в различных направлениях (см., например, [2]). В этой заметке предлагается еще одно обобщение теоремы Филипса, из которого. например, следует несуществование проектора из пространства Орлича $\overset{*}{L}_M$ на его подпространство E_M в случае, когда $\overset{*}{L}_M \neq E_M$ (определение пространств $\overset{*}{L}_M$ и E_M см. в [3], стр. 85, 86, 98). Из нашей теоремы также следует, что не существует проектора из пространства $M(\alpha)$ на его подпространство $M_0(\alpha)$ (определение пространств $M(\alpha)$ и $M_0(\alpha)$ см., например, в [4], стр. 37, и [5], стр. 1038—1041).

1. **Терминология и обозначения.** Если E — банахово пространство, а F — его замкнутое подпространство, то под *проектором* из E на F, как обычно, понимается линейный непрерывный оператор $P: E \to F$ такой, что $Px = x$ для любого $x \in F$. Через m обозначается обычное пространство всех вещественных ограниченных числовых последовательностей с равномерной нормой. Подпространство в m, состоящее из всех сходящихся (всех сходящихся к 0) последовательностей, обозначается через c (через c_0). В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы следуем монографии [6].

Все верно

В частности *KB-линеалом* называется K-линеал (линейная структура) с монотонной банаховой нормой. Под *(b)-полным KN-пространством* понимается KB-линеал, который условно полон как структура. Линейное подмножество Y K-линеала X называется *нормальным* в X, если из того, что $x \in X$, $y \in Y$ и $|x| \leqslant |y|$, следует, что $x \in Y$. Линейное подмножество Y K-линеала X называется *компонентой* в X, если $Y^{dd} = Y$, где для любого $Z \subset X$ дизъюнктное дополнение $Z^d = \{x \in X : |x| \wedge |z| = 0$ для любого $z \in Z\}$. Наконец, говорят, что в KB-линеале X выполнено условие (A), если из того, что последовательность $x_n \downarrow 0$, следует, что $\|x_n\|_X \to 0$.

2. Основной результат. ТЕОРЕМА. *Пусть X есть (b)-полное KN-пространство, Y — его нормальное замкнутое по норме подпространство, удовлетворяющее условию (A). Если Y не является компонентой в X, то не существует проектора из X на Y.*

Доказательство. Обозначим через X_1 компоненту в X, порожденную Y, через X_2 — максимальное расширение X_1. Зафиксируем в X_2 единицу и обозначим через E множество всех ненулевых единичных элементов в X_2.

Зафиксируем произвольный элемент $z \in X_1$ такой, что $z \in Y$, $z > 0$. Положим $E_1 = \{e \in E:\ ze \in Y\}$. Хорошо известно, что E_1 полно в X_2, т. е. если $x \in X_2$ дизъюнктен всем элементам множества E_1, то $x = 0$.

ЛЕММА 1. *Существуют такое число $R > 0$ и такая последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ элементов множества E_1, что:*

1) $e_i \wedge e_j = 0$ *при* $i \neq j$;
2) $\|ze_i\|_Y \geqslant R$ *при* $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Обозначим через E_2 максимальное подмножество в E_1, состоящее из попарно дизъюнктных элементов. Так как, очевидно, $z = \sup\{ze : e \in E_2\}$, то множество E_2 не является конечным. Если E_2 несчетно, то справедливость леммы вытекает из того, что несчетное множество положительных чисел содержит счетное подмножество, инфимум которого положителен. Пусть теперь E_2 счетно, $E_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $B_n = \lim\limits_{m\to\infty} \left\|\sum_{k=n}^{m} zu_k\right\|_Y$. Тогда $B_1 \geqslant B_2 \geqslant \ldots \geqslant B_n \geqslant \ldots$ Положим также $R = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

Легко проверяется, что $R > 0$. После этого нетрудно найти такую последовательность $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ натуральных чисел, что при всех $i = 1, 2, \ldots$ будет $\left\|\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} zu_k\right\|_Y \geqslant R$. Остается положить

$$e_i = \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} u_k,\ i = 1, 2, \ldots$$

Лемма 1 доказана.

Возьмем произвольный $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in m$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k ze_k$, очевидно, (0)-сходится в X. Обозначим через $S\lambda$ его сумму. Без труда проверяется, что

$$R\|\lambda\|_m \leqslant \|S\lambda\|_X \leqslant \|z\|_X \|\lambda\|_m.$$

Поэтому $V = \{S\lambda: \lambda \in m\}$ есть замкнутое подпространство в X и S есть алгебраический и топологический изоморфизм m на V. Обозначим через T ограничение отображения S на c_0 и положим $W = \{T\lambda:\ \lambda \in c_0\}$. Тогда W есть замкнутое подпространство в Y, а T есть алгебраический и топологический изоморфизм c_0 на W.

ЛЕММА 2. *Существует проектор Q из Y на W.*

Доказательство. Нетрудно построить последовательность функционалов $f_n \in Y^*$, $n = 1, 2, \ldots$, обладающую следующими свойствами:

1) $f_n \geqslant 0$;
2) $\|f_n\|_{Y^*} \leqslant 1/R$;
3) $f_n(ze_n) = 1,\ n = 1, 2, \ldots$;
4) если $y \in Y$ и $|y| \wedge ze_{n_0} = 0$ при некотором n_0, то $f_{n_0}(y) = 0$.

Убедимся теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = 0$ для любого $y \in Y$. Для этого положим $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} e_k|y|$. Ясно, что $0 \leqslant r_n \leqslant |y|$ и $r_n \downarrow 0$ в Y. В силу условия (A) имеем $\|r_n\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Остается заметить, что

$$|f_n(y)| \leqslant f_n(|y|) = f_n(e_n|y|) \leqslant f_n(r_n) \leqslant$$
$$\leqslant \|f_n\|_{Y^*} \|r_n\|_Y \leqslant \frac{1}{R}\|r_n\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь для $y \in Y$ положим $Qy = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) ze_k$. Написанный ряд сходится по норме. Так как $f_k(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, то $Qy \in W$. Теперь уже нетрудно проверить, что Q есть проектор из Y на W. Лемма 2 доказана.

Продолжаем доказательство теоремы. Допустим, что существует проектор P из X на Y. Тогда оператор $H = T^{-1}QPS$ есть проектор из m на c_0, что противоречит вышеупомянутому результату Филипса. Теорема доказана.

Замечание. Несложные примеры показывают, что условная полнота X и выполнение условия (A) в Y существенны для справедливости теоремы.

Следствие. *Пусть X есть (b)-полное KN-пространство, удовлетворяющее условию (A), но в котором не выполнено условие (B)* (см. [6], стр. 207), *т. е. в X существует такая последовательность $x_n \geqslant 0$, что $x_n \uparrow +\infty$ и $\sup \|x_n\| < +\infty$. Тогда X не изоморфно никакому сопряженному банахову пространству.*

Доказательство. Считаем, что X естественным образом вложено в X^{**}. Если X изоморфно сопряженному банахову пространству, то существует проектор из X^{**} на X (см. [7], стр. 276). Остается заметить, что X есть нормальное подпространство в X^{**} (см. [6], стр. 293), но не является компонентой (см. [6], стр. 293, 294).

Пример. Не существует проектора из пространства Орлича $\overset{*}{L}_M$ на E_M, если $\overset{*}{L}_M \neq E_M$. Не существует проектора из $M(\alpha)$ на $M_0(\alpha)$. Пространство $M_0(\alpha)$ и пространство E_M (если $\overset{*}{L}_M \neq E_M$) не изоморфны никаким сопряженным банаховым пространствам.

Поступило
21.XI.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Philips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 516—541.

[2] Pełczynski A., Sudakov V. N., Remark on noncomplemented subspaces of the space $m(S)$, Coll. Math., 9 (1962), 85—88.

[3] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.

[4] Lorentz G. G., Some new functional spaces, Ann. of Math., 51 (1950), 37—55.

[5] Семенов Е. М., Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством, Докл. АН СССР, 148 (1963), 1038—1041.

[6] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.

[7] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, М., 1959.

СОДЕРЖАНИЕ

Докторские диссертации

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МАТЕМАТИКА № 1 (92)

УДК 519.55

Г. Я. Лозановский

О БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ С ЕДИНИЦЕЙ

В работе, в основном, используются терминология и обозначения, принятые в [1]. Напомним следующее. Под *K-линеалом* понимается линейная структура. *K-пространством* (*K_σ-пространством*) называется условно полная (условно σ-полная) линейная структура. Говорят, что K-линеал X есть K-линеал *счетного типа*, если всякое ограниченное подмножество попарно дизъюнктных его элементов, отличных от 0, не более чем счетно. Положительный элемент e K-линеала X называется *единицей*, если $x \wedge e > 0$ для любого $x > 0$ $(x \in X)$. *Нормальным подлинеалом* K-линеала X называется всякое его линейное подмножество X_1, удовлетворяющее следующему условию: если $x \in X_1$, $y \in X$ и $|y| \leqslant |x|$, то и $y \in X_1$. Нормальные подлинеалы K_σ-пространства называются *нормальными подпространствами*. *KN-линеалом* называется K-линеал X, являющийся одновременно нормированным пространством, в котором норма монотонна, т. е. из $|x| \leqslant |y|$ $(x, y \in X)$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$. Под *KB-линеалом* понимается полный по норме KN-линеал. Под *$K_\sigma N$-пространством* (*KN-пространством*) понимается KN-линеал, являющийся K_σ-пространством (K-пространством). Наконец, *KB-пространством* называется такое $K_\sigma N$-пространство X, в котором норма удовлетворяет следующим двум дополнительным условиям:

(А) если $x_n \downarrow 0$, т. е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$ и $\inf\{x_n\} = 0$, то $\|x_n\| \to 0$;

(Б) если $0 \leqslant x_n \uparrow$ и $\lim\|x_n\| < \infty$, то существует $\sup\{x_n\} \in X$.

Напомним, что KB-пространство полно по норме.

Пространство, сопряженное к нормированному пространству E, будет обозначаться через E^*. Термин *„рефлексивность“* будет использоваться только в смысле теории нормированных пространств, а не пространств полуупорядоченных. Мы сначала сформулируем основные результаты работы (теоремы 1, 2 и 3), после чего приведем их доказательства.

Теорема 1. *Для произвольного полного по норме $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в пространстве X^* есть единица;*

(2) *в X выполнено условие* (А) *и имеется существенно положительный функционал $f \in X^*$, т. е. такой, что $f(x) > 0$ для любого $x > 0$ $(x \in X)$.*

Замечание. Нетрудно привести пример такого KB-линеала X, не являющегося $K_\sigma N$-пространством, что в X^* есть единица, но в X условие (А) не выполнено. Таким будет, например, пространство c всех вещественных числовых последовательностей с естественными нормой, упорядочением и линеаризацией.

Теорема 2. *Для произвольного полного по норме $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в пространстве X^* есть единица и X^* счетного типа;*

(2) *в X есть единица и выполнено условие* (А).

Теорема 3. *Для произвольного KB-линеала X, имеющего единицу, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *X рефлексивно;*

(2) *X^{**} и X^{***} суть пространства с единицами;*

(3) *X^{***} есть пространство счетного типа с единицей;*

(4) *X есть KB-пространство, а в X^{**} есть единица.*

Замечание. Нетрудно показать следующее. Если в KB-линеале X каждая главная компонента является рефлексивным банаховым пространством, то и само X рефлексивно. Из сказанного вытекает, например, что произвольный KB-линеал X рефлексивен тогда и только тогда, когда для любой его главной компоненты Y оба пространства Y^{**} и Y^{***} суть пространства с единицами.

Заметим также, что в работе автора [4] имеется несколько критериев рефлексивности другого типа, но близких по форме к приведенным.

Теперь мы приведем несколько лемм, которые нам будут нужны при доказательстве сформулированных теорем.

Лемма 1. *Пусть X есть KN-линеал, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность его элементов, удовлетворяющая условиям: 1) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$; 2) $x_n > 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$; 3) $\inf \|x_n\| > 0$.*

Тогда найдется такой $f > 0$ ($f \in X^*$), что $f(x) = 0$ для любого $x \in X$ такого, что $|x| \wedge x_n = 0$ при некотором n.

Доказательство. Для каждого натурального n_0 нетрудно построить функционал $f_{n_0} > 0$ ($f_{n_0} \in X^*$), удовлетворяющий условиям: 1) $\|f_{n_0}\| = 1$, $f_{n_0}(x_{n_0}) = \|x_{n_0}\|$; 2) если $x \in X$ и $|x| \wedge x_{n_0} = 0$, то $f_{n_0}(x) = 0$. Действительно, найдется такой $\varphi_{n_0} > 0$ ($\varphi_{n_0} \in X^*$), что $\varphi_{n_0}(x_{n_0}) = \|x_{n_0}\|$ и $\|\varphi_{n_0}\| = 1$ ([1], с. 278, теорема IX, 4.2). Для любого $x \in X$ положим

$$f_{n_0}(x) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_{n_0}(x_+ \wedge kx_{n_0}) - \lim_{k \to +\infty} \varphi_{n_0}(x_- \wedge kx_{n_0}).$$

Ясно, что функционал f_{n_0} требуемый.

Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как единичный шар пространства X^* бикомпактен в слабой* топологии, то ([2], с. 41) указанная последовательность имеет в этой топологии обобщенную предельную точку f. Легко видеть, что этот функционал f является искомым.

Лемма 2. *Пусть X есть KN-линеал, и $a > 0$ ($a \in X$). Обозначим через X_a наименьший замкнутый по норме нормальный подлинеал в X, содержащий элемент a.*

Тогда для любого $x \geqslant 0$ ($x \in X_a$) справедливо $\|x - (x \wedge na)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Доказательство. Пусть $x \geqslant 0$ ($x \in X_a$), $y \geqslant 0$ ($y \in X_a$), причем при некотором n справедливо неравенство $y \leqslant na$. Тогда очевидно, что $x - (x \wedge na) \leqslant |x - y|$, и, следовательно, $\|x - (x \wedge na)\| \leqslant \|x - y\|$. Из этого замечания и вытекает справедливость леммы 2.

Лемма 3. *Пусть X есть KN-линеал, Y — его нормальный подлинеал, причем на Y мы рассматриваем норму, индуцированную из X. Если в пространстве X^* есть единица, то Y^* тоже есть пространство с единицей.*

Доказательство. Если $f \in X^*$, то через f_0 будем обозначать сужение f на Y. Пусть F есть единица в X^*. Убедимся, что тогда F_0 есть единица в Y^*. Для этого возьмем произвольный $\varphi > 0$ ($\varphi \in Y^*$) и покажем, что $F_0 \wedge \varphi > 0$. Найдется такое $f > 0$ ($f \in X^*$), что $f_0 = \varphi$, и такой $y > 0$ ($y \in Y$), что $f_0(y) = \varphi(y) > 0$. Так как F есть единица в X^*, то $(f \wedge nF) \uparrow f$ при $n \to \infty$. Следовательно, $(f \wedge nF)(y) \uparrow f(y)$ при $n \to \infty$. Поэтому найдется такое натуральное n_0, что $(f \wedge \wedge n_0 F)(y) > 0$. Так как $(f \wedge n_0 F) \leqslant n_0(f \wedge F)$, то $(f \wedge F)(y) > 0$. Но $(f \wedge F)(y) = (f_0 \wedge F_0)(y) = (\varphi \wedge F_0)(y)$. Следовательно, $\varphi \wedge F_0 > 0$.

Доказательство теоремы 1. Справедливость импликации (2) $\Longrightarrow$ (1) прямо следует из теорем IX.4.3, IX.2.2, леммы IX.2.1, теоремы VIII.4.4 монографии [1]. Доказываем, что (1) $\Longrightarrow$ (2). Допустим, что в X не выполнено условие (A). Тогда ([3], теорема 1) найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из X, удовлетворяющая условиям: 1) $x_n > 0$, $\|x_n\| > 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$; 2) $x_m \wedge x_n = 0$ при всех $m \neq n$; 3) существует $z = \sup x_n \in X$.

Обозначим через Y наименьшее замкнутое по норме нормальное подпространство в X, содержащее z. На Y рассматриваем норму, индуцированную из X. Обозначим через F единицу пространства Y^*, существование которой вытекает из леммы 3. Отметим также утверждение, которое следует из леммы 2: если $f > 0$ ($f \in Y^*$), то $f(z) > 0$.

Обозначим через N множество всех натуральных чисел, а через J_∞ — множество всех последовательностей, состоящих из чисел 0 и 1. Таким образом, если $j \in J_\infty$, то $j = (j_1, j_2, \ldots)$, где каждое j_k есть 0 или 1. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ через J_k обозначим множество всех упорядоченных наборов $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, где каждое j_n ($1 \leqslant n \leqslant k$) есть число, равное 0 или 1. Далее, по каждому $k = 1, 2, \ldots$ и каждому $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J_k$ построим множество $N(j) = N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, элементами которого являются натуральные числа, так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) при любом k и любом $j \in J_k$ множество $N(j)$ бесконечно; 2) если при некотором k $j^{(1)} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_k^{(1)}) \in J_k$, $j^{(2)} = (j_1^{(2)}, j_2^{(2)}, \ldots, j_k^{(2)}) \in J_k$ и $j_k^{(1)} \neq j_k^{(2)}$, множества $N(j^{(1)})$ и $N(j^{(2)})$ не пересекаются, т. е. $N(j^{(1)}) \cap N(j^{(2)}) = \varnothing$; 3) при любом k и любом $j = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J_k$ справедливы включения $N(j_1, j_2, \ldots, j_k, 0) \subset \subset N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ и $N(j_1, j_2, \ldots, j_k, 1) \subset N(j_1, j_2, \ldots, j_k)$.

Такая система множеств строится методом индукции. Введем, наконец, следующие обозначения. Если $j = (j_1, j_2, \ldots) \in J_\infty$, то при любом натуральном k положим $j^{(k)} = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J_k$. Возьмем теперь произвольное $j \in J_\infty$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ положим $z_k^{(j)} = = \sup \{x_n : n \in N(j^{(k)})\}$. Получим последовательность $\{z_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям леммы 1. Построим теперь функционал $f_j > 0$ ($f_j \in Y^*$), существование которого утверждается в лемме 1. Рассмотрим семейство функционалов $\{f_j : j \in J_\infty\}$. Ясно, что при любых $j, j' \in J_\infty$, $j \neq j'$, справедливо $f_j \wedge f_{j'} = 0$. Для любого $j \in J_\infty$ положим

$\varphi_j = f_j \wedge F$. Так как F — единица в Y^*, то $\varphi_j > 0$. Поэтому $\varphi_j(z) > 0$ при любом $j \in J_\infty$. Возьмем произвольное конечное подмножество $K \subset J_\infty$. Так как $\varphi_j \leqslant F$ при всех $j \in J_\infty$ и $\varphi_j \wedge \varphi_{j'} = 0$ при всех $j \neq j'$, то $\sum_{j \in K} \varphi_j \leqslant F$.

Следовательно, $\sum_{j \in K} \varphi_j(z) \leqslant F(z)$. Отсюда следует, что множество $\{j \in J_\infty : \varphi_j(z) > 0\}$ не более чем счетно. Это противоречит тому, что $\varphi_j(z) > 0$ при всех $j \in J_\infty$ и J_∞ имеет мощность континуума. Противоречие получено. Итак, доказано, что в X выполнено условие (А). Наличие в X существенно положительного функционала f теперь устанавливается без труда. Теорема 1 доказана.

Замечание. Фактически доказано несколько больше, чем утверждается в теореме 1. Именно, дополнительно установлено следующее. Пусть X — полное по норме K_oN-пространство, $\overline{X}$ есть K-пространство всех вполне линейных функционалов на X, $\overline{X}^d$ — дизъюнктное дополнение $\overline{X}$ в X^*. Тогда, если $\overline{X}^d \neq \{0\}$, то в $\overline{X}^d$ нет единицы, и в $\overline{X}^d$ существует континуальная система, состоящая из ненулевых попарно дизъюнктных элементов. В частности, отсюда следует, что если $\overline{X}^d$ конечномерно как линейное множество, то $\overline{X}^d = \{0\}$. Заметим в связи с этим, что существуют KB-линеалы, например, уже упомянутое пространство c, такие, что $\overline{X}^d$ конечномерно, но $\overline{X}^d \neq \{0\}$.

Доказательство теоремы 2. Справедливость импликации (2) ==> (1) хорошо известна. Доказываем (1) ==> (2). Из теоремы 1 следует, что в X выполнено условие (А), и, следовательно, $\overline{X} = X^*$. Так как $\overline{X}$ по условию счетного типа с единицей, то в X любая система, состоящая из ненулевых попарно дизъюнктных элементов, не более чем счетна. Отсюда легко следует существование единицы в X. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Нам понадобятся следующие хорошо известные факты из [1]:

(а) если X — произвольный KN-линеал, то в X^* выполнено условие (Б), и X^* есть K-пространство;

(б) всякое KB-пространство есть пространство счетного типа;

(в) если X есть KB-пространство с единицей, то X^* есть пространство счетного типа с единицей;

(г) (теорема Огасавары) для того чтобы KB-линеал X был рефлексивен, необходимо и достаточно, чтобы X и X^* были KB-пространствами.

Отсюда немедленно следует справедливость импликаций (1) ==> (2), (1) ==> (3), (1) ==> (4). Доказываем (2) ==> (1). Если X^{**} и X^{***} суть пространства с единицами, то в силу теоремы 1 в X^* и X^{**} выполнено условие (А). В силу (а) X^* и X^{**} являются KB-пространствами, и, следовательно, по (г) пространство X^* рефлексивно. Отсюда вытекает рефлексивность самого пространства X. Доказываем (3) ==> (1). В силу теоремы 2 в X^{**} выполнено условие (А) и есть единица. Тогда по теореме 1 в X^* тоже выполнено условие (А), и, следовательно, X^* и X^{**} являются KB-пространствами. Отсюда, как и ранее, следует рефлексивность пространства X. Аналогично доказывается справедливость импликации $(4) \Longrightarrow (1)$.

г. Ленинград

Поступило
12 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., ИИЛ, 1962.
3. Лозановский Г. Я., Меклер А. А. Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах. Изв. вузов, Матем., 1967, № 11, с. 47—53.
4. Лозановский Г. Я. О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности. ДАН СССР, т. 183, № 3, 1969, с. 521—523.

IV

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1968

т. 183, № 3

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 183, № 3

УДК 519.55

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР И ОБ УСЛОВИЯХ ИХ РЕФЛЕКСИВНОСТИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 3 IV 1968)

Мы будем придерживаться терминологии и обозначений из теории полуупорядоченных пространств, принятых в монографии (1). *K*-линеалом называется линейная структура. *K*-пространством (K_σ-пространством) называется *K*-линеал, который условно полон (условно σ-полон) как структура. *KN*-линеалом ($K_\sigma N$-пространством, *KN*-пространством) называется *K*-линеал (K_σ-пространство, *K*-пространство) X, одновременно являющийся нормированным пространством, в котором норма монотонна, т. е. из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$. *KB*-линеалом называется полный по норме *KN*-линеал. *KB*-пространством называется $K_\sigma N$-пространство X, в котором выполнены следующие два условия.

(A). Если $x_n \downarrow 0$ в X, то $\|x_n\| \to 0$.

(B). Если $0 \leqslant x_n \uparrow$ и $\sup \|x_n\| < \infty$, то существует $\sup x_n \in X$.

Сопряженное к банахову пространству E обозначается через E^*. Подпространством в E называется его линейное замкнутое подмножество. Банаховы пространства E и F называются изоморфными, если существует взаимно однозначное линейное непрерывное отображение E на F. Подчеркнем, что термины подпространство, изоморфизм, сопряженное пространство используются в работе только в смысле теории нормированных пространств. Через c_0, l^1, m обозначаются обычные банаховы пространства числовых последовательностей. Символ $m(T)$ означает банахово пространство всех ограниченных функций на множестве T с равномерной нормой.

Хорошо известна следующая теорема Накано — Макарова (2): *если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ суть две монотонные банаховы нормы на некотором K-линеале X, то они эквивалентны.*

Эта теорема показывает, что частичное упорядочение в *KB*-линеале однозначно определяет его банахову топологию. Естественно возникает обратный вопрос: насколько топология в *KB*-линеале определяет свойства его частичного упорядочения. Напомним сначала два известных результата в этом направлении.

Теорема 1. *Для любого KB-линеала X следующие условия эквивалентны: (1) X есть KB-пространство. (2) X слабо секвенциально полон. (3) В X нет подпространства, изоморфного пространству c_0.*

Эквивалентность (1) и (2) доказал Огасавара (3), а эквивалентность (2) и (3) имеется в работе автора (4).

Теорема 2. *Для полного по норме $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны: (1) В X выполнено условие (A). (2) В X выполнено условие (u), введенное А. Пельчинским (6), т. е. для любой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ в X найдется такая последовательность $\{y_n\}$, что для любого $f \in X^*$ справедливо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(y_n).$$

(3) *В X нет подпространств, изоморфных пространству m.* (4) *В X нет подпространств, изоморфных известному пространству Р. Джеймса (см., например,* (7), *стр.* 123).

Эта теорема доказана автором (5).

Напомним теперь следующее определение (см. (1), стр. 173).

Определение 1. *K-линеал X называется* K-линеалом счетного типа, если всякое ограниченное подмножество попарно дизъюнктных его элементов, отличных от 0, не более чем счетно.

Пусть теперь E — произвольное нормированное пространство. Рассмотрим следующие два свойства, каждое из которых тоже назовем счетностью типа.

Определение 2. Будем называть E пространством счетного типа, если в E нет подпространства, изоморфного пространству $m(T)$, где $\overline{\overline{T}} = \aleph_1$.

Определение 3. Будем называть E пространством счетного типа, если существует такое тотальное множество функционалов $\mathfrak{M} \subset E^*$, что для любого $x \in E$ множество $\{f \in \mathfrak{M}\colon f(x) \neq 0\}$ не более чем счетно.

Заметим, что определение 1 приложимо к произвольному K-линеалу, а определения 2 и 3 — к произвольному нормированному пространству. Если же X — KN-линеал, то можно говорить о его счетности типа в любом из указанных трех смыслов.

Теорема 3. *Пусть X — полное по норме KN-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов. Тогда (в предположении справедливости континуум-гипотезы) все три определения счетности типа эквивалентны для X.*

Таким образом, с помощью континуум-гипотезы удается показать, что в полных по норме KN-пространствах с достаточным множеством вполне линейных функционалов счетность типа в обычном смысле теории полуупорядоченных пространств равносильна некоторым их топологическим свойствам.

Схема доказательства теоремы 3 следующая: без континуум-гипотезы из счетности типа в смысле определения 2 выводится счетность типа в смысле определения 1, затем из счетности типа в смысле определения 1 выводится счетность типа в смысле определения 3. Наконец, из счетности типа в смысле определения 3 с помощью континуум-гипотезы выводится счетность типа в смысле определения 2. В доказательстве используются, в частности, некоторые результаты М. Дэя (8, 9) и следующая лемма, в которой справедливость континуум-гипотезы не предполагается.

Лемма. *Пространство $m(T)$ не есть пространство счетного типа в смысле определения 3, если T имеет мощность континуума.*

Замечание. Нетрудно привести пример полного по норме $K_\sigma N$-пространства с достаточным множеством вполне линейных функционалов, которое счетного типа в смысле определения 3, но не является таковым в смысле определения 1.

Известно (теорема Эберлейна, см., например, (7)), что в произвольном банаховом пространстве E слабая секвенциальная компактность ограниченного слабо замкнутого множества эквивалентна слабой компактности. В то же время единичный шар пространства E^* всегда слабо* компактен, но, вообще говоря, не является секвенциально компактным в этой топологии. В связи с этим приведем следующую теорему, которая (в предположении справедливости континуум-гипотезы) дает критерий слабой* секвенциальной компактности единичного шара пространства, сопряженного к произвольному полному по норме $K_\sigma N$-пространству.

Теорема 4. *Пусть X — полное по норме $K_\sigma N$-пространство. Тогда (в предположении справедливости континуум-гипотезы) следующие утверждения эквивалентны:* (1) *Единичный шар пространства X^* слабо**

секвенциально компактен, т. е. любая ограниченная по норме последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ *содержит подпоследовательность, сходящуюся в слабой* топологии* $\sigma(X^*, X)$. (2) *В X выполнено условие* (A), *а пространство* X^* *есть пространство счетного типа в смысле какого-нибудь из трех определений, приведенных выше.*

Замечание. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) справедлива без континуум-гипотезы, если счетность типа понимать в смысле определения 1.

С помощью сформулированной выше леммы можно установить ряд критериев рефлексивности KB-линеалов. Всюду далее термин рефлексивность понимается только в смысле теории нормированных пространств. При этом все последующие результаты доказываются без континуум-гипотезы.

Теорема 5. *Для произвольного KB-линеала X следующие утверждения эквивалентны.* (1) *X рефлексивен как банахово пространство.* (2) *X^{***} и X^{****} суть пространства счетного типа.* (3) *X — KB-пространство, а X^{***} счетного типа.*

В формулировке этой теоремы счетность типа понимается в смысле любого из трех приведенных выше определений.

Замечание. В критерии (2) речь идет о третьем и четвертом сопряженном к X пространствах. Возникает вопрос, каковы должны быть натуральные числа m и n, чтобы счетность типа m-го и n-го сопряженных к X пространств была эквивалентна рефлексивности X. Можно показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы эти числа были разной четности и выполнялись неравенства $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$. Аналогично в критерии (3) третье сопряженное X^{***} можно заменить m-м сопряженным к X пространством тогда и только тогда, когда m нечетно, причем $m \geqslant 3$.

Теорему 5 полезно сопоставить с известным критерием рефлексивности Огасавара: KB-линеал X рефлексивен тогда и только тогда, когда X и X^* суть KB-пространства.

Используя некоторые результаты Дэя ([8, 9]), Линденштраусса ([10]) и Андо ([11]), можно дать критерии рефлексивности в терминах округлости и гладкости единичных шаров (определения этих понятий см. ([7]), стр. 187).

Теорема 6. *Для произвольного KB-линеала X рефлексивность равносильна каждому из следующих утверждений.* (1) *X^{***} и X^{****} изоморфны банаховым пространствам с округлыми единичными шарами.* (2) *X^* и X^{**} изоморфны пространствам с гладкими единичными шарами.* (3) *X^* изоморфно пространству с гладким единичным шаром, а X^{***} изоморфно пространству с округлым единичным шаром.*

Замечание. Известное банахово пространство Р. Джеймса (см. ([7]), стр. 123) удовлетворяет всем этим критериям, но не является рефлексивным. Причина этого заключается в том, что это пространство Джеймса не изоморфно никакому KB-линеалу.

Для полноты картины напомним еще один критерий рефлексивности KB-линеала X, установленный автором ранее ([4]): в X нет подпространств, изоморфных c_0 или l^1.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Б. З. Вулиху за постоянное внимание к работе.

Поступило
I IV 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [2] Б. М. Макаров, ДАН, 107, 17 (1956). [3] T. Ogasawara, J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A, 12, 37 (1942); 13, 41 (1944). [4] Г. Я. Лозановский, Функциональный анализ и его приложения, 1, в. 3, 92 (1967). [5] Г. Я. Лозановский, Сибирск. матем. журн. 10, № 1 (1969). [6] A. Pełczyński, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math., astr. et phys., 6, № 4, 251 (1958). [7] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., 1961. [8] M. M. Day, Trans. Am. Math. Soc., 78, 516 (1955). [9] M. M. Day, Proc. Am. Math. Soc., 8, 415 (1957). [10] J. Lindenstrauss, Bull. Am. Math. Soc., 72, № 6, 967 (1966). [11] T. Ando, Proc. Japan Acad., 33, 429 (1957).

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 183, № 3

УДК 513.62

МАТЕМАТИКА

А. Н. ПАРШИН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ НАД ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 IV 1968)

Пусть K — глобальное поле (числовое или функциональное размерности 1); X — проективная кривая, определенная над K, неособая и геометрически неприводимая. С кривой X можно связать следующие инварианты: род g, конечное множество точек поля K — S, по которым кривая X имеет вырожденную редукцию. В ([1]) И. Р. Шафаревич предположил, что кривая X определяется набором K, S, g с точностью до конечного числа возможностей, если $g > 1$ и X — непостоянная кривая в функциональном случае. Цель настоящей заметки дать доказательство этой гипотезы для одного класса кривых над функциональным полем и установить связь рассматриваемого круга вопросов с функциональным аналогом гипотезы Морделла. Наш метод обычен для диофантовой геометрии. Сначала устанавливается ограниченность высоты рассматриваемого множества кривых, а затем с помощью подходящей теоремы жесткости доказывается его конечность.

Обозначим через k *основное поле*, которое мы будем предполагать алгебраически замкнутым и характеристики 0. Положим $K = k(B)$, где B — неособая проективная кривая над k рода q. Кривую X рода $g > 1$, определенную над K, можно рассматривать как кривую степени $d = 6(2g-2)$ в проективном пространстве размерности $m = 11g - 12$ (вложение с помощью ушестеренного канонического класса). Обозначим через H схему Гильберта кривых степени d в P^m. Каждая точка $x \in H(K)$ определяет кривую X_x, определенную над K.

Теорема 1. *Пусть даны K, S и $g > 1$. Тогда существует множество $\mathscr{E} \subset H(K)$ ограниченной высоты такое, что для любой неособой геометрически неприводимой K-кривой X рода $g > 1$ и невырожденной вне S, найдется точка $a \in H(K)$, для которой $X_a \simeq X$ над K.*

Основная идея доказательства состоит в следующем. В силу теоремы Безу любые две кривые степени d в P^m совпадают если они пересекаются более чем в d^2 точках. Поэтому кривые однозначно определяются достаточно большим набором своих точек. Это сводит задачу к построению на кривой K-рационального цикла большой степени и оценке высоты входящих в него точек. Таким циклом является, например, общий дивизор из подходящего кратного канонического класса. Оценку высоты необходимо проводить на связанном с кривой X минимальном расслоении. Это расслоение представляет собой неособую поверхность V и плоский эпиморфизм f: $V \to B$, общий слой которого изоморфен X. Минимальность означает отсутствие в слоях V_b исключительных кривых I рода. Существование и единственность такого расслоения доказаны в ([2]). С точки зрения расслоений множество S можно определить как наименьшее множество точек кривой B, вне которого морфизм f гладок.

Лемма 1. *Если $q > 1$, то V — поверхность основного типа (в смысле ([3])) и $\Omega_V \cdot \Omega_V \leqslant 99(gqs + 1)$, $s = \operatorname{card}(S)$.*

Из леммы легко следует требуемая оценка высоты. Отметим в качестве дополнительного результата, что можно явным образом оценить все численные инварианты поверхности V. В частности это дает оценку для чис-

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1967

том 172, № 5

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 172, № 5

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ КАЛЬДЕРОНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 IV 1966)

В настоящей работе рассматриваются сопряженные и дуальные пространства к некоторым банаховым структурам, введенным Кальдероном ([2]). При этом конструкцию Кальдерона мы будем применять не к структурам измеримых функций, а к несколько более широким классам полуупорядоченных пространств. Мы будем придерживаться терминологии и обозначений из теории полуупорядоченных пространств, принятых в монографии ([1]).

Пусть S — произвольное расширенное K-пространство с единицей $\mathbf{1}$; X_1 и X_2 — фундаменты в S, являющиеся (b)-полными KN-пространствами; s — вещественное число, причем $0 < s < 1$. Обозначим через X множество всех таких $w \in S$, что

$$|w| \leqslant \lambda |u|^{1-s} |v|^{s} \tag{1}$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и некоторых $u \in X_1$, $v \in X_2$, причем $\|u\|_{X_1} \leqslant 1$ и $\|v\|_{X_2} \leqslant 1$. Через $\|w\|_X$ обозначим инфимум всех возможных λ в неравенстве (1). Тогда (ср. ([2])) $(X, \|\ \|_X)$ есть фундамент в S, являющийся (b)-полным KN-пространством. Это пространство, следуя ([2]), мы будем обозначать через $X_1^{1-s}X_2^s$. Заметим, что пространство $X_1^{1-s}X_2^s$ вполне определяется S, X_1 и X_2 и не зависят от выбора единицы в S.

Пусть теперь $(L, \|\ \|_L)$ — фундамент в S, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой, J — линейный функционал на L, действующий по формуле

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{2}$$

Если Z — какой-либо фундамент в S, то полагаем

$$Z' = \{v\colon\ v \in S,\ vz \in L \ \text{для любого}\ z \in Z\}. \tag{3}$$

Ясно, что Z' естественным образом отождествляется с пространством $\overline{Z}$, сопряженным к Z в смысле Накано, если каждому $v \in Z'$ сопоставить функционал $f_v \in \overline{Z}$, действующий по формуле

$$f_v(z) = J(vz), \quad z \in Z. \tag{4}$$

Теорема 1*. *Пространство $(X_1^{1-s}X_2^s)'$ есть фундамент в S, причем*

$$(X_1^{1-s}X_2^s)' = (X_1')^{1-s}(X_2')^s. \tag{5}$$

Эта теорема является обобщением теоремы 4 работы автора ([4]).

Приведем план доказательства теоремы 1. Легко проверяется, что правая часть равенства (5) содержится в левой. Для установления обратного включения доказываем последовательно:

1) Если направление $0 \leqslant x_\alpha$ $(\alpha \in A)$ слабо сходится к нулю в X_1, а направление $0 \leqslant y_\alpha$ $(\alpha \in A)$ слабо сходится к нулю в X_2, то направле-

* В работе ([2]) этот результат установлен лишь в предположении, что одно из пространств X_1, X_2 рефлексивно.

ние $z_\alpha = x_\alpha^{1-s} y_\alpha^s$ слабо сходится к нулю в пространстве $X = X_1^{1-s} X_2^s$. Это доказывается от противного с использованием теоремы о совпадении слабого и сильного замыканий для выпуклого множества в нормированном пространстве.

2) Пусть теперь $w \in (X_1^{1-s} X_2^s)_+'$. Тогда найдутся такие положительные линейные функционалы f_1 на X_1 и f_2 на X_2, что для любых $x \in (X_1)_+$ и $y \in (X_2)_+$ будет

$$J(wx^{1-s}y^s) \leqslant [f_1(x)]^{1-s}[f_2(y)]^s. \tag{6}$$

3) Пусть φ_1 и φ_2 — вполне линейные составляющие функционалов f_1 и f_2 соответственно. Тогда для указанных x и y

$$J(wx^{1-s}y^s) \leqslant [\varphi_1(x)]^{1-s}[\varphi_2(y)]^s. \tag{7}$$

4) Пусть $u \in X_1'$ и $v \in X_2'$ — такие элементы, которые в формуле (4) отвечают функционалам φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда

$$J(wx^{1-s}y^s) \leqslant [J(ux)]^{1-s}[J(vy)]^s \tag{8}$$

опять для любых $x \in (X_1)_+$ и $y \in (X_2)_+$.

5) Из (8) выводим, что

$$w \leqslant u^{1-s}v^s, \tag{9}$$

откуда следует, что $w \in (X_1')^{1-s}(X_2')^s$.

Заметим, что если в одном из пространств X_1, X_2 выполнено условие (A) (т. е. из $x_n \downarrow 0$ следует, что $\|x_n\| \to 0$; см. [1], стр. 207), то условие (A) выполнено и в $X = X_1^{1-s} X_2^s$. Следовательно, в этом случае, по формуле (4), можно отождествить $(X_1')^{1-s}(X_2')^s$ и (b)-сопряженное к $X_1^{1-s}\, X_2^s$ пространство. В то же время условие (B) (т. е. из $0 \leqslant x_n \uparrow +\infty$ следует, что $\|x_n\| \to \infty$; см. [1], стр. 207) может быть выполнено в одном из пространств X_1, X_2 и не выполнено в $X_1^{1-s} X_2^s$.

Заметим, что если X_1 и X_2 не (b)-полные KN-пространства, а просто фундаменты в S, то формула (5), вообще говоря, уже не имеет места. Например, возьмем $S = S[0, 1]$, $X_1 = L^{1+0}[0, 1]$, $X_2 = X_1'$, $s = 1/2$. Тогда

$$(X_1^{1/2} X_2^{1/2})' \supset L^2[0, 1], \quad L^2[0, 1] \neq (X_1')^{1/2}(X_2')^{1/2} \subset L^2[0, 1],$$

т. е. $(X_1^{1/2} X_2^{1/2})' \neq (X_1')^{1/2}(X_2')^{1/2}$.

Теорема 2. *Если одно из пространств X_1, X_2 является KB-пространством, а в одном из (b)-сопряженных к ним пространств X_1^*, X_2^* выполнено условие* (A), *то пространство $X_1^{1-s} X_2^s$ есть (b)-рефлексивное KB-пространство.*

Доказательство этой теоремы опирается на формулу (5).

Заметим, что теорема 2 является обобщением известного критерия (b)-рефлексивности Огасавары в части достаточности (см. [1], стр. 294), что получается при $X_1 = X_2$ и любом $0 < s < 1$. Теорема 2 является также обобщением теоремы 1 работы автора [3] о рефлексивности пространства X_p при $p > 1$, что получается, если за X_1 взять произвольное KB-пространство, а также положить

$$X_2 = \{x\colon\ x \in S,\ |x| \leqslant \lambda 1 \text{ для некоторого } \lambda > 0\}$$

и для $x \in X_2$

$$\|x\|_{X_2} = \inf\{\lambda\colon\ \lambda > 0,\ |x| \leqslant \lambda 1\},$$

т. е. за X_2 взять KN-пространство ограниченных относительно единицы 1 элементов. Нужно также взять $s = 1 - 1/p$.

Заметим также, что возможен случай, когда в X_1 выполнено условие (A), в X_2 выполнено условие (B), в одном из пространств X_1^*, X_2^* выполнено условие (A), но пространство $X_1^{1-s} X_2^s$ не только не (b)-рефлексивно, но даже не является KB-пространством. Так будет, наприме если за S взять пространство всех вещественных числовых последов тельностей, $X_1 = c_0$, $X_2 = m$, ибо тогда при любом $0 < s < 1$ буде $X_1^{1-s}X_2^s = c_0$.

В дальнейшем S, 1, L, J будут иметь прежний смысл, а через X буде обозначено произвольное (b)-полное KN-пространство, являющееся фу даментом в S. Подчеркнем, что никакого дополнительного согласовани упорядочения и топологии в X мы не требуем. По-прежнему $0 < s <$

Теорема 3. *Пространство $X^{1-s}(X')^s$ есть (b)-рефлексивное KB-про странство, причем при $s = 1/2$ оно изоморфно гильбертову пространству*

$$X^{1/2}(X')^{1/2} = \{x\colon x \in S,\ x^2 \in L\}. \qquad (10$$

Доказательство теоремы 3 мы опускаем.

Введем теперь на X' норму, положив

$$\|y\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leqslant 1}} J(xy), \quad y \in X', \qquad (11$$

т. е. норму, индуцированную нормой пространства X^*.

Теорема 4. *Существует такая постоянная $C > 0$, что любой $x \in$ можно представить в виде*

$$x = x_1x_2,$$

где $x_1 \in X$, $x_2 \in X'$ и

$$\|x_1\|_X\|x_2\|_{X'} \leqslant C\|x\|_L. \qquad (12$$

Доказательство теоремы 4 основано на использовании формулы (10)

Замечание 1. Отметим, что Е. М. Семенов доказал (см. ([5])), чт всякую суммируемую на $[0, 1]$ функцию $x(t)$ можно представить в вид $x(t) = x_1(t)x_2(t)$, где $x_1(t) \in \Lambda(\alpha)$, $x_2(t) \in M(\alpha)$ и

$$\|x_1\|_{\Lambda(\alpha)}\|x_2\|_{M(\alpha)} \leqslant \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha}\cdot\|x\|_L.$$

Здесь $\Lambda(\alpha)$ и $M(\alpha)$ — пространства Лоренца. Так как $M(\alpha)$ сопряжено $\Lambda(\alpha)$, то наша теорема 4 поясняет этот результат.

Замечание 2. Обозначим через $C(X)$ инфимум всех возможных в неравенстве (12). Можно показать, что $C(X)$ определяется только са мим пространством $(X, \|\ \|_X)$ и никак не зависит от выбора единицы в S и $(L, \|\ \|_L)$. Ясно, что всегда $C(X) \geqslant 1$. Если за X взять, например обычное лебегово пространство L^p $[0, 1]$, $p > 1$, то для него $C(X) = 1$

Замечание 3. Теорема 4 не допускает обобщения на счетно-нор мированный случай, даже если потребовать, чтобы X было KB^*-простран ством. Например, пусть $S = S\ [0, 1]$, L — обычное, J — интеграл Лебега За X возьмем пространство всех суммируемых с любой степенью $p \geqslant 1$ функций на $[0, 1]$. Тогда X — KB^*-пространство и $X' = L^{1+0}$. Ясно, что не всякую функцию $x \in L$ можно представить в виде $x = x_1x_2$, где $x_1 \in X$, $x_2 \in X'$, ибо всякая функция такого вида обязательно суммируема с не которой степенью $p > 1$.

Замечание 4. Из теоремы 4 вытекает следующее. Пусть X — (b)-полное KN-пространство и фундамент в S $[0, 1]$. Вообще говоря, не обя зательно $X \supset M$ $[0, 1]$ или $X \subset L$ $[0, 1]$. Найдется такая измеримая не отрицательная почти всюду конечная на $[0, 1]$ функция $z(t)$, что

$$L\,[0, 1] \supset X\cdot z \supset M\,[0, 1],$$

где $Xz = \{xz\colon x \in X\}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководи телю проф. Б. З. Вулиху за внимание.

Поступило
6 IV 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961. [2] A. P. Calderón, Studia Math., 24, № 2 (1964). [3] Г. Я. Лозановский, ДАН. 158, № 3 (1964). [4] Г. Я. Лозановский, ДАН, 163, № 3 (1965). [5] Е. М. Семенов, Шкалы банаховых пространств, соединяющих пространства L_1 и L_∞, Автореферат кандидатской диссертации, Воронеж, 1964.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

★

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ • ТОМ I • ВЫПУСК 3

МОСКВА • 1967

Функциональный анализ и его приложения
т. 1, вып. 3, 1967, 92

О БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ И БАЗИСАХ

Г. Я. Лозановский

Известно (см. [3]), что любое банахово пространство с безусловным базисом можно превратить в банахову структуру, если за конус положительных элементов принять коническую оболочку базиса и произвести некоторую эквивалентную перенормировку пространства. Однако класс таким образом полученных банаховых структур далеко не исчерпывает класса всех банаховых структур. Тем не менее оказывается, что многие результаты, полученные для банаховых пространств с безусловными базисами (см. [2] и [4]), оказываются справедливыми для класса всех банаховых структур. Некоторые из этих результатов приводятся (без доказательств) в настоящей работе.

Заметим, что произвольную банахову структуру нельзя, вообще говоря, вложить как подпространство в банахово пространство с безусловным базисом. Поэтому наши результаты не следуют из результатов работы [5].

Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями, принятыми в монографии [1]. В частности, под KB-линеалом ((b)-полным KN-пространством) будет пониматься банахово пространство, являющееся одновременно линейной структурой (условно полной линейной структурой), с монотонной нормой. Термины «подпространство», «сепарабельность», «изоморфизм», «сопряженное пространство», «рефлексивность» будут всегда использоваться только в смысле теории нормированных пространств. В частности, два банаховых пространства будут называться изоморфными, если существует линейное непрерывное взаимно однозначное отображение одного из них на другое. Символы c_0 и l^1 обозначают обычные пространства числовых последовательностей. Сопряженное к банахову пространству X пространство обозначается через X'.

Теорема 1. *KB-линеал X тогда и только тогда слабо секвенциально полон, когда в нем нет подпространств, изоморфных пространству c_0.*

Теорема 2. *Для KB-линеала X следующие утверждения эквивалентны: 1) X рефлексивно, 2) в X нет подпространств, изоморфных c_0 или l^1, 3) в X' нет подпространств, изоморфных l^1.*

Следствие 3. *Для KB-линеалов квазирефлексивность эквивалентна рефлексивности.*

Теорема 4. *Пусть X — сепарабельный KB-линеал. Для того чтобы пространство X' было слабо секвенциально полно, необходимо и достаточно, чтобы каждая главная компонента в X' была сепарабельна.*

Теорема 5. *Пусть X — сепарабельное (b)-полное KN-пространство. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) X' сепарабельно, 2) в X нет подпространств, изоморфных пространству l^1, 3) X' слабо секвенциально полно.*

Ленинградская
военно-инженерная академия

Поступило в редакцию
25 января 1967 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961. 2. Дей М. М., Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961. 3. Цейтлин Я. М., Изв. вузов, Математика 2 (51) (1966). 4. Civin P., Yood B., Proc. Amer. Math. Soc. 8, № 5 (1957), 906—911. 5. Bessaga C., Pełczyński A., Bull. Acad. Polon. Sci. Serie sci. math., astr., phys. 6, № 5 (1958), 313—315.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Рукопись представляется в редакцию в двух экземплярах отпечатанной на машинке (не портативной) через *два интервала*. Страницы должны быть *стандартного размера* (30 строк на странице без формул, выделенных в отдельную строку). Следует оставлять достаточно места для полей и формул.

2. Формулы тщательно вписываются от руки *темными* чернилами (не следует *впечатывать* буквы, сходные с русскими). Громоздкие формулы и занумерованные формулы выделяются в отдельные строки, при этом номер ставится у правого края страницы. Желательно, чтобы нумеровались только те формулы, на *которые имеются ссылки*. Дроби в формулах, не выделяемых в отдельные строки, пишутся через косую черту.

3. Заглавные буквы подчеркиваются простым карандашом двумя черточками снизу; над строчными буквами ставятся две *черточки сверху*. Греческие буквы *обводятся кружком красным* карандашом, готические — синим, рукописные — простым карандашом. Текст, который нужно набрать курсивом, аккуратно подчеркивается волнистой чертой (при этом формулы не подчеркиваются), в разрядку — пунктиром.

Индексы и *показатели* размечаются простым карандашом.

4. При оформлении цитированной литературы следует в качестве образца пользоваться статьями, напечатанными в журнале (в частности, обратить внимание на разницу в *оформлении литературы к подробным статьям и к кратким* сообщениям).

5. Чертежи выполняются на отдельных листах плотной бумаги. Место в тексте для чертежа указывается на полях рукописи.

6. Вместе со статьей в *редакцию присылается* ее краткий *автореферат*.

7. Автору высылается одна корректура. Дополнения в тексте и исправления рисунков не допускаются. Исправленная корректура *возвращается* в редакцию в *максимально* короткий срок.

Функциональный анализ и его приложения, том 1, выпуск 3

Редактор Б. С. Виленская

Техн. редактор К. Ф. Брудно. Корректоры Е. А. Белицкая и И. Я. Кришталь.

Сдано в набор 5/VI 1967 г. Подписано к печати 4/VIII 1967 г. Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 6.
Условн. печ. л. 8,22. Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 1050 экз. Т-07072. Цена 90 к. Заказ № 6769.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука», Москва, Шубинский пер., 10

[redacted]

ИНДЕКС
71036

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГОД ИЗДАНИЯ ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ

Журнал выходит 24 раза в год, по четыре номера каждой серии

№ 1

МАТЕМАТИКА □ МЕХАНИКА □ АСТРОНОМИЯ

Выпуск 1

ЯНВАРЬ

1967

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 513.88:513.83

Г. Я. Лозановский

О ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой заметке будет использоваться терминология и обозначения, принятые в монографии [1].

Известны следующие результаты.

(1) Теорема Х. Накано (см. [1], IX. 1. 1). Если X — K_σ-пространство, $f_n \in \widetilde{X}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и при каждом $x \in X$ существует конечный $f(x) = \lim f_n(x)$, то f — тоже регулярный функционал.

(2) Теорема Х. Накано и А. Н. Балуева (см. [1], IX. 2 или [2], стр. 396). Если в (1) все f_n (o)-линейны или вполне линейны, то и предельный функционал f тоже (o)-линеен или вполне линеен соответственно.

(3) Если X — не K_σ-пространство, а только архимедов K-линеал, то утверждения (1) и (2) перестают быть верными. Аналогично, если X — K_σ-пространство, но в (1) и (2) рассматривать произвольные точно сходящиеся направления функционалов вместо последовательностей, то (1) и (2) тоже теряют силу.

(4) Люксембург и Цаанен доказали [3]: Пусть X — архимедов K-линеал, R — произвольная компонента сопряженного K — пространства $\overline{X}$. Пусть имеется направление $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset R$, причем для любого $x \in X$ существует конечный предел $\lim f_\alpha(x) = f(x)$ и $f \in \overline{X}$. Тогда $f \in R$. Но известно также следующее. Пусть X — (b)-полное KN-пространство, причем $\widetilde{X} \neq \overline{X}$. Тогда обязательно найдется такая компонента R в $\widetilde{X}$ и такое направление $\{f_\alpha\} \subset R$, что для любого $x \in X$ существует конечный $\lim f_\alpha(x) = f(x)$, $f \in \widetilde{X}$, но $f \overline{\in} R$.

Тем не менее, справедлива

Теорема. *Пусть X — K_σ-пространство, R — компонента в $\widetilde{X}$. Тогда если $f_n \in R$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и при каждом $x \in X$ существует конечный $f(x) = \lim f_n(x)$, то $f \in R$.*

З а м е ч а н и е 1. Из сказанного ранее следует, что теорема, вообще говоря, перестает быть верной, если рассматривать произвольные точечно сходящиеся направления функционалов, даже если дополнительно потребовать, чтобы предельный функционал был регулярен.

З а м е ч а н и е 2. Теорема теряет силу, если X — не K_σ-пространство, а только архимедов K-линеал.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Прежде всего из упомянутой теоремы Х. Накано следует, что $f \in \widetilde{X}$. Допустим, что $f \overline{\in} R$. Тогда найдется такой $g \in \widetilde{X}_+$, что $g \wedge |f_n| = 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, но $g \wedge |f| > 0$. Возьмем такой элемент $x \in X_+$, что $(g \wedge |f|)(x) > 0$, и положим $Y = \{y : y \in X, |y| \leq \lambda x$ при некотором $\lambda > 0\}$. На Y введем норму

$$\|y\|_Y = \inf \{\lambda : \lambda > 0, |y| \leq \lambda x\}, \; y \in Y.$$

Обозначим через g', f', f'_n следы функционалов g, f, f_n на Y соответственно. Через T будем обозначать компоненту в $\widetilde{Y}$, порожденную множеством $\{f'_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. По-прежнему $f'(y) = \lim f'_n(y)$ для любого $y \in Y$, $g' \wedge |f'_n| = 0$, $g' \wedge |f'| > 0$, ибо $(g' \wedge |f'|)(x) = (g \wedge |f|)(x) > 0$, т. е. $f' \overline{\in} T$. Далее, мы воспользуемся одним результатом Семадени (см. [4]), который приведем в удобной для нас форме. Пусть V — $K_\sigma N$-пространство ограниченных элементов, V^* и V^{**} — его первое и второе (b)-сопряженные пространства. Пусть $f_n \in V^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и для любого x $f_n(x) \to f(x)$, где $f \in V^*$. Тогда для любого $F \in V^{**}$ будет $F(f_n) \to F(f)$. Заметим, что у нас $(Y, \|\cdot\|_Y)$ есть $K_\sigma N$-пространство ограниченных элементов. Так как T замкнуто в $Y^* = \widetilde{Y}$ в нормированной топологии, то T замкнуто в Y^* и в топологии $\sigma(Y^*, Y^{**})$. Но у нас $f'_n \to f'$ в топологии $\sigma(Y^*, Y)$. Тогда, по теореме Семадени, $f'_n \to f'$ и в топологии $\sigma(Y^*, Y^{**})$. Следовательно, $f' \in T$. Это противоречит тому, что $g' \wedge |f'| > 0$.

Теорема доказана.

Summary

The following theorem is proved. Let X be a K_σ-space and R be a component of the associated space $\widetilde{X}$. Thus, if $f_n \in R$ $(n=1, 2, \ldots)$ and for any $x \in X$ there exists a finite limit $f(x) = \lim f_n(x)$, then $f \in R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
3. W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen. Notes on Banach function spaces, IX, X, XI. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 67, 1963.
4. Z. Semadeni. On weak convergence of measures and σ-complete boolean algebras. Colloquium Math., 12, fasc. 2, 1964.

Статья поступила в редакцию 18 ноября 1965 г.

УДК 519.3

А. Ю. Баранов, Р. И. Трухаев,
В. В. Хоменюк

К МЕТОДУ ПОГРУЖЕНИЯ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Пусть на элементах φ вещественного гильбертова пространства H заданы функционалы $V_0(\varphi)$, $V_1(\varphi)$, $\ldots$, $V_k(\varphi)$. Одним из методов учета ограничений, задаваемых на $V_1(\varphi)$, $\ldots$, $V_k(\varphi)$, в задаче минимизации $V_0(\varphi)$ является метод погружения [1–6]. Работа посвящена выбору коэффициентов в функции штрафа. Рассматривается применение метода погружения к задачам линейного программирования, выбора решающего правила в статистической теории принятия решений и оптимизации в системе автоматического управления объектом (процессом).

1. Постановка задачи. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. На H определены функционалы $V_0(\varphi)$, $V_1(\varphi)$, $\ldots$, $V_k(\varphi)$, имеющие непре- [illegible] задачу

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 19

СЕРИЯ

МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 4

ЛЕНИНГРАД
1966

УДК 513.88:513.83

Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский

О МЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛНОТЕ НОРМИРОВАННЫХ И СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУР

В настоящей заметке будут доказаны две теоремы, относящиеся к вопросу о метрической полноте счетно-нормированных структур. При изложении мы будем пользоваться терминологией из книги [1] (см., в частности, гл. VII, § 8). Как и в этой книге, если X—KN^*-линеал, то под расстоянием в X будем понимать функцию ρ, определяемую через полунормы формулой

$$\rho(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{\|x-y\|_p}{1+\|x-y\|_p}.$$

Из определения расстояния сразу следует, что для любого натурального k

$$\rho(kx, ky)\leqslant k\rho(x, y). \tag{1}$$

1. Сначала установим лемму, которая в неявном виде, по крайней мере для нормированного случая, встречалась у различных авторов.

Лемма. *Для того чтобы KN^*-линеал X был (m)-полным, достаточно чтобы всякая (m)-фундаментальная возрастающая последовательность положительных элементов $x_n\in X$ имела (m)-предел.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — произвольная (m)-фундаментальная последовательность, т. е.

$$\lim_{m, n\to\infty}\rho(x_m, x_n)=0.$$

Не умаляя общности можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_n, x_{n+1})<\infty,$$

ибо, в противном случае, данную последовательность можно было бы разредить. Положим

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)_+,\quad z_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)_-\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Ясно, что

$$0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant y_3\leqslant\ldots$$
$$0\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant z_3\leqslant\ldots$$

Если $m>n$, то, благодаря инвариантности метрической функции ρ, а также монотонности полунорм,

$$\rho(y_n, y_m) = \rho(y_m - y_n, 0) = \rho\left(\sum_{k=n+1}^{m} (x_{k+1} - x_k)_+, 0\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \rho((x_{k+1} - x_k)_+, 0) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \rho(x_{k+1} - x_k, 0) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} \rho(x_k, x_{k+1}) \xrightarrow[m,\, n \to \infty]{} 0.$$

Итак,

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \rho(y_n, y_m) = 0.$$

Аналогично

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \rho(z_n, z_m) = 0.$$

Таким образом, последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ (m)-фундаментальны. Поэтому существуют их (m)-пределы:

$$y = (m) - \lim_{n \to \infty} y_n$$

и

$$z = (m) - \lim_{n \to \infty} z_n.$$

Но тогда

$$y_n - z_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1 \xrightarrow{(m)} y - z.$$

Тем самым $x_n \xrightarrow{(m)} y - z + x_1$. Лемма доказана.

2. Из доказанной леммы чрезвычайно просто выводится теорема, доказанная для нормированных структур японским математиком И. Амемия [2]. Дадим обобщение этой теоремы для счетно-нормированного случая.

Теорема 1. *Для того чтобы KN^*-линеал X был (m)-полным, необходимо и достаточно, чтобы для любой (m)-фундаментальной, возрастающей последовательности положительных элементов $x_n \in X$ существовал $\sup x_n$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность, а для этого покажем, что из условия теоремы вытекает выполнение условия предыдущей леммы.

Пусть $x_n \geqslant 0$ и образуют возрастающую (m)-фундаментальную последовательность. Выделим из нее частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$ так, что

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leqslant \frac{1}{k^3} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Так как по условию теоремы, существует $x = \sup x_n$, то

$$x_{n_1} + (o) - \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x.$$

Далее, составим ряд

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}).$$

Из (1) и (2) следует, что частичные суммы этого ряда образуют (m)-фундаментальную последовательность. А тогда, по условию теоремы, этот ряд (o)-сходится:

$$x_{n_1} + (o) - \sum_{k=1}^{\infty} k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = y.$$

Покажем, что $x_{n_k} \xrightarrow{(m)} x$. Действительно,

$$x - x_{n_k} = (o) - \sum_{l=k}^{\infty} (x_{n_{l+1}} - x_{n_l}),$$

а потому

$$k(x - x_{n_k}) \leqslant (o) - \sum_{l=k}^{\infty} l(x_{n_{l+1}} - x_{n_l}) \leqslant y.$$

Следовательно,

$$x - x_{n_k} \leqslant \frac{1}{k} y.$$

Но $\frac{1}{k} y \xrightarrow{(m)} 0$, а тогда и $x - x_{n_k} \xrightarrow{(m)} 0$ $\left(\text{точнее } x_{n_k} \xrightarrow{(r)} x\right)$. Отсюда вытекает, что и $x_n \xrightarrow{(m)} x$. Условие леммы выполнено; тем самым теорема доказана.

Следствие. Пусть в $K_\sigma N^*$-пространстве X выполнено условие (B^*): если $x_n \uparrow +\infty$, $x_n \geqslant 0$, то $\|x_n\|_p \to \infty$, по крайней мере для одного p.

Тогда X (m)-полно.

Доказательство. Из условия (B^*) следует, что всякая возрастающая, (m)-фундаментальная последовательность элементов $x_n \in X_+$ ограничена по упорядочению. А так как $X - K_\sigma$-пространство, то существует $\sup x_n$.

3. Пусть, снова $X - KN^*$-линеал, а $\hat{X}$ — его K-пополнение. Для KN^*-линеалов справедлива теорема VII. 3.1 из [1], именно, если для любого $x \in \hat{X}$ определить полунормы по формуле

$$\|x\|_p^* = \inf_{x' \in X,\, x' > |x|} \|x'\|_p,$$

то $\hat{X}$ становится KN^*-пространством*).

Если при этом для $x, y \in \hat{X}$ положить

$$\rho^*(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\|x-y\|_p^*}{1 + \|x-y\|_p^*},$$

то ясно, что

$$\rho^*(x, y) = \inf_{z \in X,\, z > |x-y|} \rho(z, 0). \tag{3}$$

Теорема 2.**) *Если $X - KB^*$-линеал (т. е. (m)-полный KN^*-линеал), то и пространство $\hat{X}$ при указанном выше определении полунорм (m)-полно.*

Доказательство. На основании теоремы 1 достаточно убедиться, что выполнено следующее условие: если $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — произвольная последовательность положительных элементов из $\hat{X}$, такая что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(x_n, 0) < \infty,$$

*) Ясно, что при этом $\|x\|_p^* = \|x\|_p$ для любого $x \in X$ и всех p.

**) Эта теорема получена Г. Я. Лозановским и доложена им на семинаре в Ленинградском университете в 1964 году.

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (o)-сходится в $\hat{X}$. Из формулы (3) следует, что для каждого $n=1, 2, 3, \ldots$ существует такой элемент $y_n \in X$, что $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ и

$$\rho(y_n, 0) \leqslant 2\rho^*(x_n, 0).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(y_n, 0) < \infty.$$

Следовательно, благодаря (m)-полноте X, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (m)-сходится в X. Тем самым он и (o)-сходится в X. Так как $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ и $\hat{X}$ — K-пространство, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (o)-сходится в $\hat{X}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Мы доказали, что K-пополнение KB^*-линеала снова (m)-полно. Иными словами K-пополнение не нарушает (m)-полноты. Любопытно сопоставить это с тем, что, как показал А. И. Векслер [3], (m)-пополнение KN^*-пространства может нарушить K-полноту. Точнее, А. И. Векслер построил пример такого KN-пространства, пополнение которого по норме не является K-пространством.

Замечание 2. И. Каваи [4] доказал теорему, аналогичную нашей теореме 2, для произвольных локально-выпуклых структур, но только при дополнительном очень сильном условии согласования топологии и упорядочения в исходном пространстве.

Summary

Two theorems concerning the metric completeness of the countably normed lattices are proved. One of them is a generalization of the well known Amemiya's theorem and the other is a new one.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. J. Amemiya. A generalization of Riesz-Fischer's theorem. J. Math. Soc. Japan, 5, 353—354, 1953.
3. А. И. Векслер. О двух вопросах теории полуупорядоченных пространств. Сиб. матем. журнал, 5, № 4, 952—954, 1964.
4. J. Kawai. Locally convex lattices. J. Math. Soc. Japan, 9, 281—314, 1957.

Статья поступила в редакцию 8 сентября 1965 г.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА
КАЗАНЬ

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1967 МАТЕМАТИКА № 11 (66)

УДК 519.55

Г. Я. Лозановский, А. А. Меклер

ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И РЕФЛЕКСИВНОСТЬ В НОРМИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУРАХ

Основным результатом работы являются теоремы 2 и 3. В первой из них приводится один критерий рефлексивности (в смысле Банаха) нормированной линейной структуры. Во второй решается следующий вопрос: при каких условиях для любого $x \in X$ (X есть $K_\sigma N$-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов) найдется такой вполне линейный и непрерывный по норме функционал f, что

$$\|f\|_{X^*} = 1 \text{ и } f(x) = \|x\|_X .$$

В работе, в основном, используются обозначения и терминология, принятые в [1] и [2].

Напомним следующее. Пусть X — произвольный KN-линеал. Норма в X называется *непрерывной*, если в X выполнено условие (A): если $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\|_X \to 0$.

Норма в X называется *универсально непрерывной*, если в X выполнено условие (A′): если направление $x_\alpha \in X_+$ $(\alpha \in A)$ и $x_\alpha \downarrow 0$, то $\|x_\alpha\|_X \to 0$.

Норма в X называется *полунепрерывной*, если в X выполнено условие (C): если $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \uparrow x \in X$, то $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$.

Наконец, норма в X называется *универсально полунепрерывной*, когда в X выполнено условие (C′): если направление $x_\alpha \in X_+$ $(\alpha \in A)$ и $x_\alpha \uparrow x \in X$, то $\|x_\alpha\|_X \to \|x\|_X$.

Как известно, для произвольного KN-линеала верны следующие импликации: $(C) \Leftarrow (C') \Leftarrow (A') \Rightarrow (A) \Rightarrow (C)$. Известно также, что для $K_\sigma N$-пространств свойства (A) и (A′) равносильны. Условимся также о следующем.

1) Под (b)-подпространством нормированного пространства будем понимать его линейное замкнутое подмножество, т. е. подпространство в смысле теории нормированных пространств.

2) Под (σ)-подпространством KN-линеала будем понимать его (b)-подпространство, являющееся одновременно линейной подструктурой и содержащееся в исходном KN-линеале с сохранением граней.

3) Два нормированных пространства будем называть *(b)-изоморфными*, если они изоморфны алгебраически и топологически.

4) Два KN-линеала будем называть *(o)-изоморфными*, если они изоморфны алгебраически, топологически и структурно.

5) Под *интервально полным* KN-линеалом будем понимать такой KN-линеал, в котором каждая (b)-фундаментальная ограниченная по упорядочению последовательность имеет (b)-предел.

Теорема 1. *Пусть X—интервально полное K_σ N-пространство. Для того чтобы в X выполнялось условие* (А), *необходимо и достаточно, чтобы никакое его (o)-подпространство не было (o)-изоморфно обычному пространству m.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в X выполнено условие (А). Тогда это же справедливо и для любого его (o)-подпространства, ибо последнее содержится в X с сохранением граней. Остается заметить, что в (m) условие (A) не выполнено.

Достаточность. Допустим, что в X не выполнено условие (А). В силу теоремы 30.8 из [2] найдется такой элемент $a \in X_+$ и такая последовательность $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ компонент пространства X, что для $a_n = \mathrm{Pr}_{X_n} a$ будет $a_n \xrightarrow{(o)} 0$ и $\|a_n\|_X \geqslant c > 0$. Так как в любом KN-линеале из $0 \leqslant x_n \uparrow x$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x'$ следует, что $x = x'$, и так как X интервально полно, то ясно, что последовательность $\{a_n\}$ не может быть (b)-фундаментальной. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $\|a_n - a_{n+1}\|_X \geqslant d > 0$ для $n = 1, 2, \ldots$ Положим $b_n = a_n - a_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ Тогда ясно, что $b_n > 0$ и $b_i \wedge b_j = 0$ для $i \neq j$. Положим теперь для любого элемента $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in m$

$$y_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i. \tag{1}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i b_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \|\mu\|_m b_i = \|\mu\|_m \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \|\mu\|_m (a_1 - a_{n+1}) \leqslant \|\mu\|_m a_1$, то ряд в правой части (1) (o)-сходится в X. Положим $Y = \{y_\mu\}_{\mu \in m}$. Так как $b_i \wedge b_j = 0$ при $i \neq j$, то, как нетрудно проверить, Y — линейная подструктура в X, содержащаяся в X с сохранением граней. Кроме того,

$$\|y_\mu\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|\, b_i \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\mu\|_m b_i \right\|_X =$$

$$= \|\mu\|_m \left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i \right\|_X = \|\mu\|_m \|a_1\|_X ,$$

а также $\|y_\mu\|_X \geqslant |\mu_i|\, \|b_i\|_X$ для $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\|y_\mu\|_X \geqslant \|\mu\|_m d$. Итак,

$$d\|\mu\|_m \leqslant \|y_\mu\|_X \leqslant \|a_1\|_X \|\mu\|_m. \tag{2}$$

Из (2) следует, что Y есть (o)-подпространство X, причем оно (o)-изоморфно пространству m. Противоречие. Предложение 1 доказано.

Замечание 1. В части необходимости предложение 1 справедливо, разумеется, и в том случае, когда X — произвольный KN-линеал.

Замечание 2. Приведем примеры, показывающие, что в части достаточности ни свойство условной σ-полноты, ни свойство интервальной полноты опущены быть не могут.

а) Возьмем за X обычное пространство $C([0, 1])$. Это KB-линеал, не удовлетворяющий условию (А). Но так как X (b)-сепарабельно, то ясно, что X не содержит (o)-подпространства, (o)-изоморфного пространству m.

б) Пусть N—множество натуральных чисел с дискретной топологией, βN - его чехово бикомпактное расширение, $t_0 \in \beta N \setminus N$. За X возьмем пространство $C(\beta N)$, в котором зададим норму так: $\|x\|_X = \sup\limits_n \frac{|x(n)|}{n} + |x(t_0)|$. Тогда X есть KN-пространство, не удовлетворяющее условию (А) и не являющееся интервально полным. Последнее следует из того, что последовательность $x_k (k = 1, 2, \ldots)$, где

$$x_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant k, \\ 1 & \text{при } n > k, \end{cases}$$

(b)-фундаментальна, но не является (b)-сходящейся. Остается отметить, что так как X (b)-сепарабельно, то никакое его (o)-подпространство не является (o)-изоморфным m.

Замечание 3. Известно, что в интервально полном и (b)-сепарабельном K,N-пространстве выполнено условие (А). Этот результат легко вытекает из предложения 1, ибо пространство m не является (b)-сепарабельным.

Теорема 2. *Пусть X есть KB-пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *X есть (b)-рефлексивно*[1].

(II) *В X не существует (o)-подпространства, (o)-изоморфного пространству l.*

(III) *В X не существует (b)-подпространства, (b)-изоморфного пространству l.*

Доказательство. Импликация (I)$\to$(III) следует из того, что (b)-подпространство (b)-рефлексивного банахова пространства само (b)-рефлексивно. Импликация (III)$\to$(II) тривиальна. Доказываем (II)$\to$(I). Допустим, что X не (b)-рефлексивно. Тогда, в силу теоремы Огасавара ([1], с. 294), его (b)-сопряженное пространство X^* не может быть KB-пространством. Но в X^*, как во всяком сопряженном пространстве, выполнено условие (В) из определения KB-пространства ([1], с. 207). Следовательно, в X^* не выполнено условие (А). Поэтому в силу предложения 1 найдется такая последовательность $f_n \in X^*_+ (n = 1, 2, \ldots)$, что

а) $f_i \wedge f_j = 0$ при $i \neq j$;

б) для любого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in m$ справедливы неравенства

$$c_1\|\mu\|_m \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f_i\right\|_{X^*} \leqslant c_2\|\mu\|_m,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от μ.

Пусть X_i — компонента существенной положительности функционала f_i. Тогда X_i и X_j дизъюнктны при $i \neq j$. Для $i = 1, 2, \ldots$ найдем такой $x_i \in (X_i)_+$, что $\|x_i\|_X = 1$ и $f_i(x_i) \geqslant \frac{1}{2}\|f_i\|_{X^*}$. Теперь по каждому $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots) \in l$ построим $z_\lambda = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$. Положим

[1] Напомним, что (b)-рефлексивный KN-линеал является обязательно KB-пространством.

$Z=\{z_\lambda\}_{\lambda\in l}$. Так как $x_i\wedge x_j=0$ при $i\neq j$, то Z — линейная подструктура, содержащаяся в X с сохранением граней. Имеем

$$\|z_\lambda\|_X\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\|x_i\|_X=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|=\|\lambda\|_l.$$

Положим $F=\frac{1}{c_1}\sum_{i=1}^{\infty}f_i$. Ясно, что $\|F\|_{X^*}\leqslant 1$. Поэтому

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\Big\|_X=\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,x_i\Big\|_X\geqslant F\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,x_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,F(x_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\frac{1}{c_1}f_i(x_i)\geqslant\frac{1}{2c_1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\|f_i\|_{X^*}\geqslant\frac{1}{2c_1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,c_2=\frac{c_2}{2c_1}\|\lambda\|_l.$$

Итак, $\frac{c_2}{2c_1}\|\lambda\|_l\leqslant\|z_\lambda\|_X\leqslant\|\lambda\|_l$. Таким образом, Z является (o)-подпространством в X, (o)-изоморфным l. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что известны различные критерии рефлексивности банахова пространства, которые также основаны на изучении подпространств рассматриваемого банахова пространства. Например, критерий Джеймса ([3], с. 130): *для того чтобы банахово пространство с безусловным базисом было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало подпространств, изоморфных c_0 или l.*

В связи с этим заметим, что никакое (b)-подпространство произвольного KB-пространства не может быть (b)-изоморфно пространству c_0. Действительно, как известно, всякое KB-пространство слабо секвенциально полно[1]. Следовательно, этим же свойством обладает и всякое его (b)-подпространство. Остается отметить, что пространство c_0 не является слабо секвенциально полным. Однако наша теорема 2 не следует из теоремы Джеймса уже хотя бы потому, что в нашей теореме пространство X не предполагается даже сепарабельным.

Следует упомянуть также работы [4], [5], в которых имеются критерии рефлексивности несколько иного характера.

Во многих вопросах анализа важную роль играет такое следствие теоремы Хана — Банаха о распространении линейного функционала: если X — нормированное, X^* — его сопряженное пространство, то для любого $x\in X$ найдется такой $f\in X^*$, что $\|f\|_{X^*}=1$ и $f(x)=\|x\|_X$. Пусть теперь X есть KN-линеал, Y — некоторая компонента (b)-сопряженного пространства X^*, тотальная на X.

Определение 1. Будем говорить, что *для пары* (X, Y) *справедлива сильная теорема Хана — Банаха*, если для любого $x\in X$ найдется такой $f\in Y$, что $\|f\|_{X^*}=1$ и $f(x)=\|x\|_X$.

Определение 2. Будем говорить, что *для пары* (X, Y) *справедлива слабая теорема Хана — Банаха*, если для любого $x\in X$ и числа $\varepsilon>0$ найдется такой $f\in Y$, что $\|f\|_{X^*}\leqslant 1+\varepsilon$ и $f(x)=\|x\|_X$.

Особенно интересен случай, когда $Y=X^*\cap\overline{X}$, т. е. Y есть множество всех вполне линейных и одновременно (b)-линейных функ-

[1] Напомним теорему Огасавара [6]: *для того чтобы KB-линеал был KB-пространством, необходимо и достаточно, чтобы в нем каждая слабо сходящаяся в себе последовательность элементов имела слабый предел.*

ционалов на X. Напомним, что если некоторый KN-линеал имеет достаточное множество вполне линейных функционалов, то множество всех вполне линейных и одновременно (b)-линейных функционалов тоже достаточное. Известна [7] следующая

Теорема[1]. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство*[2] *с достаточным множеством вполне линейных функционалов, и пусть $Y = X^* \cap \overline{X}$.*

Тогда, чтобы для пары (X, Y) была справедлива слабая теорема Хана — Банаха, необходимо и достаточно, чтобы норма в X была универсально полунепрерывна.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов, и пусть $Y = X^* \cap \overline{X}$.*

Тогда, чтобы для пары (X, Y) была справедлива сильная теорема Хана — Банаха, необходимо и достаточно, чтобы норма в X была непрерывна.

Доказательство. Достаточность очевидна, ибо если условие (A) выполнено, то $Y = X^*$ ([1], с. 281). Доказываем необходимость. Пусть для пары (X, Y) справедлива сильная теорема Хана — Банаха. Тогда тем более справедлива и слабая теорема Хана—Банаха, и, следовательно, норма в X удовлетворяет условию (C′). Но тогда по теореме X. Накано [8] пространство X интервально полно. Допустим, что в X не выполнено условие (A). Тогда по предложению 1 в X найдется такое (o)-подпространство Z, которое (o)-изоморфно пространству m. Для пары $(Z, \overline{Z})$ справедлива сильная теорема Хана — Банаха. Это следует из того, что Z содержится в X с сохранением граней, и поэтому сужение на Z любого вполне линейного на X функционала будет вполне линейным функционалом на Z.

Пусть теперь $z_i \in Z_+$ $(i = 1, 2, \ldots)$ таковы, что $z_i \wedge z_j = 0$ при $i \neq j$, и для любого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in m$ будет:

$$c_1 \|\mu\|_m \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i z_i \Big\|_Z \leqslant c_2 \|\mu\|_m,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые постоянные. Другими словами $z_i (i = 1, 2, \ldots)$ — это элемент, соответствующий i-му орту пространства m при (o)-изоморфизме. Обозначим через T K-пространство всех ограниченных последовательностей $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots)$ вещественных чисел с естественным упорядочением, а через U обозначим K-пространство всех вещественных числовых последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$, тоже с естественным упорядочением. Функционал $\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i$ приводит T и U в двойственность. На T будем рассматривать норму

$$\|\mu\|_T = \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i z_i \Big\|_Z,$$

[1]) В работе [7] этот результат сформулирован несколько иначе.

[2]) Нетрудно показать, что эта теорема справедлива не только для $K_\sigma N$-пространств, но и для KN-линеалов.

а на U — норму $\|\lambda\|_U = \sup\{\langle\lambda, \mu\rangle : \|\mu\|_T \leqslant 1\}$. Ясно, что T есть KN-пространство, (o)-изоморфное m, а U есть KN-пространство, (o)-изоморфное l. Отметим следующее:

1) T алгебраически и структурно изоморфно и изометрично Z, в силу чего сильная теорема Хана — Банаха справедлива для пары $(T, \overline{T})$, т. е. для любого $\mu \in T$ найдется такой $\lambda \in U$, что $\|\lambda\|_U = 1$ и $\langle\lambda, \mu\rangle = \|\mu\|_T$;

2) Отсюда следует, что для любого $\mu \in T$ будет

$$\|\mu\|_T = \sup\{\langle\lambda, \mu\rangle : \|\lambda\|_U \leqslant 1\}. \tag{3}$$

В самом деле, в равенстве (3) левая часть не меньше правой по самому определению нормы в U. Обратное же неравенство имеет место в силу сказанного в предыдущем пункте.

3) Для любого $\mu \in T$ функционал $\varphi_\mu(\lambda) = \langle\lambda, \mu\rangle$, $\lambda \in U$, есть (b)-линейный функционал на U, причем $\|\varphi_\mu\|_{U^*} = \|\mu\|_T$. Обратно, всякий (b)-линейный функционал на U представим в такой форме.

Таким образом, функционал $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позволяет отождествить пространство T с пространством $U^* = \overline{U}$. Далее нам понадобится следующая теорема Р. Джеймса [9]: *если банахово пространство B нерефлексивно, то найдется такой линейный непрерывный функционал на B, который не достигает своего супремума на единичном шаре пространства B.*

У нас роль B будет играть пространство U. Так как U не (b)-рефлексивно, то в силу теоремы Джеймса найдется такой $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in T$, что $\|\mu\|_T = 1$ и $|\langle\lambda, \mu\rangle| < 1$ для любого такого $\lambda \in U$, что $\|\lambda\|_U \leqslant 1$. Сказанное противоречит тому, что для пары $(T, \overline{T})$ справедлива сильная теорема Хана — Банаха. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему 3 можно несколько усилить в части необходимости: доказать, что выполнение в $K_\sigma N$-пространстве X с достаточным множеством вполне линейных функционалов условия (А) равносильно тому, что для всякого $x \in X_+$ найдется такой $f \in (X^* \cap \overline{X})_+$, что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$.

Замечание 2. Отметим следующее. Пусть X есть K_σ-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов, p_1 и p_2 — эквивалентные монотонные нормы на нем. Через X_{p_1}, для краткости, будем обозначать $K_\sigma N$-пространство (X, p_1), а через X_{p_2} обозначим $K_\sigma N$-пространство (X, p_2). Очевидно, что $(X_{p_1})^*$ и $(X_{p_2})^*$ совпадают по запасу элементов и имеют эквивалентные нормы. Если для пары $(X, (X_{p_1})^* \cap \overline{X})$ справедлива сильная теорема Хана — Банаха, то это же верно и для пары $(X, (X_{p_2})^* \cap \overline{X})$. Аналогичное утверждение для слабой теоремы Хана — Банаха, вообще говоря, места не имеет. Тем самым справедливость первой из теорем для пространства X зависит только от рассматриваемой на X топологии, а справедливость второй — еще и от выбора задающей топологию нормы.

В заключение отметим следующее. И. Амемия [10] доказал, что если в KN-линеале X норма монотонно-полна, т. е. выполнено условие (В): если $0 \leqslant x_n \uparrow +\infty$ в X, то $\|x_n\|_X \to \infty$, то существует такая постоянная $0 < \alpha \leqslant 1$, что если $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X \geqslant \alpha\|x\|_X$. Из этой леммы Амемии легко можно вывести следующее простое

Предложение. Пусть X есть KN-пространство с монотонно-полной нормой, максимальное расширение S которого регулярно

([1], с. 179). Тогда на X можно ввести такую монотонную и универсально полунепрерывную норму $\|\cdot\|_X^0$, которая будет эквивалентна норме $\|\cdot\|_X$.

Действительно, достаточно для $x \in X$ положить

$$\|x\|_X^0 = \inf(\sup \|u_n\|_X),$$

где inf берется по всем последовательностям $\{u_n\}$ в X, удовлетворяющим условию $0 \leqslant u_n \uparrow |x|$. Легко проверить, что функционал $\|\cdot\|_X^0$ является монотонной нормой на X. Так как X — счетного типа, то условия (C) и (C′) для нормы $\|\cdot\|_X^0$ равносильны. Используя же теорему о диагональной последовательности ([1], с. 180), имеющую место в любом регулярном пространстве, без труда убеждаемся, что норма $\|\cdot\|_X^0$ полунепрерывна.

Тем самым, *если X есть KN-пространство с монотонно-полной нормой и достаточным множеством вполне линейных функционалов, причем максимальное расширение пространства X регулярно, то путем эквивалентной перенормировки X можно добиться того, что для пары $(X, X^* \cap \overline{X})$ будет справедлива слабая теорема Хана — Банаха.*

Авторы приносят благодарность проф. Б. З. Вулиху и доц. А. И. Векслеру за внимание к настоящей работе.

г. Ленинград

Поступило
12 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. Nakano H. Modulared semi-ordered linear spaces. Tokyo, 1950.
3. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., ИИЛ, 1961.
4. Bessaga C., Pelczynski A. A generalization of results of R. C. James concerning absolute basis in *B*-spaces. Studia math., t. 17, 1958, p. 165—174.
5. Мильман Д. П., Мильман В. Д. Некоторые геометрические свойства нерефлексивных пространств. ДАН СССР, т. 152, № 7, 1963, с. 52—54.
6. Ogasawara T. Theory of vector lattices. J. Sci. Hirosima Univ., A, v. 12, 1942, p. 37—100.
7. Mori T., Amemiya J., Nakano H. On the reflexivity of semi-continuous norms. Proc. Japan Acad., v. 31, № 10, 1955, p. 684—685.
8. Nakano H. Linear topology on semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, v. 12, 1953, p. 87—104.
9. James R. C. Characterizations of reflexivity. Studia math., t. 23, 1964, s. 205—216.
10. Amemiya J. A generalization of Riesz — Fischer's theorem. J. Math. Soc. Japan, v. 5, № 3—4, 1953.

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 19

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 4

ЛЕНИНГРАД
1966

УДК 513.88:513.83

Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский

О МЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛНОТЕ НОРМИРОВАННЫХ И СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУР

В настоящей заметке будут доказаны две теоремы, относящиеся к вопросу о метрической полноте счетно-нормированных структур. При изложении мы будем пользоваться терминологией из книги [1] (см., в частности, гл. VII, § 8). Как и в этой книге, если X—KN^*-линеал, то под расстоянием в X будем понимать функцию ρ, определяемую через полунормы формулой

$$\rho(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\frac{\|x-y\|_p}{1+\|x-y\|_p}.$$

Из определения расстояния сразу следует, что для любого натурального k

$$\rho(kx, ky)\leqslant k\rho(x, y). \tag{1}$$

1. Сначала установим лемму, которая в неявном виде, по крайней мере для нормированного случая, встречалась у различных авторов.

Лемма. *Для того чтобы KN^*-линеал X был (m)-полным, достаточно чтобы всякая (m)-фундаментальная возрастающая последовательность положительных элементов $x_n \in X$ имела (m)-предел.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — произвольная (m)-фундаментальная последовательность, т. е.

$$\lim_{m, n\to\infty}\rho(x_m, x_n)=0.$$

Не умаляя общности можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_n, x_{n+1})<\infty,$$

ибо, в противном случае, данную последовательность можно было бы разредить. Положим

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)_+,\quad z_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)_-\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Ясно, что

$$0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant y_3\leqslant\ldots$$
$$0\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant z_3\leqslant\ldots$$

Если $m>n$, то, благодаря инвариантности метрической функции ρ, а также монотонности полунорм,

$$\rho(y_n, y_m)=\rho(y_m-y_n, 0)=\rho\left(\sum_{k=n+1}^{m}(x_{k+1}-x_k)_+, 0\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\rho((x_{k+1}-x_k)_+, 0)\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\rho(x_{k+1}-x_k, 0)=$$
$$=\sum_{k=n+1}^{m}\rho(x_k, x_{k+1})\xrightarrow[m,\, n\to\infty]{}0.$$

Итак,

$$\lim_{m,\, n\to\infty}\rho(y_n, y_m)=0.$$

Аналогично

$$\lim_{m,\, n\to\infty}\rho(z_n, z_m)=0.$$

Таким образом, последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ (m)-фундаментальны. Поэтому существуют их (m)-пределы:

$$y=(m)-\lim_{n\to\infty}y_n$$

и

$$z=(m)-\lim_{n\to\infty}z_n.$$

Но тогда

$$y_n-z_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_{n+1}-x_1\xrightarrow{(m)}y-z.$$

Тем самым $x_n\xrightarrow{(m)}y-z+x_1$. Лемма доказана.

2. Из доказанной леммы чрезвычайно просто выводится теорема, доказанная для нормированных структур японским математиком И. Амемия [2]. Дадим обобщение этой теоремы для счетно-нормированного случая.

Теорема 1. *Для того чтобы KN^*-линеал X был (m)-полным, необходимо и достаточно, чтобы для любой (m)-фундаментальной, возрастающей последовательности положительных элементов $x_n\in X$ существовал* $\sup x_n$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность, а для этого покажем, что из условия теоремы вытекает выполнение условия предыдущей леммы.

Пусть $x_n\geqslant 0$ и образуют возрастающую (m)-фундаментальную последовательность. Выделим из нее частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$ так, что

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})\leqslant\frac{1}{k^3}\quad(k=1, 2, \ldots).\tag{2}$$

Так как по условию теоремы, существует $x=\sup x_n$, то

$$x_{n_1}+(o)-\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x.$$

Далее, составим ряд

$$x_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}k(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}).$$

Из (1) и (2) следует, что частичные суммы этого ряда образуют (m)-фундаментальную последовательность. А тогда, по условию теоремы, этот ряд (o)-сходится:

$$x_{n_1}+(o)-\sum_{k=1}^{\infty}k(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=y.$$

Покажем, что $x_{n_k} \xrightarrow{(m)} x$. Действительно,

$$x - x_{n_k} = (o) - \sum_{l=k}^{\infty} (x_{n_{l+1}} - x_{n_l}),$$

а потому

$$k(x - x_{n_k}) \leqslant (o) - \sum_{l=k}^{\infty} l(x_{n_{l+1}} - x_{n_l}) \leqslant y.$$

Следовательно,

$$x - x_{n_k} \leqslant \frac{1}{k} y.$$

Но $\frac{1}{k} y \xrightarrow{(m)} 0$, а тогда и $x - x_{n_k} \xrightarrow{(m)} 0$ $\left(\text{точнее } x_{n_k} \xrightarrow{(r)} x\right)$. Отсюда вытекает, что и $x_n \xrightarrow{(m)} x$. Условие леммы выполнено; тем самым теорема доказана.

Следствие. Пусть в $K_\sigma N^*$-пространстве X выполнено условие (B^*): если $x_n \uparrow +\infty$, $x_n \geqslant 0$, то $\|x_n\|_p \to \infty$, по крайней мере для одного p.

Тогда X (m)-полно.

Доказательство. Из условия (B^*) следует, что всякая возрастающая, (m)-фундаментальная последовательность элементов $x_n \in X_+$ ограничена по упорядочению. А так как $X - K_\sigma$-пространство, то существует $\sup x_n$.

3. Пусть, снова $X - KN^*$-линеал, а $\hat{X}$ — его K-пополнение. Для KN^*-линеалов справедлива теорема VII. 3.1 из [1], именно, если для любого $x \in \hat{X}$ определить полунормы по формуле

$$\|x\|_p^* = \inf_{x' \in X,\ x' \geqslant |x|} \|x'\|_p,$$

то $\hat{X}$ становится KN^*-пространством*).

Если при этом для $x, y \in \hat{X}$ положить

$$\rho^*(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\|x-y\|_p^*}{1 + \|x-y\|_p^*},$$

то ясно, что

$$\rho^*(x, y) = \inf_{z \in X,\ z \geqslant |x-y|} \rho(z, 0). \tag{3}$$

Теорема 2.**) *Если $X - KB^*$-линеал (т. е. (m)-полный KN^*-линеал), то и пространство $\hat{X}$ при указанном выше определении полунорм (m)-полно.*

Доказательство. На основании теоремы 1 достаточно убедиться, что выполнено следующее условие: если $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — произвольная последовательность положительных элементов из $\hat{X}$, такая что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(x_n, 0) < \infty,$$

*) Ясно, что при этом $\|x\|_p^* = \|x\|_p$ для любого $x \in X$ и всех p.

**) Эта теорема получена Г. Я. Лозановским и доложена им на семинаре в Ленинградском университете в 1964 году.

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (o)-сходится в $\hat{X}$. Из формулы (3) следует, что для каждого $n=1, 2, 3, \ldots$ существует такой элемент $y_n \in X$, что $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ и

$$\rho(y_n, 0) \leqslant 2\rho^*(x_n, 0).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(y_n, 0) < \infty.$$

Следовательно, благодаря (m)-полноте X, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (m)-сходится в X. Тем самым он и (o)-сходится в X. Так как $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ и $\hat{X} - K$-пространство, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (o)-сходится в $\hat{X}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Мы доказали, что K-пополнение KB^*-линеала снова (m)-*полно*. Иными словами K-пополнение не нарушает (m)-полноты. Любопытно сопоставить это с тем, что, как показал А. И. Векслер [3], (m)-пополнение KN^*-пространства может нарушить K-полноту. Точнее, А. И. Векслер построил пример такого KN-пространства, пополнение которого по норме не является K-пространством.

З а м е ч а н и е 2. И. Каваи [4] доказал теорему, аналогичную нашей теореме 2, для произвольных локально-выпуклых структур, но только при дополнительном очень сильном условии согласования топологии и упорядочения в исходном пространстве.

Summary

Two theorems concerning the metric completeness of the countably normed lattices are proved. One of them is a generalization of the well known Amemiya's theorem and the other is a new one.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. В у л и х. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. J. A m e m i y a. A generalization of Riesz-Fischer's theorem. J. Math. Soc. Japan, 5, 353—354, 1953.
3. А. И. В е к с л е р. О двух вопросах теории полуупорядоченных пространств. Сиб. матем. журнал, 5, № 4, 952—954, 1964.
4. J. K a w a i. Locally convex lattices. J. Math. Soc. Japan, 9, 281—314, 1957.

Статья поступила в редакцию 8 сентября 1965 г.

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 7

СЕРИЯ

МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 2

ЛЕНИНГРАД
1966

УДК 517. 432

Г. Я. Лозановский

О ПОЧТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В KB-ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящей работе рассматривается класс операторов („почти интегральные операторы"), которые можно до некоторой степени рассматривать как абстрактное обобщение интегральных операторов. Все специальные термины, определение которых можно найти в книге [1], используются в последующем без дополнительных пояснений.

Некоторые обозначения. Пусть X и Y — произвольные KB-пространства. Через $H_r(X \to Y)$ и $H_b(X \to Y)$ будем обозначать классы всех регулярных и (b)-линейных операторов из X в Y, соответственно. Через $R(X \to Y)$ будет обозначаться класс всех (b)-линейных операторов из X в Y, область значений которых конечномерна. X^*-пространство, (b)-сопряженное к X. Так как X — KB-пространство, то $X^* = \widetilde{X} = \overline{X}$, т. е. классы (b)-линейных, регулярных и вполне линейных функционалов на X совпадают. Если $A \in R(X \to Y)$, то найдутся $f_i \in X^*$ и $y_i \in Y$ такие, что

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i.$$

Поэтому $R(X \to Y) \subset H_r(X \to Y)$.

Определение. Пусть X и Y — произвольные KB-пространства. Обозначим через $K(X \to Y)$ компоненту K-пространства $H_r(X \to Y)$, порожденную множеством $R(X \to Y)$. Операторы, входящие в компоненту K, будем называть *почти интегральными операторами* из X в Y. Компонента K будет называться компонентой почти интегральных операторов из X в Y.

Напомним, что в широком классе случаев, например, когда Y имеет базис, замыкание линеала $R(X \to Y)$ в $H_b(X \to Y)$ по норме дает пространство всех вполне непрерывных операторов из X в Y ([2], стр. 554, упражнение 32). Компонента же в $H_r(X \to Y)$, порожденная линеалом $R(X \to Y)$, представляет во многих случаях пространство всех интегральных операторов из X в Y.

Пусть теперь $f \in X^*$ и $e \in Y$. Через $A_{f,e}$ будет обозначаться оператор из X в Y, действующий по формуле

$$A_{f,e}x = f(x)e, \quad x \in X.$$

$W_{f,e}$ — компонента в $H_r(X \to Y)$, порожденная оператором $A_{f,e}$.

Лемма 1. *Пусть X и Y — KB-пространства с единицами; f_0 — существенно положительный линейный функционал* в X; e_0 — единица в Y. Тогда*

$$W_{f_0, e_0} = K(X \to Y).$$

---

* Линейный функционал f на K-линеале X называется существенно положительным, если для любого $x > 0$ справедливо неравенство $f(x) > 0$.

Доказательство. Так как $A_{f_0, e_0} \in R(X \to Y)$, то $W_{f_0, e_0} \subset \subset K(X \to Y)$. Осталось доказать, что $K(X \to Y) \subset W_{f_0, e_0}$. Достаточно проверить, что $R(X \to Y) \subset W_{f_0, e_0}$, а для этого достаточно показать, что $A_{f, e} \in W_{f_0, e_0}$ при любых $f \in X^*$ и $e \in Y$. Не уменьшая общности, можно считать, что $f \geqslant 0$ и $e \geqslant 0$.

Для $m = 1, 2, 3, \ldots$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$f_m = f \wedge m f_0 \quad \text{и} \quad e_n = e \wedge n e_0.$$

Так как f_0 существенно положителен, то он является единицей в X^* ([1], теорема IX 2.2.), поэтому

$$f_m \uparrow f \quad \text{при } m \to \infty,$$

а так как e_0 — единица в Y, то

$$e_n \uparrow e \quad \text{при } n \to \infty.$$

Рассмотрим оператор A_{f_m, e_n}.

Согласно определению

$$A_{f_m, e_n} x = f_m(x) e_n,$$

поэтому для $x \geqslant 0$

$$A_{f_m, e_n} x \leqslant [m f_0(x)]\, n e_0 = mn f_0(x) e_0;$$

отсюда

$$0 \leqslant A_{f_m, e_n} \leqslant mn A_{f_0, e_0}.$$

Тем самым

$$A_{f_m, e_n} \in W_{f_0, e_0}.$$

Осталось проверить, что

$$A_{f_m, e_n} \uparrow A_{f, e} \quad \text{при} \quad m, n \uparrow \infty.$$

Пусть $x \in X_+$, тогда

$$A_{f_m, e_n} x = [(f \wedge m f_0)(x)]\,(e \wedge n e_0) \uparrow f(x) e = A_{f, e} x.$$

Лемма доказана.

Пример. Пусть $K(s, t)$ — измерима и ограничена почти всюду в единичном квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$. Покажем, что оператор

$$(Bx)(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

является почти интегральным оператором из $L[0, 1]$ в себя. Можно считать, что $K(s, t) \geqslant 0$ почти всюду. Для $x \in L[0, 1]$, $x > 0$ имеем

$$0 \leqslant (Bx)(s) \leqslant M \int_0^1 x(t)\, dt \quad \text{при почти всех } s,$$

где $M = \operatorname*{vraisup}_{0 \leqslant s,\, t \leqslant 1} K(s, t)$.

Положим $f_0(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$ и $e_0(t) \equiv 1$. Тогда

$$0 \leqslant B \leqslant M A_{f_0, e_0},$$

а потому $B \in K(L \to L)$.

Теорема 1. *Пусть X, Y, Z — KB-пространства с единицами; $M \in H_r(X \to Y)$ и $N \in H_t(Y \to Z)$. Если оператор M или N почти интегральный, то и оператор $P = NM$ является почти интегральным оператором из X в Z.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда M, $N \geqslant 0$.

а) Пусть оператор M почти интегральный. Возьмем существенно положительный функционал $f \in X^*$ *) и образуем оператор $A_{f,e} \in K(X \to Y)$, где e — единица в Y. Оператор $NA_{f,e} \in R(X \to Z)$, ибо область его значений одномерна. Тем самым $NA_{f,e} \in K(X \to Z)$. Положим

$$M_n = M \wedge nA_{f,e}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что $M_n \uparrow M$ при $n \to \infty$, так как по лемме 1 $A_{f,e}$ есть единица в $K(X \to Y)$.

Из неравенства $0 \leqslant M_n \leqslant nA_{f,e}$, следует, что $0 \leqslant NM_n \leqslant nNA_{f,e}$. Поэтому $NM_n \in K(X \to Z)$. Остается доказать, что $NM_n \uparrow NM$ при $n \to \infty$.

Но $M_n x \uparrow Mx$ для каждого $x \in X_+$; тогда в силу (o)-линейности N $NM_n x \uparrow NMx$, а потому $NM_n \uparrow NM$.

б) Пусть оператор N почти интегральный. Возьмем существенно положительный функционал f на Y и единицу e в Z. Оператор $A_{f,e} \in K(Y \to Z)$.

При любом $x \in X$

$$A_{f,e} Mx = A_{f,e}[Mx] = f[Mx]\, e,$$

поэтому область значений оператора $A_{f,e}M$ одномерна, следовательно, $A_{f,e}M \in K(X \to Z)$.

Для $x \in X_+$

$$(N \wedge nA_{f,e})\, Mx \uparrow NMx,$$

ибо $A_{f,e}$ — единица в $K(Y \to Z)$. Поэтому

$$(N \wedge nA_{f,e})\, M \uparrow NM.$$

Так как

$$0 \leqslant (N \wedge nA_{f,e})\, M \leqslant nA_{f,e} M \in K(X \to Z),$$

то

$$NM \in K(X \to Z).$$

Теорема доказана.

Пусть X — KB-пространство с единицей. Пространство $H_b(X \to X)$ является кольцом относительно обычного умножения операторов

$$(AB)\, x = A\,(Bx).$$

$H_r(X \to X)$ является подкольцом кольца $H_b(X \to X)$ относительно этой операции умножения, а значит $H_r(X \to X)$ само является кольцом. При этом из теоремы 1 вытекает.

Следствие. Если X — KB-пространство с единицей, то почти интегральные операторы образуют двусторонний идеал в кольце всех регулярных операторов $H_r(X \to X)$.

Теорема 2. *Пусть X — дискретное KB-пространство с единицей. Тогда $K(X \to X) = H_r(X \to X)$, т. е. каждый регулярный оператор почти интегральный.*

Доказательство. Обозначим орты пространства X через e_1, e_2, ... (их может быть конечное или счетное множество). I — тождественный оператор из X в X. В силу следствия из теоремы 1 достаточно показать, что $I \in K(X \to X)$.

---

*) В KB-пространстве с единицей всегда имеется существенно положительный линейный функционал ([3], глава XI, § 1).

Будем вести рассуждение для случая, когда множество ортов счетное. Обозначим через X_n компоненту в X, порожденную n первыми ортами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и положим

$$I_n x = \Pi p_{X_n} x.$$

Тогда, очевидно, $I_n x \uparrow x$ для $x \in X_+$, следовательно,

$$I = \sup I_n.$$

Так как, очевидно, $I_n \in K(X \to X)$, ибо его область значений конечномерна, то и $I \in K(X \to X)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть X — непрерывное КВ-пространство с единицей e. Тогда тождественный оператор I из X в X дизъюнктен компоненте почти интегральных операторов из X в X.*

Докажем сначала одну лемму.

Лемма 2. *Если X — непрерывное КВ-пространство с единицей, то для каждого единичного элемента $e' > 0$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такой единичный элемент e'', что*

$$0 < e'' < e' \quad \text{и} \quad \|e''\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Будем называть множество $M \subset X$ „отмеченным", если

1) оно состоит из единичных элементов;
2) $0 \in M$;
3) $e' \in M$;
4) M есть цепь относительно упорядочения, индуцированного из X;
5) e' — наибольший элемент в M.

Рассмотрим совокупность **M** всех отмеченных множеств M, упорядоченную по включению. Ясно, что любая цепь в **M** имеет верхнюю грань (это будет объединение всех M, входящих в данную цепь). Поэтому существует максимальное отмеченное множество M_0. Так как M_0 максимально, а X непрерывно, то $\inf M_0 = 0$. Отсюда следует, что

$$\inf_{x \in M_0} \|x\| = 0$$

(см. [1], стр. 208).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Возьмем существенно положительный функционал f на X и построим оператор $A_{f,e} \in K(X \to X)$, где e — единица в X. Так как $A_{f,e}$ единица в $K(X \to X)$, то достаточно доказать, что $B = A_{f,e} \wedge I = 0$. Так как B — (0)-линеен, то достаточно доказать, что $Be = 0$.

Пусть $Be = z > 0$. Тогда существуют такие число $\alpha > 0$ и единичный элемент $e' > 0$, что $z \geqslant \alpha e'$ ([1], лемма IV.10.3.).

Согласно лемме 2 найдется такой единичный элемент e'', что

$$0 \leqslant e'' \leqslant e' \quad \text{и} \quad \|e''\| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное наперед заданное положительное число. В силу определения нижней грани двух операторов

$$z = Be = \inf_{\substack{x,\, y \geqslant 0 \\ x+y=e}} \{x + f(y)\, e\} \leqslant (e - e'') + f(e'')\, e \leqslant$$
$$\leqslant e - e'' + \|f\| \|e''\| e \leqslant e - e'' + \|f\| \varepsilon e.$$

Отсюда $e - e'' + \|f\|\varepsilon e \geqslant \alpha e' \geqslant \alpha e''$. Так как $e - e'' de''$, то $\|f\|\varepsilon e \geqslant \alpha e''$. Поэтому $\|f\|\varepsilon e'' \geqslant \alpha e''$, или $\varepsilon \geqslant \frac{\alpha}{\|f\|}$, что противоречит произвольности $\varepsilon > 0$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть X — непрерывное KB-пространство с единицей. Тогда никакой почти интегральный оператор из X в X не может иметь регулярного обратного.

Это вытекает из того, что $K(X \to X)$ есть двусторонний идеал в $H_r(X \to X)$.

Теорема 4. *Пусть X—сепарабельное непрерывное KB-пространство с аддитивной нормой. Тогда каждый вполне непрерывный оператор из X в X является почти интегральным.*

Доказательство. Как уже упоминалось выше, каждый вполне непрерывный оператор из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 с базисом является пределом в равномерной топологии последовательности операторов с конечномерными областями значений ([2], стр. 554, упражнение 32). Кроме того, так как X — KB-пространство с аддитивной нормой, то $H_r(X \to X)$ с обычной операторной нормой есть (b)-полное KN-пространство ([1], стр. 252).

Поэтому компонента $K(X \to X)$ замкнута в $H_r(X \to X)$. Так как $R(X \to X) \subset K(X \to X)$, то и замыкание $R(X \to X)$ содержится в $K(X \to X)$. Таким образом, все вполне непрерывные операторы из X в X содержатся в $K(X \to X)$.

Теорема доказана.

Замечание 1. В любом сепарабельном непрерывном KB-пространстве X с аддитивной нормой существует оператор из X в X почти интегральный, но не вполне непрерывный.

Действительно, так как все сепарабельные непрерывные KB-пространства с аддитивной нормой изоморфны, будем считать, что $X = L(-\infty, +\infty)$. А в этом пространстве требуемый оператор может быть определен, например, по формуле

$$(Ax)(s) = \int_0^1 x(s-t)\,dt.$$

Несложную проверку того, что этот оператор почти интегральный, но не вполне непрерывный, предоставляем читателю.

Замечание 2. Из теорем 3 и 4 вытекает, что в сепарабельном непрерывном KB-пространстве с аддитивной нормой* тождественный оператор I дизъюнктен любому вполне непрерывному оператору A. А тогда справедливо равенство

$$\|I + A\| = 1 + \|A\|^{**}$$

Покажем это

$$\|I + A\| = \|I + |A|\| = \sup_{\substack{x \geqslant 0 \\ \|x\| \leqslant 1}} \|x + |A|x\| =$$

$$= \sup_{\substack{x \geqslant 0 \\ \|x\| \leqslant 1}} \{\|x\| + \||A|x\| = 1 + \||A|\| = 1 + \|A\|.$$

---

* Из сепарабельности KB-пространства вытекает существование в нем единицы.

** Ранее И. К. Даугавет доказал [4], что равенство $\|I + A\| = 1 + \|A\|$ справедливо для любого вполне непрерывного оператора A в пространстве C.

Теорема 5.

(1) *Пусть функция* $K(s,\ t)$ *удовлетворяет условиям:*

а) она поверхностно измерима в квадрате $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$;

б) $\operatorname{vraisup}_t \int_0^1 |K(s,\ t)|\,ds < +\infty$.

Тогда оператор

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s,\ t)\,x(t)\,dt \tag{1}$$

является почти интегральным оператором из $L[0,\ 1]$ *в* $L[0,\ 1]$.

(2) *Для всякого почти интегрального оператора* A *из* $L[0,\ 1]$ *в* $L[0,\ 1]$ *найдется, притом единственная с точностью до эквивалентности, функция* $K(s,\ t)$, *удовлетворяющая условиям* а) *и* б) *и такая, что справедлива формула* (1).

Таким образом, в пространстве $L[0,\ 1]$ почти интегральные операторы совпадают с операторами, допускающими интегральное представление.

Доказательство.

(1) То, что оператор A, заданный формулой (1), регулярен, известно ([3] стр. 306). Покажем, что он почти интегральный. Можно считать, что $K(s,\ t) \geqslant 0$ почти всюду на $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$.

Положим

$$K_n(s,\ t) = K(s,\ t) \wedge n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Тогда

$$K_n(s,\ t) \uparrow K(s,\ t) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому при почти всех s

$$\int_0^1 K_n(s,\ t)\,x(t)\,dt \uparrow \int_0^1 K(s,\ t)\,x(t)\,dt$$

для любого $x \geqslant 0$ из $L[0,\ 1]$. Операторы

$$(A_n x)(s) = \int_0^1 K_n(s,\ t)\,x(t)\,dt$$

почти интегральные, ибо $K_n(s,\ t)$ ограничена (см. пример после леммы 1). Так как $A_n \uparrow A$, то и A почти интегральный.

(2) Пусть $A \geqslant 0$ — почти интегральный оператор из $L[0,\ 1]$ в $L[0,\ 1]$. Через B обозначим оператор интегрирования

$$(Bx)(s) \equiv \int_0^1 x(t)\,dt,$$

т. е.

$$Bx = \int_0^1 x(t)\,dt \cdot \mathbf{1}, \quad \text{где} \quad \mathbf{1}(s) \equiv 1.$$

Так как оператор B является единицей в компоненте почти интегральных операторов, то

$$A = \sup_n (A \wedge nB).$$

Рассмотрим операторы

$$A \wedge nB, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Так как

$$0 \leqslant A \wedge nB \leqslant nB,$$

то $A \wedge nB$ переводит каждую суммируемую функцию в почти всюду ограниченную и поэтому можно считать, что он действует из $L[0, 1]$ в любое $L_p[0, 1]$ $(p > 1)$.

Следовательно, существует функция $K_n(s, t)$, удовлетворяющая условиям (а) и (б), такая, что

$$(A \wedge nB)x(s) = \int_0^1 K_n(s, t)x(t)dt$$

([3] стр. 307, теорема 3.21).

Легко доказать, что если интегральный оператор из L в L положителен, то определяющее его ядро неотрицательно почти всюду в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$. Отсюда, в частности, вытекает единственность ядра интегрального оператора. Отсюда же следует, что ядра $K_n(s, t)$ образуют монотонную почти всюду последовательность.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве, получим

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt,$$

где

$$K(s, t) = \sup_n K_n(s, t).$$

Ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условиям (а) и (б) в силу ([3], стр. 306). Теорема доказана.

Замечание. Отсюда вытекает известная теорема о том, что всякий вполне непрерывный оператор A из $L[0, 1]$ в $L[0, 1]$ можно представить в виде

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt,$$

где $K(s, t)$ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 5, обратное неверно согласно замечанию 1 к теореме 4.

Пусть X и Y — произвольные KB-пространства, являющиеся фундаментами в $L[0, 1]$ и содержащие $M[0, 1]$.

Через B_{XY} будем обозначать ограничение оператора интегрирования B на пространство X, т. е.

$$(B_{XY}x)(s) \equiv \int_0^1 x(t)\,dt \quad \text{для } x \in X,$$

причем $B_{XY}x \in Y$.

Лемма 3. *Пусть C — аддитивный и однородный оператор из X в Y, удовлетворяющий неравенству*

$$0 \leqslant C \leqslant B_{XY}.$$

Тогда существует такая суммируемая в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ функция $K(s, t)$, что для $x \in X$

$$(Cx)(s) = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $x \in X_+$, тогда

$$0 \leqslant Cx \leqslant \left(\int_0^1 x(t)dt\right) \cdot 1.$$

Поэтому

$$\|Cx\|_L \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 x(t)\,dt \right) ds = \int_0^1 x(t)\,dt = \|x\|_L,$$

т. е.

$$\|Cx\|_L \leqslant \|x\|_L.$$

То же неравенство справедливо и при любом $x \in X$. Так как X плотно в $L[0, 1]$ по обычной норме и C ограничен по этой норме, то C единственным образом распространяется с сохранением непрерывности до ограниченного линейного оператора $\hat{C}$ из $L[0, 1]$ в $L[0, 1]$.

Пусть $x(t) \geqslant 0$ — произвольная функция из $L[0, 1]$. Положим $x_n = x \wedge n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $x_n \in X$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$ в $L[0, 1]$. Имеем:

$$\hat{C}x = (b) - \lim_{n\to\infty} \hat{C}x_n = (b) - \lim_{n\to\infty} Cx_n.$$

Так как при почти всех s,

$$0 \leqslant (Cx_n)(s) \leqslant \int_0^1 x_n(t)\,dt \leqslant \int_0^1 x(t)\,dt$$

по условию, то

$$0 \leqslant \left(\hat{C}x\right)(s) \leqslant \int_0^1 x(t)\,dt$$

почти всюду.

Из неравенства $0 \leqslant \hat{C} \leqslant B$ (B, как и раньше, — оператор интегрирования; при этом мы знаем, что он почти интегральный) и теоремы 5 вытекает существование такой суммируемой функции $K(s, t)$, что для $x \in X$

$$(Cx)(s) = \int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt.$$

Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть X и Y — произвольные КВ-пространства, являющиеся фундаментами в $L[0, 1]$ и содержащие $M[0, 1]$, A — почти интегральный оператор из X в Y. Тогда существует такая суммируемая в квадрате $0 \leqslant s$, $t \leqslant 1$ функция $K(s, t)$, что*

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt, \quad x \in X.$$

Доказательство. По лемме 3 существует такая суммируемая в единичном квадрате функция $K_n(s, t)$, что

$$(A \wedge nB_{XY})\,x(s) = \int_0^1 K_n(s, t)\,x(t)\,dt, \quad x \in X.$$

Положим

$$K(s, t) = \sup_n K_n(s, t).$$

Тогда

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt.^*$$

* Из леммы 1 следует, что оператор B_{XY} является единицей в компоненте $K(X \to Y)$, а потому $(A \wedge nB_{XY}) \uparrow A$.

Так как, очевидно, $K_n(s, t) \geqslant 0$, то и $K(s, t) \geqslant 0$. Так как $X \supset M[0, 1]$, а $Y \subset L[0, 1]$, то, положив $x(t) \equiv 1$, видим, что

$$\int_0^1 ds \int_0^1 K(s, t)\, dt < +\infty,$$

поэтому $K(s, t)$ суммируема.

Замечание 1. Так же как в теореме 5, ядро $K(s, t)$ в теореме 6 определяется единственным образом (с точностью до эквивалентности).

Замечание 2. Пусть функция $K(s, t)$ измерима в квадрате $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ и такова, что формула

$$(Ax)(s) = \int_0^1 |K(s, t)|\, x(t)\, dt$$

задает оператор из X в Y.

Тогда этот оператор и оператор

$$(A_1 x)(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

являются почти интегральными.

Действительно, если от ядра $|K(s, t)|$ перейти к его срезкам, то получатся, как было показано в начале статьи, почти интегральные операторы. Предельным переходом убеждаемся, что и оператор A почти интегральный.

После этого очевидно, что тем же свойством обладает и оператор A_1.

Теорема 7. *Пусть X и Y — KB-пространства, являющиеся фундаментами в $L[0, 1]$ и содержащие $M[0, 1]$; A — регулярный оператор из X в Y. Тогда существует такая суммируемая в квадрате $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ функция $K(s, t)$, что для любого $x \in X$*

$$(Ax)(s) = \frac{d}{ds} \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

при почти всех s.

Доказательство. Рассмотрим оператор $E: Y \to L[0, 1]$, действующий по формуле

$$(Ex)(s) = \int_0^s x(t)\, dt.$$

Так как $0 \leqslant E \leqslant B_{YL}$, то $E \in K(Y \to L)$.

Поэтому оператор EA является почти интегральным из X в $L[0, 1]$. Следовательно, по теореме 6 найдется такая суммируемая в квадрате $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ функция $K(s, t)$, что

$$(EAx)(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

т. е.

$$\int_0^s (Ax)(s)\, ds = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

для любого $x \in X$.

Продифференцировав по s, получим

$$(Ax)(s) = \frac{d}{ds}\int_0^1 K(s,\ t)\,x(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит проф. Б. З. Вулиха за руководство.

Summary

Let X and Y be the arbitrary KB-spaces, $H_r(X \to Y)$ be a K-space of all regular operators on X into Y, $R(X \to Y)$ be a set of all (b)-linear finite-dimensional operators on X into Y.

Let $K(X \to Y)$ be a component of $H_r(X \to Y)$ which is generated by $R(X \to Y)$. $K(X \to Y)$ is called a component of almost integral operators on X into Y. The paper is an endeavour to investigate the almost integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*. М., Физматгиз, 1961.
2. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц. Линейные операторы, общая теория. М., ИЛ, 1962.
3. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
4. И. К. Даугавет. Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C. УМН, **XVIII**, вып. 5(113), 1963.
5. И. М. Гельфанд. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. Матем. сб., 4(46), 1938.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 1964 г.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАТЕМАТИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА
КАЗАНЬ

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1967 МАТЕМАТИКА № 11 (66)

УДК 519.55

Г. Я. Лозановский, А. А. Меклер

ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И РЕФЛЕКСИВНОСТЬ В НОРМИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУРАХ

Основным результатом работы являются теоремы 2 и 3. В первой из них приводится один критерий рефлексивности (в смысле Банаха) нормированной линейной структуры. Во второй решается следующий вопрос: при каких условиях для любого $x \in X$ (X есть $K_\sigma N$-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов) найдется такой вполне линейный и непрерывный по норме функционал f, что

$$\|f\|_{X^*} = 1 \text{ и } f(x) = \|x\|_X .$$

В работе, в основном, используются обозначения и терминология, принятые в [1] и [2].

Напомним следующее. Пусть X — произвольный KN-линеал. Норма в X называется *непрерывной*, если в X выполнено условие (A): если $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\|_X \to 0$.

Норма в X называется *универсально непрерывной*, если в X выполнено условие (A′): если направление $x_\alpha \in X_+$ $(\alpha \in A)$ и $x_\alpha \downarrow 0$, то $\|x_\alpha\|_X \to 0$.

Норма в X называется *полунепрерывной*, если в X выполнено условие (C): если $x_n \in X_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \uparrow x \in X$, то $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$.

Наконец, норма в X называется *универсально полунепрерывной*, когда в X выполнено условие (C′): если направление $x_\alpha \in X_+$ $(\alpha \in A)$ и $x_\alpha \uparrow x \in X$, то $\|x_\alpha\|_X \to \|x\|_X$.

Как известно, для произвольного KN-линеала верны следующие импликации: (C) $\Leftarrow$ (C′) $\Leftarrow$ (A′) $\Rightarrow$ (A) $\Rightarrow$ (C). Известно также, что для $K_\sigma N$-пространств свойства (A) и (A′) равносильны. Условимся также о следующем.

1) Под (b)-подпространством нормированного пространства будем понимать его линейное замкнутое подмножество, т. е. подпространство в смысле теории нормированных пространств.

2) Под (σ)-подпространством KN-линеала будем понимать его (b)-подпространство, являющееся одновременно линейной подструктурой и содержащееся в исходном KN-линеале с сохранением граней.

3) Два нормированных пространства будем называть *(b)-изоморфными*, если они изоморфны алгебраически и топологически.

4) Два KN-линеала будем называть (o)-*изоморфными*, если они изоморфны алгебраически, топологически и структурно.

5) Под *интервально полным* KN-линеалом будем понимать такой KN-линеал, в котором каждая (b)-фундаментальная ограниченная по упорядочению последовательность имеет (b)-предел.

Теорема 1. *Пусть X—интервально полное $K_\sigma N$-пространство. Для того чтобы в X выполнялось условие* (A), *необходимо и достаточно, чтобы никакое его (o)-подпространство не было (o)-изоморфно обычному пространству m.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в X выполнено условие (A). Тогда это же справедливо и для любого его (o)-подпространства, ибо последнее содержится в X с сохранением граней. Остается заметить, что в (m) условие (A) не выполнено.

Достаточность. Допустим, что в X не выполнено условие (A). В силу теоремы 30.8 из [2] найдется такой элемент $a \in X_+$ и такая последовательность $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ компонент пространства X, что для $a_n = \Pr_{X_n} a$ будет $a_n \xrightarrow{(o)} 0$ и $\|a_n\|_X \geqslant c > 0$. Так как в любом KN-линеале из $0 \leqslant x_n \uparrow x$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x'$ следует, что $x = x'$, и так как X интервально полно, то ясно, что последовательность $\{a_n\}$ не может быть (b)-фундаментальной. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $\|a_n - a_{n+1}\|_X \geqslant d > 0$ для $n = 1, 2, \ldots$ Положим $b_n = a_n - a_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ Тогда ясно, что $b_n > 0$ и $b_i \wedge b_j = 0$ для $i \neq j$. Положим теперь для любого элемента $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in m$

$$y_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i. \tag{1}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i b_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \|\mu\|_m b_i = \|\mu\|_m \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \|\mu\|_m (a_1 - a_{n+1}) \leqslant \|\mu\|_m a_1$, то ряд в правой части (1) (o)-сходится в X. Положим $Y = \{y_\mu\}_{\mu \in m}$. Так как $b_i \wedge b_j = 0$ при $i \neq j$, то, как нетрудно проверить, Y — линейная подструктура в X, содержащаяся в X с сохранением граней. Кроме того,

$$\|y_\mu\|_X = \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i \Big\|_X \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|\, b_i \Big\|_X \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\mu\|_m b_i \Big\|_X =$$
$$= \|\mu\|_m \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i \Big\|_X = \|\mu\|_m \|a_1\|_X,$$

а также $\|y_\mu\|_X \geqslant |\mu_i|\, \|b_i\|_X$ для $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\|y_\mu\|_X \geqslant \|\mu\|_m d$. Итак,

$$d \|\mu\|_m \leqslant \|y_\mu\|_X \leqslant \|a_1\|_X \|\mu\|_m. \tag{2}$$

Из (2) следует, что Y есть (o)-подпространство X, причем оно (o)-изоморфно пространству m. Противоречие. Предложение 1 доказано.

Замечание 1. В части необходимости предложение 1 справедливо, разумеется, и в том случае, когда X — произвольный KN-линеал.

Замечание 2. Приведем примеры, показывающие, что в части достаточности ни свойство условной σ-полноты, ни свойство интервальной полноты опущены быть не могут.

а) Возьмем за X обычное пространство $C([0, 1])$. Это KB-линеал, не удовлетворяющий условию (А). Но так как X (b)-сепарабельно, то ясно, что X не содержит (o)-подпространства, (o)-изоморфного пространству m.

б) Пусть N—множество натуральных чисел с дискретной топологией, βN - его чехово бикомпактное расширение, $t_0 \in \beta N \setminus N$. За X возьмем пространство $C(\beta N)$, в котором зададим норму так: $\|x\|_X = \sup_n \frac{|x(n)|}{n} + |x(t_0)|$. Тогда X есть KN-пространство, не удовлетворяющее условию (А) и не являющееся интервально полным. Последнее следует из того, что последовательность $x_k (k = 1, 2, \ldots)$, где

$$x_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant k, \\ 1 & \text{при } n > k, \end{cases}$$

(b)-фундаментальна, но не является (b)-сходящейся. Остается отметить, что так как X (b)-сепарабельно, то никакое его (o)-подпространство не является (o)-изоморфным m.

Замечание 3. Известно, что в интервально полном и (b)-сепарабельном $K_\sigma N$-пространстве выполнено условие (А). Этот результат легко вытекает из предложения 1, ибо пространство m не является (b)-сепарабельным.

Теорема 2. *Пусть X есть KB-пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *X есть (b)-рефлексивно* [1].

(II) *В X не существует (o)-подпространства, (o)-изоморфного пространству l.*

(III) *В X не существует (b)-подпространства, (b)-изоморфного пространству l.*

Доказательство. Импликация (I) $\to$ (III) следует из того, что (b)-подпространство (b)-рефлексивного банахова пространства само (b)-рефлексивно. Импликация (III) $\to$ (II) тривиальна. Доказываем (II) $\to$ (I). Допустим, что X не (b)-рефлексивно. Тогда, в силу теоремы Огасавара ([1], с. 294), его (b)-сопряженное пространство X^* не может быть KB-пространством. Но в X^*, как во всяком сопряженном пространстве, выполнено условие (В) из определения KB-пространства ([1], с. 207). Следовательно, в X^* не выполнено условие (А). Поэтому в силу предложения 1 найдется такая последовательность $f_n \in X^*_+ (n = 1, 2, \ldots)$, что

а) $f_i \wedge f_j = 0$ при $i \neq j$;

б) для любого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in m$ справедливы неравенства

$$c_1 \|\mu\|_m \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f_i \right\|_{X^*} \leqslant c_2 \|\mu\|_m,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от μ.

Пусть X_i — компонента существенной положительности функционала f_i. Тогда X_i и X_j дизъюнктны при $i \neq j$. Для $i = 1, 2, \ldots$ найдем такой $x_i \in (X_i)_+$, что $\|x_i\|_X = 1$ и $f_i(x_i) \geqslant \frac{1}{2}\|f_i\|_{X^*}$. Теперь по каждому $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots) \in l$ построим $z_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$. Положим

---

1) Напомним, что (b)-рефлексивный KN-линеал является обязательно KB-пространством.

$Z=\{z_\lambda\}_{\lambda\in l}$. Так как $x_i\wedge x_j=0$ при $i\neq j$, то Z — линейная подструктура, содержащаяся в X с сохранением граней. Имеем

$$\|z_\lambda\|_X\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\|x_i\|_X=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|=\|\lambda\|_l.$$

Положим $F=\frac{1}{c_1}\sum_{i=1}^{\infty}f_i$. Ясно, что $\|F\|_{X^*}\leqslant 1$. Поэтому

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\Big\|_X=\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|x_i\Big\|_X\geqslant F\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|x_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|F(x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\frac{1}{c_1}f_i(x_i)\geqslant\frac{1}{2c_1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\|f_i\|_{X^*}\geqslant\frac{1}{2c_1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|c_2=\frac{c_2}{2c_1}\|\lambda\|_l.$$

Итак, $\frac{c_2}{2c_1}\|\lambda\|_l\leqslant\|z_\lambda\|_X\leqslant\|\lambda\|_l$. Таким образом, Z является (o)-подпространством в X, (o)-изоморфным l. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что известны различные критерии рефлексивности банахова пространства, которые также основаны на изучении подпространств рассматриваемого банахова пространства. Например, критерий Джеймса ([3], с. 130): *для того чтобы банахово пространство с безусловным базисом было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало подпространств, изоморфных c_0 или l.*

В связи с этим заметим, что никакое (b)-подпространство произвольного KB-пространства не может быть (b)-изоморфно пространству c_0. Действительно, как известно, всякое KB-пространство слабо секвенциально полно [1]. Следовательно, этим же свойством обладает и всякое его (b)-подпространство. Остается отметить, что пространство c_0 не является слабо секвенциально полным. Однако наша теорема 2 не следует из теоремы Джеймса уже хотя бы потому, что в нашей теореме пространство X не предполагается даже сепарабельным.

Следует упомянуть также работы [4], [5], в которых имеются критерии рефлексивности несколько иного характера.

Во многих вопросах анализа важную роль играет такое следствие теоремы Хана — Банаха о распространении линейного функционала: если X — нормированное, X^* — его сопряженное пространство, то для любого $x\in X$ найдется такой $f\in X^*$, что $\|f\|_{X^*}=1$ и $f(x)=\|x\|_X$. Пусть теперь X есть KN-линеал, Y — некоторая компонента (b)-сопряженного пространства X^*, тотальная на X.

Определение 1. Будем говорить, что для пары (X, Y) справедлива сильная теорема Хана — Банаха, если для любого $x\in X$ найдется такой $f\in Y$, что $\|f\|_{X^*}=1$ и $f(x)=\|x\|_X$.

Определение 2. Будем говорить, что для пары (X, Y) справедлива слабая теорема Хана — Банаха, если для любого $x\in X$ и числа $\varepsilon>0$ найдется такой $f\in Y$, что $\|f\|_{X^*}\leqslant 1+\varepsilon$ и $f(x)=\|x\|_X$.

Особенно интересен случай, когда $Y=X^*\cap\bar{X}$, т. е. Y есть множество всех вполне линейных и одновременно (b)-линейных функ-

[1] Напомним теорему Огасавара [6]: *для того чтобы KB-линеал был KB-пространством, необходимо и достаточно, чтобы в нем каждая слабо сходящаяся в себе последовательность элементов имела слабый предел.*

ционалов на X. Напомним, что если некоторый KN-линеал имеет достаточное множество вполне линейных функционалов, то множество всех вполне линейных и одновременно (b)-линейных функционалов тоже достаточное. Известна [7] следующая

Теорема[1]. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство*[2] *с достаточным множеством вполне линейных функционалов, и пусть $Y = X^* \cap \overline{X}$.*

Тогда, чтобы для пары (X, Y) была справедлива слабая теорема Хана — Банаха, необходимо и достаточно, чтобы норма в X была универсально полунепрерывна.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть X есть $K_\sigma N$-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов, и пусть $Y = X^* \cap \overline{X}$.*

Тогда, чтобы для пары (X, Y) была справедлива сильная теорема Хана — Банаха, необходимо и достаточно, чтобы норма в X была непрерывна.

Доказательство. Достаточность очевидна, ибо если условие (A) выполнено, то $Y = X^*$ ([1], с. 281). Доказываем необходимость. Пусть для пары (X, Y) справедлива сильная теорема Хана — Банаха. Тогда тем более справедлива и слабая теорема Хана—Банаха, и, следовательно, норма в X удовлетворяет условию (C′). Но тогда по теореме X. Накано [8] пространство X интервально полно. Допустим, что в X не выполнено условие (A). Тогда по предложению 1 в X найдется такое (o)-подпространство Z, которое (o)-изоморфно пространству m. Для пары $(Z, \overline{Z})$ справедлива сильная теорема Хана — Банаха. Это следует из того, что Z содержится в X с сохранением граней, и поэтому сужение на Z любого вполне линейного на X функционала будет вполне линейным функционалом на Z.

Пусть теперь $z_i \in Z_+$ $(i = 1, 2, \ldots)$ таковы, что $z_i \wedge z_j = 0$ при $i \neq j$, и для любого $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in m$ будет:

$$c_1 \|\mu\|_m \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i z_i \right\|_Z \leqslant c_2 \|\mu\|_m,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые постоянные. Другими словами z_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — это элемент, соответствующий i-му орту пространства m при (o)-изоморфизме. Обозначим через T K-пространство всех ограниченных последовательностей $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots)$ вещественных чисел с естественным упорядочением, а через U обозначим K-пространство всех вещественных числовых последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$, тоже с естественным упорядочением. Функционал $(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i$ приводит T и U в двойственность. На T будем рассматривать норму

$$\|\mu\|_T = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i z_i \right\|_Z,$$

[1] В работе [7] этот результат сформулирован несколько иначе.

[2] Нетрудно показать, что эта теорема справедлива не только для $K_\sigma N$-пространств, но и для KN-линеалов.

а на U — норму $\|\lambda\|_U = \sup\{\langle\lambda, \mu\rangle : \|\mu\|_T \leqslant 1\}$. Ясно, что T есть KN-пространство, (o)-изоморфное m, а U есть KN-пространство, (o)-изоморфное l. Отметим следующее:

1) T *алгебраически и структурно изоморфно и изометрично* Z, в силу чего сильная теорема Хана — Банаха справедлива для пары $(T, \overline{T})$, т. е. для любого $\mu \in T$ найдется такой $\lambda \in U$, что $\|\lambda\|_U = 1$ и $\langle\lambda, \mu\rangle = \|\mu\|_T$.

2) Отсюда следует, что *для любого* $\mu \in T$ *будет*

$$\|\mu\|_T = \sup\{\langle\lambda, \mu\rangle : \|\lambda\|_U \leqslant 1\}. \tag{3}$$

В самом деле, в равенстве (3) левая часть не меньше правой по самому определению нормы в U. Обратное же неравенство имеет место в силу сказанного в предыдущем пункте.

3) Для любого $\mu \in T$ функционал $\varphi_\mu(\lambda) = \langle\lambda, \mu\rangle$, $\lambda \in U$, есть (b)-линейный функционал на U, причем $\|\varphi_\mu\|_{U^*} = \|\mu\|_T$. Обратно, всякий (b)-линейный функционал на U представим в такой форме.

Таким образом, функционал $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позволяет отождествить пространство T с пространством $U^* = \overline{U}$. Далее нам понадобится следующая теорема Р. Джеймса [9]: *если банахово пространство* B *нерефлексивно, то найдется такой линейный непрерывный функционал на* B, *который не достигает своего супремума на единичном шаре пространства* B.

У нас роль B будет играть пространство U. Так как U не (b)-рефлексивно, то в силу теоремы Джеймса найдется такой $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) \in T$, что $\|\mu\|_T = 1$ и $|\langle\lambda, \mu\rangle| < 1$ для любого такого $\lambda \in U$, что $\|\lambda\|_U \leqslant 1$. Сказанное противоречит тому, что для пары $(T, \overline{T})$ справедлива сильная теорема Хана — Банаха. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему 3 можно несколько усилить в части необходимости: доказать, что выполнение в $K_\sigma N$-пространстве X с достаточным множеством вполне линейных функционалов условия (А) равносильно тому, что для всякого $x \in X_+$ найдется такой $f \in (X^* \cap \overline{X})_+$, что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$.

Замечание 2. Отметим следующее. Пусть X есть K_σ-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов, p_1 и p_2 — эквивалентные монотонные нормы на нем. Через X_{p_1}, для краткости, будем обозначать $K_\sigma N$-пространство (X, p_1), а через X_{p_2} обозначим $K_\sigma N$-пространство (X, p_2). Очевидно, что $(X_{p_1})^*$ и $(X_{p_2})^*$ совпадают по запасу элементов и имеют эквивалентные нормы. Если для пары $(X, (X_{p_1})^* \cap \overline{X})$ справедлива сильная теорема Хана — Банаха, то это же верно и для пары $(X, (X_{p_2})^* \cap \overline{X})$. Аналогичное утверждение для слабой теоремы Хана — Банаха, вообще говоря, места не имеет. Тем самым справедливость первой из теорем для пространства X зависит только от рассматриваемой на X топологии, а справедливость второй — еще и от выбора задающей топологию нормы.

В заключение отметим следующее. И. Амемия [10] доказал, что если в KN линеале X норма монотонно-полна, т. е. выполнено условие (В): если $0 \leqslant x_n \uparrow +\infty$ в X, то $\|x_n\|_X \to \infty$, то существует такая постоянная $0 < \alpha \leqslant 1$, что если $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X \geqslant \alpha \|x\|_X$.

Из этой леммы Амемии легко можно вывести следующее простое

Предложение. Пусть X есть KN-пространство с монотонно-полной нормой, максимальное расширение S которого регулярно

([1], с. 179). Тогда на X можно ввести такую монотонную и универсально полунепрерывную норму $\|\cdot\|_X^0$, которая будет эквивалентна норме $\|\cdot\|_X$.

Действительно, достаточно для $x \in X$ положить

$$\|x\|_X^0 = \inf(\sup\|u_n\|_X),$$

где inf берется по всем последовательностям $\{u_n\}$ в X, удовлетворяющим условию $0 \leqslant u_n \uparrow |x|$. Легко проверить, что функционал $\|\cdot\|_X^0$ является монотонной нормой на X. Так как X — счетного типа, то условия (С) и (С′) для нормы $\|\cdot\|_X^0$ равносильны. Используя же теорему о диагональной последовательности ([1], с. 180), имеющую место в любом регулярном пространстве, без труда убеждаемся, что норма $\|\cdot\|_X^0$ полунепрерывна.

Тем самым, *если X есть KN-пространство с монотонно-полной нормой и достаточным множеством вполне линейных функционалов, причем максимальное расширение пространства X регулярно, то путем эквивалентной перенормировки X можно добиться того, что для пары $(X, X^* \cap \overline{X})$ будет справедлива слабая теорема Хана—Банаха.*

Авторы приносят благодарность проф. Б. З. Вулиху и доц. А. И. Векслеру за внимание к настоящей работе.

г. Ленинград

Поступило
12 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. Nakano H. Modulared semi-ordered linear spaces. Tokyo, 1950.
3. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., ИИЛ, 1961.
4. Bessaga C., Pełczyński A. A generalization of results of R. C. James concerning absolute basis in B-spaces. Studia math., t. 17, 1958, p. 165—174.
5. Мильман Д. П., Мильман В. Д. Некоторые геометрические свойства нерефлексивных пространств. ДАН СССР, т. 152, № 7, 1963, с. 52—54.
6. Ogasawara T. Theory of vector lattices. J. Sci. Hirosima Univ., A, v. 12, 1942, p. 37—100.
7. Mori T., Amemiya J., Nakano H. On the reflexivity of semi-continuous norms. Proc. Japan Acad., v. 31, № 10, 1955, p. 684—685.
8. Nakano H. Linear topology on semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, v. 12, 1953, p. 87—104.
9. James R. C. Characterizations of reflexivity. Studia math., t. 23, 1964, s. 205—216.
10. Amemiya J. A generalization of Riesz — Fischer's theorem. J. Math. Soc. Japan, v. 5, № 3—4, 1953.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

Том VI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1965

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI, № 4 Июль — Август 1965 г.

УДК 519.48

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О СЧЕТНОНОРМИРОВАННЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ КОЛЬЦАХ

§ 1. Основные определения

В работе рассматриваются полуупорядоченные кольца, снабженные счетнонормированной топологией, удовлетворяющей тем или иным условиям.

Напомним определения некоторых понятий и отдельные результаты, содержащиеся в работах [1–5]. Мы приведем их в удобной для нас форме.

(1). K-линеал X называется *полуупорядоченным кольцом* [5], если для любых двух элементов x, $y \in X$ определено произведение $xy \in X$, причем:

а) умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения;

б) если $x, y \geqslant 0$ $(x, y \in X)$, то $xy \geqslant 0$;

в) в X существует полная система таких попарно дизъюнктных положительных элементов $i_\alpha (\alpha \in A)$, называемых частичными единицами умножения, что:

в$_1$) если $x \in X$, α_0 таково, что $x d i_\alpha$ при всех $\alpha \neq \alpha_0$, то

$$x i_{\alpha_0} = i_{\alpha_0} x = x;$$

в$_2$) если $x \in X$ дизъюнктен некоторому i_{α_0}, то

$$x i_{\alpha_0} = i_{\alpha_0} x = 0.$$

Система $\{i_\alpha\}$ может состоять всего из одного элемента, который в этом случае называется единицей умножения. Будем в дальнейшем полуупорядоченное кольцо, в котором система $\{i_\alpha\}$ состоит из одной единицы умножения, называть *простым* полуупорядоченным кольцом. Отметим, что простое архимедово полуупорядоченное кольцо непременно коммутативно [4] *.

(2) Пусть X — архимедовский K-линеал с единицей 1. В X можно ввести обобщенную норму, которая может принимать и значение $+\infty$, по формуле

$$\|x\| = \inf\{\lambda : \lambda > 0, \quad |x| \leqslant \lambda 1\}.$$

Если X полон по указанной норме, то он называется (b)-*полным* [2]. Понятие (b)-полноты может быть введено и для K-линеалов без единицы [3].

* В этой работе некоммутативные полуупорядоченные кольца не рассматриваются.

(3) Всякий архимедовский (b)-полный K-линеал X с единицей 1 изоморфен K-линеалу $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, составленному из непрерывных функций, заданных на некотором бикомпакте Q, причем в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ могут входить функции, допускающие на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ или $-\infty$. При этом изоморфизм может быть установлен так, чтобы единице 1 K-линеала X соответствовала функция, тождественно равная единице ([3]).

Если, кроме того, X есть простое полуупорядоченное кольцо, причем 1 — единица умножения, то произведению двух элементов из X будет в указанном изоморфизме соответствовать поточечное произведение функций из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ на всюду плотном в Q множестве с последующим распространением по непрерывности на все Q. Выполнено также условие *внутренней нормальности* ([2]): *если* $x(t)$ *и* $y(t)$ — непрерывные функции на бикомпакте Q, причем $0 \leqslant y(t) \leqslant x(t)$, и $x(t)$ в $\in \mathfrak{C}_\infty(Q)$, то $y(t)$ также принадлежит $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. Поэтому *все конечные непрерывные функции на Q содержатся в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$*.

(4) *Счетно-нормированной структурой, или KN^*-линеалом* ([1]), называется K-линеал X, являющийся одновременно счетно-нормированным пространством (хаусдорфовым), в котором полунормы $\|x\|_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ монотонны, т. е. $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\|_p \leqslant \|y\|_p$ при всех $p = 1, 2, \ldots$.

KN^*-линеал, полный в смысле теории линейных топологических пространств, называется *KB^*-линеалом.*

KN^*-линеал всегда архимедов, а KB^*-линеал с единицей непременно (b)-полон.

KN^*-пространством (*$K_\sigma N^*$-пространством*) называется KN^*-линеал, который условно полон (условно σ-полон) как структура.

KB^*-пространством называется $K_\sigma N^*$-пространство, которое удовлетворяет следующим условиям:

А*) если $x_n \downarrow 0$, то $x_n \xrightarrow{(m)} 0$, т. е. $x_n \to 0$ по топологии счетно-нормированного пространства *.

Б*) если $x_n \uparrow +\infty$, $x_n \geqslant 0$, то множество $\{x_n\}$ неограничено в смысле теории линейных топологических пространств, т. е. $\|x_n\|_p \xrightarrow{\to\infty} +\infty$ по крайней мере для одного из значений p.

Если в указанных определениях считать, что система полунорм $\{\| \|_p\}$ состоит из одной только нормы, то получим соответственно определения KN- и KB-линеалов, KN-, $K_\sigma N$- и KB-пространств.

Определение 1. *Кольцевым* (*простым кольцевым*) *KB^*-линеалом* называется всякое полуупорядоченное (простое полуупорядоченное) кольцо X, которое является одновременно KB^*-линеалом.

Определение 2. *Кольцевым KB_0^*-линеалом* будем называть простой кольцевой KB^*-линеал X, в котором

а) $\|xy\|_p \leqslant \|x\|_p\|y\|_p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ для любых $x, y \in X$;

б) $\|1\|_p = 1$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$.

---

* Иными словами, $x_n \xrightarrow{(m)} 0$ означает, что $\| x_n \|_p \to 0$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ для каждой из полунорм, определяющих топологию.

В этой работе будет показано, что простой кольцевой KB^*-линеал рефлексивен (топологически) тогда и только тогда, когда он является KB^*-пространством.

Напомним, что в общем случае KB-линеал X рефлексивен топологически тогда и только тогда, когда X и X^* (X^* — пространство, сопряженное X в смысле теории нормированных пространств) оба являются KB-пространствами ([1]).

Для кольцевых KB_0^*-линеалов будут доказаны теоремы о реализации их в виде пространств непрерывных функций на некоторых нормальных топологических пространствах.

Кольцевой KB_0^*-линеал является, очевидно, m-выпуклой топологической алгеброй ([7]). Метод исследования таких линеалов, применяемый в этой статье и основанный на рассмотрении некоторых фактор-линеалов, во многом аналогичен методу работы ([7]).

§ 2. Условие рефлексивности кольцевого KB_0^*-линеала

Если X — линейное топологическое пространство, то через X^* будем обозначать сопряженное к нему пространство, снабженное сильной топологией. Если направление x_α сходится к x в X, то будем писать $x_\alpha \xrightarrow{(\Gamma)} x$. Аналогичный смысл имеет обозначение $f_\alpha \xrightarrow{(\Gamma)} f$, где $f_\alpha, f \in X^*$.

Лемма. *Пусть X — простой кольцевой KB^*-линеал, A и B — два топологически ограниченных множества в X. Тогда множество*

$$AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

также топологически ограничено в X.

Доказательство. Покажем, что операция умножения в X непрерывна по каждому сомножителю. Тогда справедливость леммы будет вытекать из теоремы о том, что в полной метризуемой алгебре умножение непрерывно по совокупности обоих множителей (([8]), теорема 5).

Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим оператор $A_{x_0} : X \to X$, действующий по формуле

$$A_{x_0} y = x_0 y.$$

Этот оператор регулярен, ибо $A_{x_0} = A_{x_0}^+ - A_{x_0}^-$. Известно, что регулярный оператор, действующий из одного KB-линеала в другой KB-линеал, непрерывен (([1]), стр. 249). Это предложение справедливо и для KB^*-линеалов, что проверяется аналогично. Поэтому оператор A_{x_0} непрерывен. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть X — простой кольцевой KB^*-линеал. Если направление $f_\beta \downarrow 0$ в X^*, то $f_\beta \xrightarrow{(\Gamma)} 0$.*

Доказательство. Так как $f_\beta \downarrow 0$, то $f_\beta(x) \to 0$ для любого $x \in X$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что $f_\beta(x) \to 0$ равномерно на любом топологически ограниченном множестве $Q \subset X$. Не уменьшая общности, можно считать, что Q состоит только из положительных элементов. На основании леммы множество $Q^2 = \{x^2 : x \in Q\}$ также ограничено топологически в X. Пусть $x \in Q$. Легко проверить, что

$$0 \leqslant x - x \wedge n1 \leqslant \frac{x^2}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где 1 — единица умножения в X. Это вытекает из ранее упомянутых теорем о реализациях K-линеалов. Поэтому

$$x = (x \wedge n1) + (x - x \wedge n1) \leqslant n1 + \frac{x^2}{n}.$$

Отсюда

$$0 \leqslant f_\beta(x) \leqslant f_\beta\left(n1 + \frac{x^2}{n}\right) = nf_\beta(1) + \frac{f_\beta(x^2)}{n}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что направленное множество $\{\beta\}$ имеет первый элемент β_0. Тогда

$$0 \leqslant f_\beta(x) \leqslant nf_\beta(1) + \frac{f_{\beta_0}(x^2)}{n}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как Q^2 топологически ограничено, то найдется $n_0 > 0$ такое, что

$$0 \leqslant \frac{f_{\beta_0}(x^2)}{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $x \in Q$. В то же время для всех достаточно больших β будет

$$f_\beta(1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2n_0}.$$

Тогда для этих β

$$0 \leqslant f_\beta(x) \leqslant n_0 f_\beta(1) + \frac{f_{\beta_0}(x^2)}{n_0} \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Каждый линейный непрерывный функционал на X^* является вполне линейным* *.

Это вытекает из того, что каждый линейный непрерывный функционал на X^* есть разность двух положительных линейных непрерывных функционалов (см., например, (9), теорема 2.1).

Т е о р е м а 2. *Пусть X — кольцевой KB^*-линеал. Для того чтобы X был рефлексивным линейным топологическим пространством, необходимо, а в случае, когда X простой, то и достаточно, чтобы X был KB^*-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость прямо следует из работы (9). Докажем достаточность. Так как X есть KB^*-пространство, то $X^* = \overline{X}$ ((1), стр. 284), где $\overline{X}$ — K-пространство всех вполне линейных функционалов на X. Кроме того, с помощью теоремы IX.6.I из (1) легко проверяется, что K-пространство X рефлексивно по упорядочению. Пусть $F \in X^{**}$. Так как, на основании следствия теоремы 1, F вполне линеен на $X^*(=\overline{X})$, то $F \in \overline{\overline{X}}$ и потому найдется $x_F \in X$ такой, что при любом $f \in X^*$

$$F(f) = f(x_F).$$

* Определение вполне линейного функционала, см. в (1).

Отсюда следует, что X полурефлексивно. Так как X тоннельно, то оно рефлексивно. Теорема доказана.

Приведем пример кольцевого KB^*-линеала, который является KB^*-пространством, но не рефлексивен топологически. Это показывает, что условие простоты KB^*-линеала в части достаточности теоремы 2 нельзя опустить, т. е. в этой части теорема 2 для произвольного кольцевого KB^*-линеала неверна.

Пример. Пусть X — пространство всех измеримых функций на $(-\infty, +\infty)$ таких, что при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\|x\|_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^n dt\right)^{1/n} < \infty.$$

X, снабженное системой норм $\|x\|_n$, с естественным упорядочением является KB^*-пространством. Выберем систему частичных единиц умножения следующим образом:

$$i_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [n, n+1] \\ 0, & t \notin [n, n+1] \end{cases}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тогда X становится кольцевым KB^*-линеалом.

Покажем, что X не рефлексивен топологически. Допустим, что это не так. Тогда множество

$$Q = \{x\colon\ x \in X,\quad \|x\|_n \leqslant 1 \quad n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

слабо компактно ((10), теорема 9 (4.X.I)). Его замкнутое подмножество $Q_+ = \{x\colon\ x \in Q,\ x \geqslant 0\}$ тоже слабо компактно. Рассмотрим последовательность функционалов $f_1, f_2, \ldots$ на X, где

$$f_k(x) = \int_k^{+\infty} x(t)\, dt \ \text{ для } x \in X.$$

Ясно, что $f_k(x) \downarrow 0$ для $x \in Q_+$ слабо компактно, то

$$f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

равномерно на Q_+ (теорема Дини). Остается заметить, что для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$i_k \in Q_+ \qquad \text{и} \qquad f_k(i_k) = 1,$$

что невозможно.

Заметим, что пространство всех измеримых на $[0, 1]$ функций таких, что при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\|x\|_n = \left(\int_0^1 |x(t)|^n dt\right)^{1/n} < \infty,$$

рефлексивно, ибо если за единицу взять функцию, тождественно равную единице, то получим простой кольцевой KB^*-линеал, являющийся KB^*-пространством.

Теорема 3. *Пусть X — KB-пространство с единицей 1. Тогда X содержит фундамент Y такой, что*

1) *Y есть простой кольцевой KB^*-линеал с единицей умножения 1;*
2) *Y есть KB^*-пространство.*

Отсюда следует, что Y рефлексивен топологически.

Доказательство. За Y возьмем множество всех элементов $x \in X$ таких, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ n-ая степень модуля x содержится в X, т. е. $|x|^n \in X$. Введем на Y топологию с помощью счетного числа норм

$$\|x\|_n = (\||x|^n\|)^{\frac{1}{n}}, \quad x \in Y, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\| \; \|$ — норма в X.

Обычным образом проверяется, что $\| \; \|_n$ действительно являются нормами на Y, очевидно монотонными. Произведение любых двух элементов $x, y \in Y$ содержится в Y. Нетрудно также проверить, что Y есть KB^*-пространство. Именно, выполнение условий А*) и Б*) для Y следует из выполнения условий А) и Б) для X в сноске *.

§ 3. О кольцевых KB_0^*-линеалах

Теорема 4. *Пусть X — архимедов (b)-полный K-линеал с единицей* $\mathbf{1}$, *являющейся простым полуупорядоченным кольцом. Допустим, что на X введена норма $\| \; \|$ такая, что X с этой нормой и с тем же самым умножением оказывается нормированным кольцом, т. е. вещественной банаховой алгеброй. Тогда X есть K-линеал ограниченных элементов и на X существует норма $\| \; \|_1$, эквивалентная норме $\| \; \|$ и такая, что $(X, \| \; \|_1)$ есть KB-линеал ограниченных элементов.*

Доказательство. Будем считать X реализованным, как указано выше, в виде $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. Доказательство теоремы состоит из нескольких этапов.

1) Для каждого $x \in X$, $x \neq 0$, найдется такой максимальный идеал M в X, что $x \notin M$. Докажем это. Через $C(Q)$ будем обозначать пространство ограниченных непрерывных функций на Q. Возьмем $y \in C(Q)$ такую, что $xy \in C(Q)$ и $xy \neq 0$ (т. е. $(xy)(t)$ не равно тождественно нулю). Положим $z = xy$. Найдется функция $v \in C(Q)$, которая равна нулю на некотором открытом в Q множестве, причем сумма $u = z + v$ нигде на Q в нуль не обращается. Так как $\frac{1}{u} \in C(Q)$, то u не содержится ни в одном максимальном идеале кольца $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. Так как v обращается в нуль на открытом в Q множестве, то v содержится в некотором максимальном идеале M кольца $\mathfrak{C}_\infty(Q)$.

Покажем, что $x \notin M$. Если допустить, что $x \in M$, то $xy \in M$ и $u = v + xy \in M$, что невозможно.

2) Рассмотрим теперь комплексное нормированное кольцо $X + iX$, которое состоит из элементов вида $x + iy$, где $x, y \in X$. Алгебраические операции и норма вводятся естественным образом. В этом кольце можно

---

* Напомним, что KB-пространством называется $K_\sigma N$-пространство, в котором норма удовлетворяет следующим двум условиям:

А) если $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\| \to 0$;

Б) если $x_n \uparrow +\infty \, (x_n \geqslant 0)$, то $\|x_n\| \to +\infty$.

ввести инволюцию: если $z = x + iy$, то $z^* = x - iy$. Отметим, что в кольце $X + iX$ пересечение всех максимальных идеалов также состоит только из нуля. Действительно, пусть $x + iy \in X + iX$ и $x \notin M$, где M — максимальный идеал в X. Тогда $x + iy \notin M + iM$. Остается заметить, что $M + iM$ — максимальный идеал в $X + iX$. Пусть теперь M — произвольный линейный мультипликативный функционал в $X + iX$. Покажем, что для любого $x \in X$ $M(x)$ есть вещественное число. Если $z = x + iy$, то, очевидно, элемент $1 + zz^* = 1 + x^2 + y^2$ имеет обратный в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. Поэтому ([11], § 8, теорема 2) кольцо $X + iX$ симметрично, откуда и следует вещественность $M(x)$. Итак, в кольце X для каждого $x \in X$, $x \neq 0$, найдется вещественный линейный мультипликативный функционал M, такой, что $M(x) \neq 0$.

3) Конус положительных элементов в X замкнут по норме. Действительно, пусть $\|x - x_n\| \to 0$, где $x_n \geqslant 0$ и $x = x_+ - x_-$, $x_- > 0$. Тогда, по непрерывности умножения,

$$x_n x_- \to x x_- = (x_+ - x_-) x_- = -x^2_-,$$

т. е. $x_n x_- \to -x^2_-$. Возьмем мультипликативный функционал M такой, что $M(x_-) \neq 0$. Тогда $M(x_n, x_-) = [M(\sqrt{x_n x_-})]^2 \geqslant 0$, а $M(-x^2_-) = -[M(x_-)]^2 < 0$, что противоречит соотношению $M(x_n x_-) \to -[M(x_-)]^2$.

4) Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|, \qquad \|1\| = 1$$

для любых $x, y \in X$ ([11], § 1, теорема 1). Пусть $x \geqslant 0$ — произвольный элемент из X_+. Возьмем элемент

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2\|x\|}\right)^k.$$

Написанный ряд сходится по норме, так как

$$\left\|\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)^k\right\| = \frac{1}{2^k}\,\frac{\|x^k\|}{\|x\|^k} \leqslant \frac{1}{2^k}\cdot\frac{\|x\|^k}{\|x\|^k} = \frac{1}{2^k}.$$

В силу 3), при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{2\|x\|}\right)^k \leqslant z,$$

или, переходя к реализации,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x(q)}{2\|x\|}\right)^k \leqslant z(q) < +\infty$$

на плотном в Q множестве. Поэтому на этом же множестве

$$\frac{x(q)}{2\|x\|} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $x \leqslant 2\|x\|1$, т. е. X — K-линеал ограниченных элементов. Поэтому $\mathfrak{C}_\infty(Q) = C(Q)$. Если за $\|\ \|_1$ взять равномерную норму, то она окажется эквивалентной исходной норме $\| \|$, так как X — кольцо без радикала ((11), § 9, теорема 2). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть X — KB-линеал с единицей, являющийся простым полуупорядоченным кольцом. Тогда X эквивалентен KB-линеалу ограниченных элементов, т. е. на X можно ввести эквивалентную норму, превращающую его в KB-линеал ограниченных элементов.*

Следствие 2. *Пусть X — KB-пространство с единицей, являющееся простым полуупорядоченным кольцом. Тогда X конечномерно.*

Отметим, что существуют бесконечномерные KB-пространства, являющиеся полуупорядоченными кольцами (не простыми). Они необходимо должны быть дискретными, например, l_p $(p \geqslant 1)$ с естественным упорядочением и ортами, взятыми за частичные единицы умножения.

Следствие 3. *Если норма $\| \|$ в условиях теоремы 4 такова, что*

$$\text{а)}\ |x| \leqslant |y| \text{ влечет } \|x\| \leqslant \|y\|,$$
$$\text{б)}\ \|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$
$$\text{в)}\ \|1\| = 1,$$

то $(X, \| \|)$ есть KB-линеал ограниченных элементов.

Действительно, покажем, что в этом случае $\| \|$ совпадает с нормой $\| \|_1$:

$$\|x\|_1 = \sup_{t \in Q} |x(t)|.$$

Так как каждый мультипликативный функционал M, в силу б) и в), удовлетворяет условию

$$|M(x)| \leqslant \|x\|,$$

то отсюда следует, что $\|x\|_1 \leqslant \|x\|$.

С другой стороны,

$$|x| \leqslant \|x\|_1 \cdot \bar{1}.$$

Поэтому

$$\|x\| = \| |x| \| \leqslant \|x\|_1 \|1\| = \|x\|_1.$$

Итак, $\|x\| = \|x\|_1$ для любого $x \in X$.

Переходим к кольцевым KB_0^*-линеалам. Обычным в таких случаях образом может быть доказана

Лемма. *Пусть X — простое полуупорядоченное кольцо, являющееся полным счетнонормированным пространством, причем существует базис окрестностей нуля $\mathfrak{U} = \{U_k\}$, где каждая U_k*

1) *нормальна, т. е. $|x| \leqslant |y|$, $y \in U_k$ влечет $x \in U_k$;*

2) *m-выпукла, т. е. выпукла и идемпотентна (последнее означает, что $U_k \cdot U_k \subset U_k$).*

Тогда X можно превратить в кольцевой KB_0^*-линеал.

Дадим краткий набросок доказательства. Можно считать, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ $U_k \neq X$ (мы исключаем тривиальный случай, когда X состоит из одного нулевого элемента). Построим полунормы

$$p_k(x) = \inf\left\{\lambda : \lambda > 0,\ \frac{x}{\lambda} \in U_k\right\}.$$

Затем положим

$$\|x\|_k = \sup_{y \in U_k} p_k(xy), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Система полунорм $\{\| \ \|_k\}$ задает в X исходную топологию, и X, снабженный этой системой полунорм, является кольцевым KB_0^*-линеалом.

Известна следующая теорема ([12], теорема 2).

Пусть T — вполне регулярное пространство, $C(T)$ — пространство всех вещественных непрерывных функций на T, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах T. Для того чтобы $C(T)$ было F-пространством, необходимо и достаточно, чтобы T удовлетворяло условию (W):

T содержит счетную фундаментальную последовательность компактных подмножеств и всякое подмножество из T, пересечения которого с компактными подмножествами из T замкнуты, само замкнуто.

Очевидно, что такое пространство $C(T)$ является кольцевым KB_0^*-линеалом в нашем смысле. Мы докажем обратное, но сначала отметим, что во всяком кольцевом KB_0^*-*линеале каждый аддитивный мультипликативный* функционал положителен, а потому и непрерывен.

Теорема 5. *Пусть X — кольцевой KB_0^* линеал, T — множество всех линейных мультипликативных функционалов на X, отличных от нулевого, наделенное слабой топологией $\sigma(X^*, X)$. Тогда X алгебраически, топологически и структурно изоморфен пространству $C(T)$ всех непрерывных функций на T с топологией компактной сходимости.*

Отсюда, в частности, следует, что T удовлетворяет условию (W).

Сначала докажем некоторые леммы. В этих леммах X — кольцевой KB_0^*-линеал.

Лемма 1. *Всякий замкнутый идеал в X является нормальным подлинеалом.*

Доказательство. Пусть M — замкнутый идеал в X. Считаем X реализованным в виде $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. Проверку выполнения условия нормальности разобьем на ряд этапов.

(1) Совокупность всех ограниченных элементов из M нормально содержится в X. Действительно, $M \cap C(Q)$ есть, очевидно, идеал в $C(Q)$. Ясно, что если на $C(Q)$ рассматривать равномерную норму, то $M \cap C(Q)$ замкнуто в $C(Q)$. Но тогда $M \cap C(Q)$, будучи замкнутым идеалом в $C(Q)$, состоит из всех функций, обращающихся в нуль на некотором замкнутом в Q множестве ([11], стр. 228, следствие).

(2) Из (1) следует, что если $x \in M \cap C(Q)$ и $x \geqslant 0$, то и $\sqrt{x} \in M$.

(3) Для $x \geqslant 0$ положим

$$x_N = x \wedge N1, \quad \text{где} \quad N > 0.$$

Покажем, что если $x \in M$, то и $x_N \in M$.

Для этого построим функцию

$$y^N(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } x(q) = 0, \\ \dfrac{x_N(q)}{x(q)}, & \text{если } x(q) \neq 0. \end{cases}$$

Ясно, что $y^N \in C(Q)$. Так как $x_N = x \cdot y^N$, $x \in M$ и M — идеал, то и $x_N \in M$.

(4) $x_N \xrightarrow{N\to\infty} x$ в пространстве X (топологически). Действительно, так как

$$0 \leqslant x - x_N \leqslant \frac{x^2}{N}, \quad \text{то } \|x - x_N\|_k \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$.

(5) Если $x \in M$, то и $|x| \in M$. Действительно, $x^2 \in M$, а тогда и $(x^2)_N \in M$ и $\sqrt{(x^2)_N} \in M$. Но $\sqrt{(x^2)_N} = |x|_{\sqrt{N}} \to |x|$ по (4). Значит, $|x| \in M$.

(6) Пусть $|y| \leqslant |x|$, $x \in M$; тогда $y \in M$. Действительно, $|y|_N \leqslant |x|_N$. Поэтому, согласно (1) и (3), $(y_+)_N \in M$ и $(y_-)_N \in M$. Но, так как топологически

$$(y_+)_N \to y_+, \qquad (y_-)_N \to y_-$$

то $y_+ \in M$ и $y_- \in M$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если M — замкнутый максимальный идеал в X, то X / M, снабженное фактор-топологией, алгебраически, топологически и структурно изоморфно полю вещественных чисел.*

Доказательство. Обозначим через φ каноническое отображение X на X / M. Убедимся сначала, что $\varphi(1)$ есть единица K-линеала X / M. Пусть $x \in X_+$ и $\varphi(x) \wedge \varphi(1) = 0$. Так как $\varphi(x) \wedge \varphi(1) = \varphi(x \wedge 1)$, то $x \wedge 1 \in M$. Поэтому $nx \wedge n1 \in M$ при любом $n > 0$. Тем более $x \wedge n1 \in M$. Но, так как

$$0 \leqslant x - x \wedge n1 \leqslant \frac{x^2}{n},$$

то $x \in M$. Итак, $\varphi(1)$ есть единица K-линеала X / M. Кроме того, $\varphi(1)$ есть также единица умножения в X / M. Отсюда следует, что X / M есть простое полуупорядоченное кольцо. С другой стороны, X / M с фактор-топологией снова будет локально выпуклой векторной структурой [9], но тогда X / M обязано быть KB^*-линеалом, ибо топология в X счетнонормированная. Отсюда вытекает, что X / M архимедов и (b)-полон. Поэтому X / M изоморфен алгебраически и структурно пространству $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ для некоторого бикомпакта Q. Но, так как M — максимальный идеал, то X / M — поле, а значит, Q состоит из одной единственной точки. Лемма доказана.

Положим теперь

$$X_p = \{x : x \in X, \ \|x\|_p = 0\} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

X_p — замкнутый нормальный подлинеал, являющийся идеалом в X.

Положим также $X^{(p)} = X / X_p$.

Если $x \in X$, то полагаем

$$\bar{x} = x + X_p \quad (\bar{x} \in X^{(p)}).$$

Так же, как в лемме 2, проверяется, что $\bar{1}$ есть единица K-линеала $X^{(p)}$.

Будем считать, что $X^{(p)}$ наделен фактор-топологией.

Лемма 3. *K-линеал $X^{(p)}$ является (b)-полным.*

Это следует из того, что $X^{(p)}$ есть KB^*-линеал с единицей, а такой KB^*-линеал всегда (b)-полон.

Введем теперь на $X^{(p)}$ нормированную топологию, если $\bar{x} = x + X_p \in X^{(p)}$, то $q(\bar{x}) = \|x\|_p$. $(X^{(p)}, q)$ есть KN-линеал с единицей, являющийся простым полуупорядоченным кольцом. Кроме того, $X^{(p)}$ (b)-полон. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in X^{(p)}$, $\bar{x} = x + X_p$, $\bar{y} = y + X_p$. Тогда

$$q(\bar{x}) = \| x \|_p, \quad q(\bar{y}) = \| y \|_p, \quad q(\bar{x}\bar{y}) = \| xy \|_p,$$

а поэтому $q(\bar{x}\bar{y}) \leqslant q(\bar{x})q(\bar{y})$.

Лемма 4. $(X^{(p)}, q)$ *есть KB-линеал ограниченных элементов.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{X}^{(p)}$ пополнение $X^{(p)}$ по q-норме. На $\tilde{X}^{(p)}$ естественным образом распространяется q-норма, порядок и операция умножения с сохранением соотношения $q(\bar{x}\bar{y}) \leqslant q(\bar{x})q(\bar{y})$. $\bar{1}$ по-прежнему будет единицей умножения. Покажем, что $\bar{1}$ будет единицей K-линеала $\tilde{X}^{(p)}$. Возьмем $\bar{x} > 0$, $\bar{x} \in \tilde{X}^{(p)}$. Найдется $\bar{x}_0 \in X^{(p)}$, такой, что

$$q(\bar{x}_0) \geqslant \frac{q(\bar{x})}{2} \quad \text{и} \quad q(\bar{x} - \bar{x}_0) \leqslant \frac{1}{4} q(\bar{x}).$$

Так как $0 \leqslant \bar{x}_0 - \bar{x}_0 \wedge N\bar{1} \leqslant \frac{x^2_0}{N}$, $N > 0$, то найдется такое N_0, что

$$q(\bar{x}_0 \wedge N_0\bar{1}) \geqslant \frac{1}{3} q(\bar{x}).$$

Но $q(\bar{x}_0 \wedge N_0\bar{1} - \bar{x} \wedge N_0\bar{1}) \leqslant q(\bar{x}_0 - \bar{x}) \leqslant \frac{1}{4} q(\bar{x})$.

Отсюда

$$q(\bar{x} \wedge N_0\bar{1}) \geqslant \frac{1}{12} q(\bar{x}).$$

Таким образом,

$$\bar{x} \wedge N_0 1 > 0.$$

Тем более $N_0\bar{x} \wedge N_0\bar{1} > 0$ и $\bar{x} \wedge \bar{1} > 0$. Итак, $\bar{1}$ — единица K-линеала $\tilde{X}^{(p)}$ *.

В силу теоремы 4 и следствия 3 к этой теореме, $(\tilde{X}^{(p)}, q)$ есть KB-линеал ограниченных элементов.

Но тогда $X^{(p)}$ есть KN-линеал ограниченных элементов, а так как $X^{(p)}$ (b)-полон, то $X^{(p)} = \tilde{X}^{(p)}$, тем самым $X^{(p)}$ — KB-линеал ограниченных элементов. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Как указано в условии теоремы, T — *множество* всех нетривиальных линейных мультипликативных функционалов в X.

Обозначим через T_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$, множество всех функционалов из T, непрерывных по полунорме $\| \ \|_p$. Имеем $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} T_p = T$.

Далее, всякий $\varphi \in T_p$ порождает линейный мультипликативный функционал $\bar{\varphi}$ в $X^{(p)}$ по формуле

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x), \text{ где } \bar{x} = x + X_p.$$

* Заметим, что в общем случае единица KN-линеала может не быть единицей в пополнении этого KN-линеала по норме.

Обратно, всякий нетривиальный линейный мультипликативный функционал в $X^{(p)}$ порождает функционал из T_p.

Из леммы 4 и этого замечания вытекает, что

$$\|x\|_p = \sup_{\varphi \in T_p} |\varphi(x)|$$

для любого $x \in X$.

Заметим, что каждое T_p компактно в топологии $\sigma(X^*, X)$, ибо оно слабо замкнуто и эквинепрерывно (см. ([10]), стр. 393).

Каждому $x \in X$ сопоставим непрерывную функцию $f_x(\varphi)$ на T по формуле

$$f_x(\varphi) = \varphi(x).$$

Обозначим через F множество всех таким образом полученных функций на T. Без труда проверяется, что F с естественным упорядочением образует простое полуупорядоченное кольцо, изоморфное X. Введем на F систему полунорм

$$\|f_x\|_p = \sup_{\varphi \in T_p} |f_x(\varphi)| = \sup_{\varphi \in T_p} |\varphi(x)| = \|x\|_p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда X и F изоморфны как кольцевые KB_0^*-линеалы.

Осталось проверить, что F совпадает со всем пространством непрерывных функций на T и что введенная на F топология совпадает с топологией компактной сходимости.

Возьмем произвольную $f_0 \in C(T)$. Для любых $p = 1, 2, 3, \ldots$ и $\varepsilon > 0$ найдется, по теореме Стоуна — Вейерштрасса (([11]), § 7, теорема 1'), функция $f_{p,\varepsilon} \in F$ такая, что

$$|f_0(\varphi) - f_{p,\varepsilon}(\varphi)| < \varepsilon$$

для всех $\varphi \in T_p$, так как T_p — компакт. Последовательность

$$f_{1,1};\ f_{2,\frac{1}{2}};\ f_{3,\frac{1}{3}};\ \ldots;\ f_{n,\frac{1}{n}};\ \ldots$$

фундаментальна в введенной на F топологии. Так как F полно в этой топологии (оно изоморфно X), то указанная последовательность сходится к элементу из F, поэтому $f_0 \in F$. Итак, $F = C(T)$.

Пусть $S \subset T$ — произвольное компактное подмножество T. Если мы усилим топологию в F, добавив полунорму

$$p_S(f) = \sup_{\varphi \in S} |f(\varphi)|$$

к системе полунорм $\|\ \|_p$, то, очевидно, F с этой усиленной топологией будет оставаться полным счетнонормированным пространством. В силу теоремы о замкнутом графике для полных метризуемых пространств, усиленная топология совпадает с исходной. Отсюда, ясно, что топология в F есть топология компактной сходимости на T. Теорема доказана.

Определение. Топологическое пространство T, введенное в теореме 5, будем называть *реализационным пространством* для кольцевого KB_0^*-линеала.

Теорема. 6. *Для того чтобы в кольцевом KB_0*-линеале* **X** *каждое топологически ограниченное множество было ограничено по упорядочению (обратное всегда имеет место), необходимо и достаточно, чтобы реализационное пространство T было локально компактно и σ-компактно.*

Доказательство. Необходимость. Рассматриваем $C(T)$ с топологией компактной сходимости, причем T удовлетворяет условию (W).

Пусть $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ — фундаментальная последовательность компактных в себе множеств пространства T. Возьмем произвольную точку $t_0 \in T$ и докажем, что t_0 имеет в T компактную окрестность. Можно считать, что $t_0 \in K_1$. Рассмотрим множество E всех функций из $C(T)$ таких, что

$$|f(t)| \leqslant n \text{ для } t \in K_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Это множество ограничено в $C(T)$ топологически. Пусть $y \in C(T)$ таков, что $f \leqslant y$ для всех $f \in E$.

Покажем, что $y(t_1) \geqslant n$ при всех $t_1 \in K_n - K_{n-1} (n \geqslant 2)$.

Пусть $t_1 \in K_n - K_{n-1}$. Пространство T нормально ([12]), поэтому найдется такая функция $x \in C(T)$, что

$$x(K_{n-1}) = 0,$$
$$x(t_1) = n,$$
$$|x(t)| \leqslant n \quad \text{при всех } t \in T.$$

Отсюда ясно, что $x \in E$, а $y(t_1) \geqslant n$. Итак, $y(t) \geqslant n$ при всех $t \in K_n - K_{n-1} (n \geqslant 2)$. Пусть $y(t_0) = a$. Множество $y^{-1}([a-1, a+1])$ есть окрестность точки t_0. Оно содержится в K_n при $n > a$. Поэтому оно компактно в себе. σ-Компактность следует из существования счетной фундаментальной системы компактных множеств в T.

Достаточность. Пусть T локально компактно и σ-компактно. Тогда существует такая фундаментальная последовательность

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$$

компактных в себе подмножеств T, что K_n содержится в открытом ядре K_{n+1}*. Поэтому существует такая функция $x_n \in C(T)$, что

$$0 \leqslant x_n(t) \leqslant 1, \quad x_n(K_n) = 0, \quad x_n(K_{n+2} - K_{n+1}) = 1.$$

Пусть теперь $E = \{f\}$ — топологически ограниченное множество в $C(T)$. Положим

$$M_n = \sup_{\substack{t \in K_n \\ f \in E}} |f(t)|.$$

Тогда

$$M_1 \leqslant M_2 \leqslant M_3 \leqslant \ldots .$$

Положим

$$y(t) = M_1 + \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2} x_n(t).$$

* Так как в локально компактном пространстве каждое компактное множество имеет компактную же окрестность, то, имея некоторую фундаментальную последовательность компактных в себе подмножеств, легко определить по индукции новые компактные подмножества, обладающие указанными свойствами.

Ясно, что $y \in C(T)$. Покажем, что $f(t) \leqslant y(t)$.

Пусть $t_0 \in K_{n+2} - K_{n+1}$.

Тогда

$$|f(t_0)| \leqslant M_{n+2}, \quad y(t_0) \geqslant M_{n+2}.$$

Отсюда

$$-y \leqslant f \leqslant y.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Б. З. Вулиху.

Поступило
6.VII.1964

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

[2] Вулих Б. З., Обобщенные полуупорядоченные кольца, Матем. сб., 33, № 2 (1953), 343—358.

[3] Вулих Б. З., Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств, Изв. Ак. наук СССР, серия матем., 17, № 4 (1953), 365—388.

[4] Вулих Б. З., О конкретном представлении полуупорядоченных линеалов, Доклады Ак. наук СССР, 78, № 2 (1951), 189—192.

[5] Вулих Б. З., О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 166 (1958), 3—15.

[6] Birkhoff G. and Pierce R. S., Lattice-ordered rings, An. Acad. Brasil. Ci., 28 (1956), 41—69.

[7] Michael E., Locally multiplicatively-convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc., 11 (1952), 79—84.

[8] Arens R., Linear topological division algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 623—630.

[9] Kawai I., Locally convex lattices, J. Math. Soc. Japan, 9, № 3 (1957), 281—314.

[10] Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.

[11] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.

[12] Warner S., The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke Math. J., 25, № 2 (1958), 265—282.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НОРМИРОВАННЫХ И СЧЕТНОНОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУР

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЛЕНИНГРАД 1965

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НОРМИРОВАННЫХ И СЧЕТНОНОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУР

АВТОРЕФЕРАТ

*диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель профессор *Б. З. ВУЛИХ*

ЛЕНИНГРАД 1965

Защита состоится на заседании Ученого Совета математико-механического факультета Ленинградского ордена Ленина государственного университета имени А. А. Жданова 1965 г.

Дата отправления автореферата 1965 г.

Теория линейных структур является одной из ветвей функционального анализа, начало которой было положено работами Л. В. Канторовича в 1935—1937 гг. Важное место в этой теории занимает рассмотрение топологических линейных структур, то есть K—линеалов*, снабженных локально выпуклой топологией, определенным образом связанной с упорядочением.

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Первая глава содержит перечисление некоторых, в основном, известных определений и результатов. Отметим следующий, по-видимому, ранее неизвестный результат.

Пусть (T, Σ, μ) — произвольное пространство с мерой; $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — расширенное K_σ — пространство всех измеримых почти всюду конечных на T функций с отождествлением эквивалентных; $L = L(T, \Sigma, \mu)$ — обычное лебегово пространство всех суммируемых на T функций; S_L — компонента в S, порожденная L. Пусть теперь X — нормальное подпространство в S_L, являющееся KB-пространством, а S_X — компонента в S_L, порожденная X. Положим

$$Y = \{y : y \in S_X, \ xy \in L \ \text{для любого} \ x \in X\}.$$

Теорема 2 (гл I, § 6). *Сопоставим каждому $y \in Y$ функционал f_y на X по формуле*

$$f_y(x) = \int_T xy d\mu.$$

Тогда, если X (b) — рефлексивно, то соответствие $y \leftrightarrow f_y$ есть алгебраический и структурный изоморфизм между Y и (b) — сопряженным k X пространством.

Заметим, что здесь условие (b) — рефлексивности пространства X нельзя опустить.

* Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в монографии [3].

Глава вторая посвящена топологически рефлексивным KB-пространствам. Отметим основные результаты.

Теорема 1 (гл. II, § 1). *Пусть* $(X, \|\ \|)$ — *произвольное KB-пространство, в максимальном расширении* $\hat{X}$ *которого зафиксирована единица* 1; $p > 1$ — *произвольное число. Пусть*

$$X_p = \left\{x : x \in \hat{X},\ |x|^p \in X\right\}$$

и для $x \in X_p$

$$\|x\|_p = \left\| |x|^p \right\|^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $(X_p, \|\ \|_p)$ *есть* (b) — *рефлексивное KB — пространство.*

Эта теорема дает широкое обобщение известной теоремы о (b) — рефлексивности лебеговых пространств L^p при $p > 1$.

В § 2 этой главы строится сопряженное к пространству $(X_p, \|\ \|_p)$, исходя из X и его сопряженного пространства.

Теорема 2 (гл. II, § 5). *Пусть* $(X, \|\ \|)$ — *произвольное KB-пространство с единицей;* $M(u)$ — N — *функция* (см. [4]), *которая вместе с дополнительной к ней N функцией удовлетворяет* Δ_2 — *условию при больших значениях аргумента. Полагаем*

$$X_M = \{x : x \in X,\ M(x) \in X\}$$

и для $x \in X_M$

$$\|x\|_M = inf\left\{k : k > 0,\ \left\|M\left(\frac{x}{k}\right)\right\| \leqslant 1\right\}.$$

Тогда $(X_M, \|\ \|_M)$ *есть* (b) — *рефлексивное KB-пространство.*

Эта теорема обобщает известные результаты о рефлексивности пространств Орлича.

Теорема 2 (гл. II, § 6). *Пусть X бесконечномерное KB-пространство с единицей. Тогда для каждого элемента* $z \in X$ *найдется такой фундамент Y в X, что* $z \in Y$ *и Y есть KB-пространство, причем Y не* (b) — *рефлексивно.*

Теорема 3 (гл. II, § 6). *В пространстве* $L[0, 1]$ *существует такой фундамент Z, что*

$$Z \supset L_{1+0}$$

и Z *есть* (b) — *рефлексивное KB — пространство.*

В главе II приведены также некоторые другие результаты, связанные с понятием (b) — рефлексивности.

Глава III посвящена счетнонормированным полуупорядоченным кольцам.

Некоторые определения.

1) Полуупорядоченное кольцо* X с частичными единицами умножения, являющееся одновременно KB^*-линеалом, называется кольцевым KB^*-линеалом.

2) Если в кольцевом KB^*-линеале система частичных единиц умножения сводится к одной обычной единице умножения, то мы его называем простым.

3) Кольцевым KB_0^* — линеалом мы называем простой кольцевой KB^*-линеал X, в котором для любых двух элементов x, $y \in X$ выполняется неравенство

$$\|xy\|_p \leqslant \|x\|_p \|y\|_p$$

и $\|1\|_p = 1$ для $p = 1, 2, 3, \ldots$ Здесь $\{\|\ \|_p\}$ — некоторая система полунорм, задающая топологию в X.

Теорема 2 (гл. III, § 2). *Пусть X — кольцевой KB^* — линеал. Для того, чтобы X был рефлексивным линейным топологическим пространством, необходимо, а в случае, когда X — простой, то и достаточно, чтобы X был KB^* — пространством.*

В § 3 этой главы приведены некоторые теоремы о кольцевых KB_0^* — линеалах. Метод, применяемый нами, до некоторой степени совпадает с методами, используемыми в работах [8, 9].

Теорема 2 (гл. III, § 3). *Пусть X — кольцевой KB_0^* — линеал, T — множество всех линейных мультипликативных функционалов на X, отличных от нулевого, наделенное слабой топологией* $\sigma(X^*, X)$. *Тогда X алгебраически, топологически и структурно изоморфен пространству* $C(T)$ — *всех непрерывных функций на T с топологией компактной сходимости.*

Теорема 3 (гл. III, § 3). *В условиях теоремы 2, для того чтобы в X каждое топологически ограниченное множество было ограничено по упорядочению (обратное всегда имеет место), необходимо и достаточно, чтобы реализационное пространство T было локально-компактно и* σ — *компактно.*

* Основные определения и результаты теории полуупорядоченных колец принадлежат Б. З. Вулиху, см. [1, 2].

В главе IV рассматривается некоторый класс операторов в KB — пространствах („почти интегральные операторы"). В широком классе случаев вводимые нами почти интегральные операторы совпадают с операторами, допускающими интегральное представление.

Определение. Пусть X и Y — произвольные KB — пространства. Обозначим через $K(X \to Y)$ компоненту K — пространства $H_r(X \to Y)$, порожденную множеством всех регулярных операторов из X в Y, области значений которых конечномерны. Операторы из $K(X \to Y)$ мы будем называть почти интегральными.

Отметим, что в дискретном KB — пространстве классы регулярных и почти интегральных операторов совпадают. В непрерывном же KB — пространстве тождественный оператор дизъюнктен всем почти интегральным (теоремы 2 и 3, гл. III).

В сепарабельном непрерывном KB — пространстве с аддитивной нормой каждый вполне непрерывный оператор является почти интегральным (теорема 4, гл. III).

Отметим также следующие результаты.

Теорема 6 (гл. III). *Пусть X и Y — произвольные KB — пространства, являющиеся фундаментами в $L[0, 1]$ и содержащие $M[0, 1]$, A — почти интегральный оператор из X в Y. Тогда существует такая суммируемая в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ функция $K(s, t)$, что*

$$(Ax)(s) \equiv \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt, \quad x \in X.$$

Теорема 7 (гл. III). *Пусть X и Y KB — пространства, являющиеся фундаментами в $L[0, 1]$ и содержащие $M[0, 1]$, A — регулярный оператор из X в Y. Тогда существует такая суммируемая в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ функция $K(s, t)$, что для любого $x \in X$*

$$(Ax)(s) = \frac{d}{ds} \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

при почти всех s.

Основные результаты диссертации опубликованы в [5, 6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вулих Б. З. Обобщенные полуупорядоченные кольца, Матем. сб., 33 (75), № 2 (1953), 343—358.

[2] Вулих Б. З. О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец, Уч. зап. Лен. пед. ин-та им. Герцена, 166 (1958), 3—15.

[3] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М, 1961.

[4] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.

[5] Лозановский Г. Я. О топологически рефлексивных KB — пространствах, ДАН СССР, 158, № 3 (1964).

[6] Лозановский Г. Я. О рефлексивных пространствах, обобщающих рефлексивные пространства Орлича, ДАН СССР, 163, № 3 (1965).

[7] Лозановский Г. Я. О счетнонормированных полуупорядоченных кольцах, Сиб. мат. журнал, 6, № 4 (1965).

[8] Michael E. Locally multiplicatively convex topological algebras, Mem. Amer. math. soc. 11 (1952).

[9] Warner S. The topology of compact convergence on continuous function spaces, Duke math. J., 25, № 2 (1958), 265—282.

Тип. ЛОЛГУ. Заказ 645. Тир. 180. — 1/2 п. л. М 21357. 16-IX-65 г.

Бесплатно

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1965

том 163, № 3

Доклады Академии наук СССР
1965. Том 163, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ОБОБЩАЮЩИХ РЕФЛЕКСИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 14 I 1965)

Настоящая работа является продолжением работы автора [1]. Вначале будут приведены некоторые простые и, тем не менее, по-видимому, ранее неизвестные результаты об N-функциях. Затем, опираясь на эти результаты, мы докажем некоторые теоремы о рефлексивных * банаховых пространствах, являющихся обобщением известных пространств Орлича.

Мы будем использовать терминологию и обозначения монографий [2, 3]. Напомним некоторые определения.

1. Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ называется N-функцией [2], если она четна и удовлетворяет условиям

$$M(u) > 0 \text{ при } u > 0, \quad \lim_{u\to 0}\frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Две N-функции M и N называются дополнительными друг к другу, если их производные $p(u) = M'(u)$ и $q(v) = N'(v)$ связаны соотношениями

$$q(v) = \sup_{p(u)\leqslant v} u, \quad p(u) = \sup_{q(v)\leqslant u} v.$$

2. Две N-функции M и N называются эквивалентными при всех u, если существуют такие постоянные $a, b > 0$, что при всех $u \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$M(au) \leqslant N(u) \leqslant M(bu). \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется только при $u \geqslant u_0 > 0$, то говорят, что $M(u)$ и $N(u)$ эквивалентны при больших u.

3. Важную роль во многих вопросах играет Δ_2-условие. N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию при всех u, если существует такая постоянная k, что для всех $u > 0$ справедливо неравенство

$$M(2u) \leqslant kM(u). \tag{2}$$

Если (2) выполняется только при $u \geqslant u_0 > 0$, то говорят, что M удовлетворяет Δ_2-условию при больших u.

Напомним, что для того чтобы N-функция, дополнительная к N-функции M, удовлетворяла Δ_2-условию при всех (при больших) значениях аргумента, необходимо и достаточно, чтобы

$$M(u) \leqslant \frac{1}{2l} M(lu) \tag{3}$$

при всех (при больших) значениях u, где $l > 1$ [2].

Введем следующие обозначения. $\mathfrak{M}_2$ — класс всех N-функций, удовлетворяющих Δ_2-условию при всех u; $\mathfrak{M}_2^2$ — класс всех N-функций, удовлетворяющих Δ_2-условию вместе со своими дополнительными функциями

* Во всей заметке термин рефлексивность понимается в смысле теории нормированных пространств.

при всех значениях аргумента; $\mathfrak{R}_2$ — класс всех N-функций, удовлетворяющих Δ_2-условию при больших u; $\mathfrak{R}_2^2$ — класс всех N-функций, удовлетворяющих Δ_2-условию вместе со своими дополнительными функциями, при больших значениях аргумента.

Теорема 1. *Пусть $M \in \mathfrak{R}_2$. Для того чтобы $M \in \mathfrak{R}_2^2$, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих двух условий:*

1) *Существуют такие $P \in \mathfrak{R}_2$ и число $p > 1$, что $M(u)$ эквивалентна $P(|u|^p)$ при больших u.*

2) *Существуют такие $Q \in \mathfrak{R}_2$ и число $q > 1$, что $M(u)$ эквивалентна $[Q(u)]^q$ при больших u.*

Теорема 1'. *Пусть $M \in \mathfrak{M}_2$. Для того чтобы $M \in \mathfrak{M}_2^2$, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих двух условий:*

1) *Существуют такие $P \in \mathfrak{M}_2$ и число $p > 1$, что $M(u)$ эквивалентна $P(|u|^p)$ при всех u.*

2) *Существуют такие $Q \in \mathfrak{M}_2$ и число $q > 1$, что $M(u)$ эквивалентна $[Q(u)]^q$ при всех u.*

Замечание. В части необходимости можно эти теоремы несколько усилить, а именно, потребовать, чтобы $P, Q \in \mathfrak{M}_2^2$ в теореме 1' и $P, Q \in \mathfrak{R}_2^2$ в теореме 1.

Дадим краткий набросок доказательства, например, теоремы 1'. В части достаточности теорема легко проверяется. Необходимость условия 1) можно показать, например, так. Положим

$$P(u) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i M(u_i^{1/p})\right\},$$

где инфинум в правой части берется по всевозможным наборам чисел α_1, α_2, α_3, u_1, u_2, $u_3 \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = |u|.$$

За p можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству

$$1 < p < 1 + \ln 2 / \ln l,$$

где l из неравенства (3). С помощью теоремы Каратеодори о том, что выпуклая оболочка множества, расположенного в n-мерном линейном пространстве, совпадает со всевозможными выпуклыми комбинациями всевозможных $(n+1)$-точечных наборов из этого множества ([4]), убеждаемся, что функция $P(u)$ — выпуклая. Затем с помощью несложных оценок проверяем, что $P(u) \in \mathfrak{M}_2$ (даже $P(u) \in \mathfrak{M}_2^2$) и что $M(u)$ эквивалентна $P(|u|^p)$ при всех u.

Далее нам понадобятся некоторые сведения из теории линейных полуупорядоченных пространств, в частности, понятие KB-пространства, введенное Л. В. Канторовичем. KB-пространством называется K-пространство, в котором определена норма, превращающая его в банахово пространство, причем выполнены условия: 1) из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$ (монотонность нормы); 2) если $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\| \to 0$; 3) если $x_n \uparrow +\infty$, то $\|x_n\| \to +\infty$ (см. также ([3])).

Пусть теперь X — произвольное KB-пространство, $\hat{X}$ — максимальное расширение X ([3]), причем в X зафиксирована единица 1. Имеет смысл ([5]) говорить о непрерывных функциях, заданных на $\hat{X}$. Положим для произвольного числа $p > 1$

$$X_p = \{x\colon x \in \hat{X},\ |x|^p \in X\},$$

т. е. X_p состоит из всех элементов из $\hat{X}$, p-я степень модуля которых содержится в X. Введем на X_p норму, полагая

$$\|x\|_p = \||x|^p\|^{1/p},$$

где $\| \ \|$ — норма в исходном KB-пространстве X. Таким образом полученное пространство $(X_p, \| \ \|_p)$ или любое ему алгебраически и структурно изоморфное пространство будем называть пространством типа X_p.

В [1] отмечено, что для произвольного KB-пространства X и числа $p > 1$ $(X_p, \| \ \|_p)$ является рефлексивным KB-пространством. Если за X было взято обычное пространство L_T всех суммируемых функций на некотором пространстве T с мерой, то X_p совпадает с обычным пространством $L_T{}^p$.

Теорема 2 *. *Пусть X — KB-пространство с единицей, $M(u) \in \mathfrak{N}_2{}^2$. Полагаем $X_M = \{x \colon x \in X,\ M(x) \in X\}$ и для $x \in X_M$ $\|x\|_M = \inf \{K \colon K > 0,\ \|M(x/k)\| \leqslant 1\}$, где $\| \ \|$ — норма в X.*

Тогда $(X_M, \| \ \|_M)$ есть рефлексивное KB-пространство.

Теорема 2′. *Пусть X — KB-пространство, $\hat{X}$ — его максимальное расширение, в котором зафиксирована единица 1, $M(u) \in \mathfrak{M}_2{}^2$. Полагаем: $X_M = \{x \colon x \in \hat{X},\ M(x) \in X\}$ и для $x \in X_M$ $\|x\|_M = \inf \{k \colon k > 0,\ \|M(x/k)\| \leqslant 1\}$, где $\| \ \|$ — норма в X.*

Тогда $(X_M, \| \ \|_M)$ есть рефлексивное KB-пространство.

Докажем, например, теорему 2′. Согласно теореме 1′ найдутся такие $P(u) \in \mathfrak{M}_2$ и число $p > 1$, что $M(u)$ эквивалентна $P(|u|^p)$ при всех u. Тогда нетрудно показать, что пространства X_M и $(X_P)_p$ совпадают по запасу элементов, а так как они оба являются KB-линеалами (даже KB-пространствами), то и нормы в них эквивалентны. Остается заметить, что $(X_P)_p$ есть пространство типа X_p, если за X взять X_P, а потому, в силу теоремы 1 из [1], рефлексивно.

Замечание 1. Известно, что пространство Орлича, построенное по N-функции $M(u)$ на некотором пространстве с мерой T, рефлексивно тогда и только тогда, когда $M(u) \in \mathfrak{N}_3{}^2$, если мера T конечна, и когда $M(u) \in \mathfrak{M}_2{}^2$, если мера T бесконечна [2,6]. Таким образом, наши теоремы 2 и 2′ являются обобщением указанных результатов в части достаточности, что получается, если в теоремах 2 и 2′ положить $X = L_T$, причем в первом случае мера T конечна, а во втором бесконечна.

Замечание 2. Из всего сказанного вытекает, что рефлексивное пространство Орлича всегда эквивалентно пространству типа X_p с некоторым $p > 1$. Отметим, что в работе [1] приведен пример рефлексивного KB-пространства, не изоморфного алгебраически и структурно пространству X_p ни при каком KB-пространстве X и числе $p > 1$. Таким образом, в этом смысле, произвольное рефлексивное KB-пространство устроено сложнее, чем рефлексивное пространство Орлича.

Замечание 3. В отличие от пространств Орлича, возможен случай, когда пространство X_M, построенное по KB-пространству X и N-функции $M(u)$, рефлексивно, но $M \overline{\in} \mathfrak{N}_2{}^2$. Например, если положить $X = L^p [0; 1]$ при любом $p > 1$, то X_M рефлексивно тогда и только тогда, когда $M(u) \in \mathfrak{N}_2$.

Отметим также следующую теорему, которую приведем для простейшего случая $T = [0; 1]$.

Теорема 3. *Пространство Орлича $L_M{}^*[0; 1]$ рефлексивно тогда и только тогда, когда найдутся такие $Q(u) \in \mathfrak{N}_2$ и число $q > 1$, что пространства $L_M{}^*$ и $(L^q)_Q$ изоморфны алгебраически, топологически и структурно.*

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы 1. Из теоремы 3 следует, что, в некотором смысле, рефлексивные пространства Орлича так же относятся к пространствам L^p при $p > 1$, как произвольные пространства Орлича относятся к пространству L.

Пусть теперь X — KB-пространство, являющееся фундаментом в $L[0; 1]$ и содержащее все ограниченные функции из $L[0; 1]$, $p > 1$ — произвольное

* В [1] эта теорема приведена только для случая, когда X непрерывно и сепарабельно.

число, $p_1 = p/(p-1)$. Положим

$$X' = \{y\colon y \in L,\ xy \in L \text{ при любом } x \in X\},$$

$$(X_p)' = \{y\colon y \in L,\ xy \in L \text{ при любом } x \in X_p\},$$

$$(X')_p = \{x\colon x \in L,\ |x|^p \in X'\}.$$

Напомним, что X' и $(X_p)'$ естественным образом отождествляются с пространствами, сопряженными к X и X_p соответственно ([1]). Положим также

$$(X')_p \times L^{p_1} = \{xy\colon\ x \in (X')_p,\ y \in L^{p_1}\}.$$

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$(X_p)' = (X')^p \times L^{p_1}.$$

Замечание. Указанная формула является обобщением того хорошо известного факта, что, в определенном смысле, сопряженным к L^p пространством является пространство L^{p_1}.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Б. З. Вулиху за внимание к настоящей работе.

Примечание при корректуре. После того как работа была направлена в печать, автору стало известно, что результаты, близкие по содержанию к теоремам 1 и 1′, имеются в работе ([7]).

Поступило
6 I 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Я. Лозановский, ДАН, 158, № 3 (1964). [2] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, 1958. [3] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961. [4] C. Carathéodori, Rendiconti di Palermo, 32, 193 (1911). [5] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950. [6] H. W. Milnes, Pacif. J. Math., 7, 3 (1957). [7] W. Orlicz, Proc. Intern. Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 19

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 4

ЛЕНИНГРАД
1965

УДК 517.432

Г. Я. Лозановский

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОПЕРАТОРАХ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Для любых двух K-пространств X и Y через $H_r(X \to Y)$ мы будем обозначать класс всех регулярных операторов из X в Y [1]. Если X и Y, кроме того, нормированные пространства, например, KB-пространства, то $H_r(X \to Y)$ и $H_b(X \to Y)$ являются нормированными пространствами, если на них рассматривать обычную операторную норму.

Известно [1], что если X — KB-пространство с аддитивной нормой, а Y — произвольное KB-пространство, то $H_r(X \to Y) = H_b(X \to Y)$ и для любого $U \in H_r(X \to Y)$ будет $\|U\| = \||U|\|$. Отсюда следует, что в этом случае $H_r(X \to Y) = H_b(X \to Y)$ есть (b)-полное KN-пространство. Возникает вопрос, что получиться, если отказаться от аддитивности нормы на X.

Мы покажем, что если за X взять гильбертово пространство $L_2(0; +\infty)$ с естественным упорядочением, то, во-первых, на пространстве $H_r(X \to Y)$ не существует эквивалентной монотонной нормы *, а во-вторых, оно не является (b)-полным, т. е. банаховым.

Для доказательства первого утверждения достаточно построить последовательность операторов A_n, $n = 1, 2, \ldots$, где $A_n \in H_r(X \to X)$, такую, что

$$\sup_n \|A_n\| < +\infty$$

и

$$\sup_n \||A_n|\| = +\infty.$$

Положим для $x \in X$

$$Ax(s) = \int_0^1 x(t) \cos st\,dt.$$

Из теоремы Планшереля [2], следует, что оператор $A \in H_b(X \to X)$. Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$A_n x(s) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s > n, \\ \int_0^1 x(t) \cos st\,dt & \text{при} \quad 0 < s < n. \end{cases}$$

Тогда $A_n \in H_r(X \to X)$, причем

$$|A_n|\, x(s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s > n, \\ \int_0^1 x(t)\, |\cos st|\, dt & \text{при} \quad 0 < s < n. \end{cases}$$

Так как $\|A_n\| \leqslant \|A\|$ то достаточно убедиться, что $\||A_n|\| \underset{n \to \infty}{\to} \infty$. Возьмем функцию

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 1, \\ 1 & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Тогда $\|e\| = 1$ и

$$|A_n|\, e(s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s > n, \\ \int_0^1 |\cos st|\, dt & \text{при} \quad 0 < s < n. \end{cases}$$

Так как $\int_0^1 |\cos st|\, dt \geqslant \int_0^1 \cos^2 st\,dt = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2s}{4}$, то, очевидно,

$$\||A_n|\, e\| \underset{n \to \infty}{\to} \infty,$$

* Норма на K-линеале называется монотонной, если из того, что $|x| \leqslant |y|$, следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$.

тем более

$$\|A_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Докажем теперь второе утверждение. Заметим, что конус положительных элементов в H_r нормален и замкнут. Известно, что банахова структура тогда и только тогда эквивалентна KB-линеалу, когда конус положительных элементов в ней нормален и замкнут [3].

Поэтому, если допустить, что H_r — (b)-полно, то H_r эквивалентно KB-линеалу, что противоречит доказанному ранее отсутствию на H_r эквивалентной монотонной нормы.

2. В статье [4] поставлен вопрос, существует ли нерегулярный (o)-линейный оператор из одного K-пространства в другое. Здесь (o)-линейность понимается не в смысле [1], а в смысле монографии [5], т. е. аддитивный и однородный оператор A из K-пространства X в K-пространство Y называется (o)-линейным, если он переводит (o)-сходящиеся последовательности из X в (o)-сходящиеся же последовательности в Y. Напомним, что если X регулярно, а Y — K^+ пространство, то классы регулярных и (o)-линейных операторов из X в Y совпадают [5].

Мы сейчас приведем чрезвычайно простой пример нерегулярного (o)-линейного оператора и тем самым дадим ответ на указанный вопрос.

Положим $X = L\,[0, 2\pi]$, а $Y = c_0$ (пространство всех сходящихся к нулю числовых последовательностей). Для $x \in X$ положим

$$Ax = \left\{\int_0^1 x(t)\sin t\,dt, \ \int_0^1 x(t)\sin 2t\,dt, \ \ldots, \int_0^1 x(t)\sin nt\,dt, \ \ldots\right\},$$

т. е. каждой функции $x \in X$ мы сопоставляем $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{\pi}\right)$ строчку синус-коэффициентов Фурье. Последовательность $x_n = \sin nt$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена по упорядочению в X, а последовательность Ax_n в Y, очевидно, по упорядочению не ограничена. Отсюда следует, что A не регулярен. Кроме того, так как A, очевидно, (b)-линеен, а X — KB-пространство, то он переводит (o)-сходящиеся последовательности из X в (b)-сходящиеся последовательности из Y. Остается заметить, что в пространстве c_0 (o)- и (b)-сходимости совпадают для последовательностей.

Отметим также, что A является (bo)-линейным оператором, не имеющим абстрактной нормы (см. [1], гл. VIII, § 6).

Summary

1. It is proved that the normed space of all regular operators in $L_2(0, +\infty)$ is not complete.

2. It is proved that there exists a linear operator from K-space into K-space which is (o)-linear, but not regular.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
2. Н. Винер. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., ИЛ, 1963.
3. Б. З. Вулих. О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой. ДАН СССР, 147, № 2, 1962.
4. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер. Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства. УМН, VI, вып. 3(43), 1951.
5. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., Гостехиздат, 1950.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 1964 г.

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1964

Том 158, № 3

Доклады Академии наук СССР
1964. Том 158, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О ТОПОЛОГИЧЕСКИ РЕФЛЕКСИВНЫХ KB-ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 IV 1964)

Известно, что с пространством L суммируемых функций тесно связаны многие другие банаховы пространства, оказывающиеся рефлексивными *, например, L_p при $p > 1$ и многие пространства Орлича. Напомним, что пространство Орлича в случае, когда функции заданы на ограниченном замкнутом множестве эвклидова пространства, рефлексивно тогда и только тогда, когда определяющая его N-функция $M(u)$ и дополнительная N-функция удовлетворяют Δ_2-условию ((1), стр. 152).

В этой заметке показывается, что теория полуупорядоченных пространств позволяет построить аналогичные и даже более разнообразные рефлексивные и притом KB-пространства, исходя из произвольного KB-пространства. Понятие KB-пространства, как известно, введено Л. В. Канторовичем. Это K-пространство, в котором определена норма, превращающая его в банахово пространство, причем выполнены условия: 1) из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$; (монотонность нормы); 2) если $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\| \to 0$; 3) если $x_n \uparrow +\infty$, то $\|x_n\| \to +\infty$ (см. также (2)).

Пусть X-произвольное KB-пространство, в котором выделено полное множество попарно дизъюнктных положительных элементов; $\hat{X}$ — максимальное расширение пространства X (2). Имеет смысл (3) говорить о непрерывных функциях, заданных на $\hat{X}$. Положим для произвольного $p \geqslant 1$

$$X_p = \{x \colon x \in \hat{X}, |x|^p \in X\},$$

т. е. X_p состоит из всех элементов из $\hat{X}$, p-я степень модуля которых содержится в X. Введем на X_p норму, полагая

$$\|x\|_p = \||x|^p\|^{1/p},$$

где $\| \ \|$ — норма в исходном KB-пространстве X.

Теорема 1. *X_p при $p > 1$ есть рефлексивное KB-пространство.*

Отметим, что если $X = L$, то X_p совпадает с обычным пространством L_p.

Хотя теорема 1 представляет непосредственное обобщение известной теоремы о рефлексивности пространств L_p, однако доказательство теоремы 1 проводится совсем другим методом и опирается на некоторые соображения из теории полуупорядоченных пространств и теорему Д. П. Мильмана о рефлексивности равномерно выпуклых пространств (равномерно выпуклыми оказываются не сами X_p, а некоторые вспомогательные пространства).

Остановимся также на пространствах $L^p_{(w)}$, рассмотренных Гальпериным, например, в (4). Если положить $X = L^1_{(w)}$ и если это X — KB-пространство, то $X_p = L^p_{(w)}$ при $p > 1$ есть рефлексивное KB-пространство.

Пространства L^P, где $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, подробно рассмотренные А. Бенедеком и Панцоне (5), тоже тесно связаны с введенными нами пространствами X_p. Если $1 < p_i < \infty$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то L^P, совпадает с нашим пространством X_p, построенным по $X = L^Q$, где $p = \min p_i$ и и $Q = (p_1/p, p_2/p, \ldots, p_n/p)$. Так как L^Q — KB-пространство, то отсюда

* Во всей заметке термин рефлексивность понимается в смысле теории нормированных пространств.

(при указанных условиях $1 < p_i < \infty$) вытекает рефлексивность пространств L^P.

Теорема 2. *Пусть X — сепарабельное непрерывное KB-пространство с единицей, $M(u)$ — N-функция, которая вместе с дополнительной N-функцией удовлетворяет Δ_2-условию. Положим*

$$X_M = \{x\colon x \in X,\ M(x) \in X\}$$

и введем на X_M новую норму, полагая

$$\| x \|_{(M)} = \inf \left\{K\colon K > 0,\quad \left\| M\left(\frac{x}{K}\right)\right\| \leqslant 1\right\}$$

(здесь $\| \ \|$ — норма в X). Тогда X_M с указанной нормой есть рефлексивное сепарабельное KB-пространство.

Отметим, что если, например, $X = L[0, 1]$, то X_M есть пространство Орлича L^*_M, снабженное нормой Люксембурга, эквивалентной норме по Орличу ([1]).

Доказательство теоремы 2 основано на известных теоремах о конкретном представлении сепарабельных KB-пространств ([3]).

Теорема 3. *Пусть X — KB-пространство с единицей. Тогда для каждого $x \in X$ найдется такой фундамент* Y в X, что $x \in Y$ и что в Y можно ввести новую норму, при которой Y будет рефлексивным KB-пространством.*

Эта теорема вытекает из теоремы 1. Именно, без ограничения общности можно считать, что x — ограниченный элемент, ибо в противном случае этого можно было бы добиться, выбрав новую единицу. Тогда за Y можно взять любое из пространств X_p при $p > 1$. $X_p \subset X$, так как X — пространство с единицей.

Несколько сложнее доказывается.

Теорема 4. *Пусть X — бесконечномерное KB-пространство с единицей. Тогда для каждого $x \in X$ найдется такой фундамент Z в X, что $x \in Z$ и что Z с некоторой новой нормой есть нерефлексивное KB-пространство.*

Из некоторых результатов ([3]) нетрудно вывести следующее.

Пусть P — KB-пространство с единицей, на котором задан существенно положительный линейный функционал f_0. Положим

$$Q = \{x\colon x \in \hat{P},\ \sup_{\substack{0 \leqslant x' \leqslant |x| \\ x' \in P}} f_0(x') < +\infty\},$$

где $\hat{P}$ — максимальное расширение пространства P. Обозначим через $\bar{f}_0$ вполне линейное распространение функционала f_0 на все Q. Оно существует и единственно ([3]). Положим также

$$R = \{y\colon y \in Q, xy \in Q \text{ при любом } x \in P\}.$$

Тогда любой функционал $f \in P'^{**}$ имеет вид

$$f(x) = \bar{f}_0(xy), \tag{$*$}$$

где y — некоторый элемент из R, и такое представление единственно. Верно и обратное: при любом $y \in R$ функционал f, определенный формулой ($*$), входит в P'. Таким образом, по своему составу R можно рассматривать как сопряженное пространство к P.

Теорема 5. *В пространстве $L[0, 1]$ существует такой фундамент R, который содержит все $L_p[0, 1]$ при $p > 1$ и который при некотором выборе нормы является рефлексивным KB-пространством.*

---

* Линейное подмножество $Y \subset X$ называется фундаментом, если оно содержится в X нормально и полно (([2]), стр. 112).

** Если X — нормированное пространство, то через X' мы обозначаем сопряженное к X пространство.

Дадим краткий набросок доказательства этой теоремы. Пусть P — множество всех функций из $L[0, 1]$, для которых

$$\|x\| = \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \|x^2\|_{L_p}\right]^{1/2} < +\infty.$$

С помощью теоремы 1 можно проверить, что P — рефлексивное KB-пространство. Теперь используем предыдущее предложение об общей форме линейного функционала, взяв

$$f_0(x) = \int_0^1 x(t)\, dt,$$

где $x \in P$. В этом случае Q совпадает с L. Тогда пространство R будет состоять из всех таких $y \in L$, что

$$\int_0^1 |x(t)\, y(t)|\, dt < +\infty$$

при любом $x \in P$. Это R и есть требуемое, если его снабдить топологией пространства, сопряженного к P.

Замечание 1. Построенное пространство R, хотя и является рефлексивным KB-пространством, но не есть пространство типа X_p ни при каком выборе KB-пространства X и числа $p > 1$.

Замечание 2. Д. А. Владимиров обратил мое внимание на то, что R не является пространством Орлича, но содержит все рефлексивные пространства Орлича. Кроме того, если x — произвольный элемент из R, то и все функции, равноизмеримые с x, также содержатся в R.

Теорема 6. *Пусть X — K-пространство, X_1 и X_2—два его фундамента, являющиеся рефлексивными KB-пространствами с нормами $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ соответственно. Положим $X_3 = X_1 \cap X_2$. Введем на X_3 норму*

$$\|x\|_3 = \max\ \{\|x\|_1, \|x\|_2\}.$$

Тогда X_3 — рефлексивное KB-пространство.

Отметим, что из этой теоремы вытекает ответ на один из вопросов Гальперина ([4], стр. 247—249). Именно, используя обозначения Гальперина, укажем, что пространство L^λ, построенное по функции

$$\lambda(u) = \lambda^p_{(\varphi_1, \varphi_2)}(u) = \max\left(\lambda^p_{(\varphi_1)}(u),\ \lambda^p_{(\varphi_2)}(u)\right),$$

рефлексивно, если рефлексивны пространства $L^p_{(\varphi_1)}$ и $L^p_{(\varphi_2)}$.

Теорема 7. *В условиях теоремы 6 в множестве $X_1 + X_2$, т. е. в линейной оболочке X_1 и X_2, можно задать норму так, что оно будет рефлексивным KB-пространством.*

Из теорем 6 и 7 следует, что все фундаменты заданного K-пространства X, являющиеся рефлексивными KB-пространствами, образуют дистрибутивную структуру, если их упорядочить по включению. Обозначим эту структуру через $\mathfrak{S}$. Если X содержит единицу e, то положим

$$\mathfrak{T} = \{Y\colon e \in Y \in \mathfrak{S}\}.$$

В этом случае $\mathfrak{T}$ есть подструктура $\mathfrak{S}$.

Пусть, в частности, X — KB-пространство с аддитивной нормой и единицей. Возьмем функционал

$$f_0(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$$

и используем сделанное ранее замечание. Тогда каждому рефлексивному KB-пространству Y, являющемуся фундаментом в X и содержащему единицу (тем самым $Y \in \mathfrak{T}$), однозначно сопоставляется его сопряженное Y', причем $Y' \in \mathfrak{T}$. Можно доказать, что в дистрибутивной структуре $\mathfrak{T}$ имеют место следующие соотношения между сопряженными пространствами: именно, для любых $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{L}$

$$(Y_1 \vee Y_2)' = Y_1' \wedge Y_2', \quad (Y_1 \wedge Y_2)' = Y_1' \vee Y_2'.$$

Если $Y_1 = Y_1'$, то Y_1 — гильбертово пространство X_2.

Выражаю благодарность моему научному руководителю проф Б. З. Вулиху за внимание и ценные советы.

Поступило
15 IV 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, 1958. [2] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961. [3] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950. [4] J. Halperin, Proc. Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961. [5] A. Benedek, R. Panzone, Duke Math. J., 28, № 3, 301 (1961).

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 19

СЕРИЯ

МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 4

ЛЕНИНГРАД

1962

А тогда

$$\varkappa_{AB} = \alpha_{AB} - \beta_{AB} = \varkappa_A + \varkappa_B.$$

З а м е ч а н и е. Теорема 2 остается в силе и для произведения BA.

Теперь доказательство теоремы 1 становится очевидным. Действительно, сумму операторов $A_0 + A_1T$ и $A_0 + TA_0$ можно представить в виде A_0B или BA_0 соответственно, где $B \equiv I + T$. Но индекс оператора B равен нулю, следовательно,

$$\varkappa_{A_0B} = \varkappa_{A_0} \text{ и } \varkappa_{BA_0} = \varkappa_{A_0},$$

что и требовалось доказать.

Summary

The singular integral equations in one independent variable, with its "symbols" vanish in some points are considered. The generalization of Sherman's (1) results to the case of non-integer degree is given.

We receive the expression for index and the sufficient conditions of index stability.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Ш е р м а н. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений. Прикл. матем. и мех., 15, 1951.
2. Ф. Д. Г а х о в. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
3. Л. В. К а н т а р о в и ч, Г. П. А к и л о в. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
4. И. Ц. Г о х б е р г, М. Г. К р е й н. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, 12, вып. 2, 74, 1957.

Статья поступила в редакцию 1 марта 1962 г.

Г. Я. Лозановский

О КОНУСАХ В НОРМИРОВАННЫХ СТРУКТУРАХ

Под нормированной (соответственно банаховой) структурой понимается линейная структура (K линеал), которая одновременно является нормированным (соответственно банаховым) пространством. Никакого согласования нормы с упорядочением при этом не требуется. Если же из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$, то нормированная структура называется KN-линеалом. Подмножество K линейного множества L называется конусом, если при любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ $\alpha K + \beta K \subset K$ и $K \cap (-K) = (0)$.

При изучении нормированных структур в некоторых вопросах существенную роль играет замкнутость конуса положительных элементов. Хорошо известно, что в неархимедовой нормированной структуре конус положительных элементов не может быть замкнутым. В то же время ни в одной из известных автору работ, посвященных нормированным структурам, не приводится примера архимедовой нормированной структуры с незамкнутым конусом положительных элементов. Два примера таких структур, и притом банаховых, строятся в этой заметке. В первом примере замыкание конуса положительных элементов содержит целую прямую; во втором конус нормален* и все же не замкнут.

1.** Пусть $C([0, 1])$ — пространство всех вещественных непрерывных функций на $[0, 1]$ с обычным упорядочением. Оно является K-линеалом. Возьмем последовательность функций

$$x_n = \sin nt + 2, \quad n = 2, 3, \ldots$$

и достроим ее до базиса Хамеля в $C([0, 1])$: $\{x_\xi\}$. Если $x \in C([0, 1])$ и $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{\xi_i}$,

---

* Конус K в нормированном пространстве называется нормальным [1], если существует такое $\delta > 0$, что для любых нормированных $x_1, x_2 \in K$ имеет место неравенство

$$\|x_1 + x_2\| \geqslant \delta.$$

** Метод построения этого примера заимствован из работы [2].

то полагаем $\|x\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i x_{\xi_i} \right\|$, где $\beta_i = \frac{1}{n}$, если $\xi_i = n$, и $\beta_i = 1$ в остальных случаях, а норма $\|x\|$ — обычная норма в C. C с новой нормой будет банаховым пространством, так как оно линейно изометрично обычному пространству $C([0, 1])$. Таким образом, C с новой нормой и обычной упорядоченностью будет банаховой архимедовой структурой. Последовательность x_n по новой норме сходится к нулю, так как $\|x_n\|_1 = \frac{3}{n}$. Следовательно, последовательность $y_n = \sin nt + 1$ сходится по новой норме к функции $y \equiv -1$. Заметим, что $y_n(t) \geq 0$.

Таким образом, замыкание конуса положительных элементов содержит всю прямую, состоящую из констант.

2. В $C([0, 1])$ выберем базис Хамеля, состоящий из неотрицательных функций

$$\{\omega_\xi\}, \quad (\xi \in \Xi). \tag{1}$$

Упорядочение введем так: функцию $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_{\xi_i}$ будем считать положительной, если все $\alpha_i \geq 0$. Обозначим через X_+ конус так определенных положительных элементов. Очевидно, что C с таким упорядочением будет K-линеалом, даже K-пространством, так как оно, очевидно, изоморфно K-пространству Y всех функций, заданных на Ξ и принимающих только конечное число отличных от нуля значений, упорядоченному естественным образом. Ясно, что X_+ нормален относительно обычной нормы C, поскольку норма монотонна на X_+. Докажем, что конус X_+ не замкнут. Допустим, что конус X_+ замкнут. Известно (теорема Крейна-Шмульяна, [3] и [4]), что если в банаховом частично упорядоченном пространстве B конус B_+ — замкнутый и воспроизводящий, то существует такая постоянная M, что для любого $x \in B$ найдутся $y, z \in B_+$ так, что $x = y - z$ и $\|y\| < M\|x\|$. Отсюда легко вытекает, что если мы возьмем счетное плотное в X_+ множество положительных элементов

$$\{x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то всякий $z \in X_+$, такой, что $z d z_k$ при всех k равен нулю. Поэтому элемент

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k (1 + \|z_k\|)},$$

где ряд сходится по норме, являлся бы единицей. Но C с нашим упорядочением, очевидно, единицы не имеет. Таким образом, X_+ не замкнут.

Примечание. Если бы вместо $C([0, 1])$ мы взяли произвольное бесконечномерное KB-пространство, то в результате получился бы пример банаховой архимедовой структуры с вполне правильным [5], но не замкнутым конусом положительных элементов.

3. Второй пример связан также со следующим вопросом. Пусть X — KN-линеал; X' — пространство всех линейных непрерывных относительно сходимости по норме функционалов; $\widetilde{X}$ — совокупность всех регулярных функционалов. Известно [6], что $X' \subset \widetilde{X}$ и погружение X' в $\widetilde{X}$ нормально, т. е. из того, что $f \in X'$, $g \in \widetilde{X}$ и $|g| \leq |f|$ вытекает, что $g \in X'$. При этом, если $f \in X'$, то $f = f_+ - f_-$, где

$$f_+(x) = \sup_{0<y<x} f(y), \quad f_-(x) = -\inf_{0<y<x} f(y) \quad \text{при } x \geq 0;$$

f_+ и f_- непрерывны. Если X — просто нормированная структура, даже с нормальным конусом X_+, то погружение X' в $\widetilde{X}$, хотя и имеет место по одной теореме М. Г. Крейна [1], но может не быть нормальным. Это и подтверждается примером 2.

Для доказательства заметим, что во втором примере с самого начала можно было бы потребовать, чтобы функции

$$Y_0 = e^t \text{ и } x_n = t^n, \quad t \in [0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

входили в множество (1). Возьмем $f \in C'$, действующий по формуле

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\left(t - \frac{5}{9}\right) dt.$$

Легко проверить, что

$$f(y_0) > 0,\ f(x_0) < 0,\ f(x_i) > 0 \text{ при } i = 1, 2, \ldots$$

Кроме того, по непрерывности f,

$$f(y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x_k)}{k!}.$$

Так как Y_0 и x_i, $i = 0, 1, \ldots$ входят в (1) и справедливо (2), то

$$f_+(y_0) = f(y_0),$$
$$f_+(x_0) = 0,$$
$$f_+(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Следовательно, соотношение $f_+(y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_+(x_k)}{k!}$ не имеет места. Значит, функционал f_+ не является непрерывным. Поэтому, в частности, вложение X' в $\widetilde{X}$ не нормально.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Б. З. Вулиха за постановку задачи и внимание.

Summary

Two examples of Banach Archimedian lattice with unclosed cones of positive elements are given. In the first example the closure of positive cone contains a whole straight line. In the second example the positive cone is normal but not closed.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха. ДАН, 28, № 1, 13—17, 1940.
2. Б. М. Макаров. О топологической эквивалентности пространств. ДАН, 107, 17—18, 1956.
3. И. А. Бахтин, М. А. Красносельский, В. Я. Стеценко. О непрерывности линейных положительных операторов. Сиб. матем. ж., 3, № 1, 156—160, 1962.
4. М. Г. Крейн. О минимальном разложении линейного функционала на положительные составляющие. ДАН, 28, № 1, 18—22, 1940.
5. М. А. Красносельский. Правильный и вполне правильные конусы. ДАН, 135, № 2, 255—257, 1960.
6. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

Статья поступила в редакцию в мае 1962 г.

В. В. Петров

О НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМАХ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ имеющих конечные моменты $E|X_j|^k$ некоторого целого порядка $k \geq 3$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения нормированной суммы

$$Z_n = \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - EX_j),$$

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК I

Д. О. ШКЛЯРСКИЙ, Н. Н. ЧЕНЦОВ,
И. М. ЯГЛОМ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ I
АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

В заключение автор хочет поблагодарить А. М. Яглома, много помогавшего ему своими советами при работе над книгой и являющегося инициатором переработки цикла задач «Комплексные числа». Автор признателен также редактору книги А. З. Рывкину, тщательная работа которого над первым и вторым изданиями способствовала улучшению книги, а также всем читателям, сообщившим ему свои замечания, особенно И. В. Волковой, Л. И. Головиной, Р. С. Гутеру, Г. Лозановскому, И. А. Лурье, Я. Б. Рутицкому, А. С. Соколину и И. Я. Танатару.

И. М. Яглом

THREE NEW CARDINAL INVARIANTS
FOR NORMED LATTICES*

Y. A. Abramovich and G. Ya. Lozanovsky

(Department of Mathematics, IUPUI, Indianapolis, IN 46223)

ABSTRACT

For an arbitrary normed lattice X we introduce three cardinal characteristics $\mathfrak{a}(X)$, $\mathfrak{b}(X)$, and $\mathfrak{c}(X)$. The first one (Definition 2) is of purely order nature and the other two (Definitions 3 and 4) are of purely linear topological nature. The main result shows that under some mild restrictions on X and under the assumption of the generalized continuum hypothesis all these characteristics coincide. It is a very broad generalization (to arbitrary cardinality) of the corresponding characterization of the spaces with countable sup property (i.e., when $\mathfrak{a}(X) = \mathfrak{b}(X) = \mathfrak{c}(X) = \aleph_0$) due to the second author [6].

INTRODUCTION

Though this article is presented for publication by the first author many years after the death of the second author, nevertheless, I consider it a great honor to put the name of my late friend and teacher as a name of my coauthor. The reason for this is as follows.

In 1968, the second author announced in [6] his remarkable result that for any Dedekind complete Banach lattice with a sufficient set of order continuous functionals the purely order notion of countable sup property (countability of type) is equivalent to a purely linear topological property, namely to the absence of subspaces isomorphic to $\ell_\infty(S)$ with $\mathrm{card}(S) = \aleph_0$. The initial proof (never published) was found under the assumption of (CH) (continuum hypothesis). Later on [4], the second author found a new proof of this result independent of (CH).

* This research was supported in part by a grant from Chrysler Corporation to IUPUI.

Here a generalization of this theorem to an arbitrary cardinality will be presented. To do so, we generalize the initial proof of the second author and this explains why this article should be considered as a joint work. Since the initial proof was never published, the publication of this generalization (which is very far from being an easy one) seems quite reasonable. This proof is done under the assumption of (GCH) (generalized continuum hypothesis) and it is extremely interesting whether or not this assumption is essential. In the standard terminology and notation we follow [2] and [9]. For the most part we will use them without explanations.

To conclude the introduction, we note that since the now classical result due to Ogasawara that weak sequential completeness of a Banach lattice is equivalent to a purely order property (to be a KB–space) only a few other invariants of a similar nature were found. Rather completely these results are presented in [4]; and some of them may be found also in [2], [5] and [10]. Our theorem increases the list of these important invariants. In the concluding section of this work we will show several applications of this theorem.

DEFINITIONS AND THE MAIN RESULT

Throughout we will use small Gothic letters $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{n}$ to denote cardinal numbers and small Greek letters $\alpha, \beta, \ldots$ to denote ordinal numbers. If $\mathfrak{n}$ is a cardinal number, then $\mathfrak{n}^+$ denotes the next one and $\omega_\mathfrak{n}$ denotes the first ordinal number of cardinality $\mathfrak{n}$. If T is a set, then its cardinality is denoted by card(T); if α is an ordinal number, then its cardinality is denoted by $\overline{\alpha}$.

If T is an arbitrary set and $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(T)$, then symbols $\ell_\infty(T)$ and $\ell_\infty(\mathfrak{n})$ will denote the Banach space of all bounded real valued functions on T with the uniform norm. Symbol $\ell_\infty(\mathfrak{n})$ will be preferred in cases where there is no need to use the underlying space.

DEFINITION 1. Let X be a vector lattice and $\mathfrak{n}$ a cardinal number. We say that X has a (disjoint) $\mathfrak{n}$–system provided there exists in X an order bounded subset $\{x_i : i \in I\}$ of pairwise disjoint positive elements with $\mathrm{card}(I) = \mathfrak{n}$.

DEFINITION 2. Let X be a vector lattice. We put

$$\mathfrak{a}(X) = \sup\{\mathfrak{n} : \text{there exists an } \mathfrak{n}\text{–system in } X\}.$$

The cardinal number $\mathfrak{a}(X)$ will be called the type of disjointness (or disjointness type) of X. First this cardinal characteristic $\mathfrak{a}(X)$ for vector lattices was introduced in [1]. It is plain to see that the infinite dimensional vector lattices with countable sup property [2] or of countable type [9] are precisely vector lattices whose disjointness type equals $\aleph_0$

It is worth noting that for some Dedekind complete vector lattices X an $\mathfrak{a}(X)$–system may exist in X and for some X it may not exist. In the latter case, $\mathfrak{a}(X)$ is necessarily a limit number.

In the next two definitions, E is an arbitrary normed space.

DEFINITION 3. Let $\mathfrak{b}(E) = \sup \mathfrak{n}$, where supremum is taken over all cardinal numbers $\mathfrak{n}$, for which E has a subspace isomorphic to $\ell_\infty(\mathfrak{n})$.

Obviously, $\mathfrak{b}(\ell_\infty(\mathfrak{n})) = \mathfrak{n}$ for each $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{b}(E) \geq \aleph_0$ for infinite dimensional E.

Similar to $\mathfrak{a}(X)$, in some cases E may contain a subspace isomorphic to $\ell_\infty(\mathfrak{b}(E))$ and in some cases E may not. In the latter case $\mathfrak{b}(E)$ is a limit number.

DEFINITION 4. Let $\mathfrak{c}(E)$ be the first of cardinal numbers $\mathfrak{n}$, for which in E^*, Banach conjugate of E, there exists a system $\Phi = \{f\}$ of functionals, such that

(i) Φ separates the points of E, i.e., for each $0 \neq x \in E$ there exists a $f \in \Phi$ with $f(x) \neq 0$, and

(ii) For each $x \in E$ card $\{f \in \Phi: f(x) \neq 0\} \leq \mathfrak{n}$.

Obviously, both characteristics $\mathfrak{b}(E)$ and $\mathfrak{c}(E)$ are linear topological invariants and $\mathfrak{b}(E_1) \leq \mathfrak{b}(E)$ and $\mathfrak{c}(E_1) \leq \mathfrak{c}(E)$ for each subspace E_1 of E.

If now X is a normed lattice, then all three characteristics make sense for X, the first one $\mathfrak{a}(X)$ being of purely order nature. It turns out that under some mild restrictions on space X all these characteristics coincide.

THEOREM. Let X be a Dedekind complete normed lattice whose order dual $X_n^\sim$ separates the points of X. Then (assuming GCH)) $\mathfrak{a}(X) = \mathfrak{b}(X) = \mathfrak{c}(X)$.

The proof will consist of verification of the following three inequalities.

$$\mathfrak{a}(X) \leq \mathfrak{b}(X), \quad \mathfrak{c}(X) \leq \mathfrak{a}(X) \quad \text{and} \quad \mathfrak{b}(X) \leq \mathfrak{c}(X).$$

It is worthwhile to remark that the first inequality is valid without additional assumptions, the second inequality is valid without (GCH) and only the proof of the third inequality depends on both assumptions. We do not know whether or not they are essential. We note only that the assumption $\{X_n^\sim\}^0 = \{0\}$ is very mild. For example, all Banach function spaces satisfy it. We also stress that X *is not assumed to be Banach*. It is rather unusual for the problems like those under consideration.

PROOF. We will assume that X is infinite dimensional. (Otherwise the theorem is obviously true.)

1. Inequality $a(X) \le b(X)$ is almost obvious. Indeed, let $\{x_i : i \in I\}$ be an arbitrary disjoint n–system (i.e., card(I) $= n$, $x_i \wedge x_j = 0$ $(i \neq j)$ and $0 < x_i \le e \in X$). Since $b(X) \ge \aleph_0$, we can assume that $n \ge \aleph_0$, otherwise there is nothing to prove. Let us put $I_k = \{i \in I : \|x_i\| \ge \frac{1}{k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Since $\bigcup_{k=1} I_k = I$ there exists k_0 such that $\mathrm{card}(I_{K_0}) = n$. It obviously implies that X contains a subspace isomorphic to $\ell_\infty(n)$. This and the fact that n–system was an arbitrary one imply that $a(X) \le b(X)$.

2. Here we will prove the inequality $c(X) \le a(X)$. Since the space $X_n^\sim$ separates the points of X by the Luxemburg–Zaanen Theorem [7, Th. 37.1], the space $X_n^* = X^* \cap X_n^*$ also separates the points of X. Using Zorn's Lemma, we can find in X_n^* a full[†] system $\{f_i : i \in I\}$ of pairwise disjoint positive normed functionals. Let X_i denote the carrier[††] of f_i. Obviously we can additionally assume that each X_i has a weak unit x_i (otherwise we will partition X_i into pairwise disjoint smaller bands $\{X_{ij}\}_j$ with weak units and replace f_i by $f_{ij} = f_i|\, X_{ij}$).

Further, we introduce on each X_i a new norm $\|\cdot\|_i$ by setting

$$\| x \|_i = f_i(|x|).$$

† A subset D of a vector lattice Z is said to be full if $z = 0$ is the only element in Z which is disjoint to all elements from D.

†† That is, X_i is a disjoint complement to a null ideal $N_i = \{x \in X : f_i(|x|) = 0\}$.

It is easy to see that the order interval $[0, x_i] = \{ x \in X : 0 \leq x \leq x_i\}$ is a weakly compact subset[†] of $(X_i, \|\cdot\|_i)$ and a linear subspace generated by $[0, x_i]$ is dense in $(X_i, \|\cdot\|_i)$. Hence, $(X_i, \|\cdot\|_i)$ is a (WCG) space in the sense of J.Lindenstrauss, and consequently by the Amir–Lindenstrauss Theorem [3], there exists a continuous one–to–one linear operator A_i from $(X_i, \|\cdot\|_i)$ into the space $c_0(T_i)$, where $T_i = \{t^{(i)}\}$ is an appropriate set. Obviously, A_i is also continuous from $(X_i, \|\cdot\|)$ into $c_0(T_i)$.

For each $i \in I$ and each point $t^{(i)} \in T_i$ we define on X a linear functional $f_{i, t^{(i)}}$ by putting

$$f_{i, t^{(i)}}(x) = (A_i(P_{X_i} x))\,(t^{(i)}) \qquad (x \in X)$$

where P_{X_i} denotes the band projection from X onto X_i. Obviously $f_{i, t^{(i)}} \in X^*$. Let us define a set

$$\Phi = \{f_{i, t^{(i)}} : \quad i \in I, \quad t^{(i)} \in T_i\}.$$

It is clear that Φ separates the points of X. To finish the proof of the second inequality, it is enough to show that for each $x \in X$

$$\mathrm{card}\{f \in \Phi : f(x) \neq 0\} \leq \alpha(X).$$

Indeed, for each $x \in X$ we have $\mathrm{card}\{i \in I : P_{X_i}(x) \neq 0\} \leq \alpha(X)$ and each element of $c_0(T_i)$ takes on nonzero values on at most countable subset of T_i. Therefore,

$$\mathrm{card}\{f \in \Phi : f(x) \neq 0\} \leq \alpha(X) \cdot \aleph_0 = \alpha(X).$$

† This follows from a known theorem due to H. Nakano on compactness of order intervals in the topology $\sigma(X, \tilde{X_n})$.

This proves that $\mathfrak{c}(X) \leq \mathfrak{a}(X)$.

3. Here we will prove the last inequality $\mathfrak{b}(X) \leq \mathfrak{c}(X)$. The core of the proof is in the following lemma whose proof will be postponed until after we have finished the above inequality.

<u>**MAIN**</u> <u>**LEMMA**</u>. For each cardinal number $\mathfrak{n}$ the following inequality is true: $\mathfrak{c}(\ell_\infty(2^{\mathfrak{n}})) > \mathfrak{n}$.

Only at the stage of applying the main lemma (GCH) will be used.

Let us assume (contrary to what we want to prove) that $\mathfrak{c}(X) < \mathfrak{b}(X)$. By the definition of $\mathfrak{b}(X)$ the following two cases are possible. Either (i) X contains a subspace (isomorphic to) $\ell_\infty(\mathfrak{b}(X))$, or (ii) X does not contain such a space.

Let us consider the case (i). Since $\mathfrak{c}(X) < \mathfrak{b}(X)$ in view of (GCH), $2^{\mathfrak{c}(X)} \leq \mathfrak{b}(X)$ and therefore X contains a subspace $X_1 = \ell_\infty(2^{\mathfrak{c}(X)})$. But this implies (by the main lemma) that

$$\mathfrak{c}(X) \geq \mathfrak{c}(X_1) = \mathfrak{c}(\ell_\infty(2^{\mathfrak{c}(X)}) > \mathfrak{c}(X)$$

a contradiction.

Let us turn to the case (ii). As we already remarked (after Definition 3) in this case $\mathfrak{b}(X)$ is a limit cardinal number and hence inequality $\mathfrak{c}(X) < \mathfrak{b}(X)$ implies that

$2^{c(X)} = c(X)^+ < b(X)$. But then X contains $X_1 = \ell_\infty(2^{c(X)})$ and we again, as above, arrive at a contradiction. Except for the main lemma, the proof of the theorem is completed.

THE PROOF OF THE MAIN LEMMA†

We assume that $\mathfrak{n}$ is an infinite cardinal number, otherwise the statement is trivially correct. Let us fix a set S of cardinality $2^{\mathfrak{n}}$. Further, let us assume that for each $\alpha \in W_{\mathfrak{n}^+} = \{\alpha : \alpha < \omega_{\mathfrak{n}^+}\}$ there exists a partition π_α of the set S or of a subset of S (which is independent of α) into pairwise disjoint nonempty subsets satisfying the following three conditions:

⟨1⟩ Each partition π_α is uncountable.

⟨2⟩ For each $F \in \pi_\alpha$ and for each $\beta > \alpha$ $(\beta \in W_{\mathfrak{n}^+})$, the set F is an uncountable union of elements from π_β.

⟨3⟩ If for each $\beta < \alpha$ $(< \omega_{\mathfrak{n}^+})$ we have chosen $F_\beta \in \pi_\beta$, such that $F_{\beta_2} \subset F_{\beta_1}$ for $\beta_2 > \beta_1$, then $\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$ is an uncountable union of elements from π_α.

Before justifying the existence of such partitions, we will apply them to prove the lemma.

Let $\Phi = \{f\}$ be an arbitrary system in $\ell_\infty(S)^*$ separating the points in $\ell_\infty(S)$. Our goal is to find an $x \in \ell_\infty(S)$, such that

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi : f(x) \neq 0\} > \mathfrak{n}.$$

† We emphasize that this lemma is independent of (GCH).

First we will show that for each $\alpha \in W_{\Pi^+}$ there exist $f_\alpha, E_\alpha, F_\alpha$ that satisfy the following four conditions:

1) $f_\alpha \in \Phi$
2) $E_\alpha, F_\alpha \subset S,\ \ E_\alpha \cap F_\alpha = \emptyset$
3) $E_\beta \oplus F_\beta \subset F_\alpha$ for $\beta > \alpha$
4) $f_\alpha(\chi(E_\alpha)) \neq 0,\ |f_\alpha|\ (\chi(F_\alpha)) = 0$

where $\chi(E)$ denotes, as usual, the characteristic function of the set E.

Let us remark that 3) and 4) imply that $f_{\alpha_1} \neq f_{\alpha_2}$ for $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

The construction of $\{f_\alpha\}$ $\{E_\alpha\}$ and $\{F_\alpha\}$ is by induction on α. An arbitrary set from π_1 will be taken as E_1. Since Φ separates the points of $\ell_\infty(S)$, there exists an $f_1 \in \Phi$, such that $f_1(\chi(E_1)) \neq 0$. By $\langle 1 \rangle$ partition π_1 is uncountable. But each functional $f \in \ell_\infty(S)^*$ can be non–zero only on at most countable set of pairwise disjoint characteristic functions. Therefore we can find $F_1 \in \pi_1$, such that $F_1 \cap E_1 = \emptyset$ and $|f_1|\ (\chi\ (F_1)) = 0$. This completes the first step of induction.

Let f_β, E_β and F_β are chosen for all $\beta < \alpha$. We are to construct the corresponding elements for α. Let, at first, α be a limit number. In view of 3), $\{F_\beta : \beta < \alpha\}$ is a decreasing family, and thus by property $\langle 3 \rangle$ of partitions, there exists $E_\alpha \in \pi_\alpha$ such that $E_\alpha \subset F_\beta$ for each $\beta < \alpha$. Fix any $f_\alpha \in \Phi$ for which $f_\alpha(\chi(E_\alpha)) \neq 0$. Now (again by $\langle 3 \rangle$) $\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$ is an uncountable union of pairwise disjoint elements of π_α. Hence, there exists $F_\alpha \in \pi_\alpha$ for which $F_\alpha \cap E_\alpha = \emptyset$ and $|f_\alpha|\ (\chi(F_\alpha)) = 0$. For a limit number α the construction of f_α, E_α and F_α is fulfilled. For a nonlimit α the construction is absolutely the same. The fulfillment of the conditions 1) – 4) follows directly from the construction.

Now we are ready to produce a necessary $x \epsilon \ell_\infty(S)$.

Namely, we will put†

$$x = \mathop{S}_{\alpha<\omega_{n^+}} \epsilon_\alpha \chi(E_\alpha)$$

1

where $\epsilon_\alpha = 1$ or -1 and the choice of signs is subjected to the following induction rule:

$$\text{For } \alpha = 1, \ \epsilon_1 = \text{sign } f_1(\chi(E_1)).$$

Let ϵ_β be defined for all $\beta < \alpha \ (< \omega_{n^+})$. Then we put

$$\epsilon_\alpha = \text{sign }[f_\alpha(\chi(E_\alpha)) \ / \ f_\alpha(\mathop{S}_{\beta<\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta))]$$

provided $f_\alpha(\mathop{S}_{\beta<\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)) \neq 0$ and $\epsilon_\alpha = 1$ otherwise. We will show that for each $\alpha < \omega_{n^+}$

$$|f_\alpha(x)| \geq |f_\alpha(\chi(E_\alpha))|$$

and thus, by 4), $|f_\alpha(x)| \neq 0$.

† S denotes the symbol of union (see [9, pg. 88]), i.e., $x(s) = \epsilon_\alpha$ for $s \epsilon E_\alpha$ and $x(s) = 0$ for $s \epsilon \bigcup_\alpha E_\alpha$.

Indeed,

$$f_\alpha(x) = f_\alpha\left(\left\{ \underset{\beta<\alpha}{S} \epsilon_\beta \chi(E_\beta) + \epsilon_\alpha \chi(E_\alpha) + \underset{\beta>\alpha}{S} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right)\right.$$
$$= f_\alpha\left(\underset{\beta<\alpha}{S} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right) + \epsilon_\alpha f_\alpha(\chi(E_\alpha)) + f_\alpha\left(\underset{\beta>\alpha}{S} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right)$$

By our choice of ϵ_α the first two terms are of the same sign, and the last term is zero, since

$$\left|f_\alpha\left(\underset{\beta>\alpha}{S} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right)\right| \leq |f_\alpha| \, (\chi(F_\alpha)) = 0.$$

This obviously implies $|f_\alpha(x)| \geq |f_\alpha(\chi(E_\alpha))|$ and thus, we have proven that $\operatorname{card}\{f \in \Phi : f(x) \neq 0\} = n^+ > n$, i.e., $c(\ell_\infty(2^n)) > n$.

Finally, we are going to justify the above made assumption about the existence of the partitions π_α $(\alpha \in W_{n^+})$ satisfying conditions $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$ and $\langle 3\rangle$.

Let T be an arbitrary set of cardinality $\aleph_1$. For each $\alpha \in W_{n^+}$ we denote by S_α the set $\{A\}$ of all mappings from W_{n^+} into T which satisfy the following condition:

$$A(\beta) = A(\alpha) \qquad \text{for all } \beta \geq \alpha.$$

Let us estimate from above the cardinality of S_α. We have

$$\operatorname{card}(S_\alpha) = \aleph_1^{\overline{\alpha}} \leq (2^{\aleph_0})^{\overline{\alpha}} = 2^{\aleph_0 \overline{\alpha}} .$$

Since $\alpha < \omega_{n^+}$, $\overline{\alpha} \le n$ and consequently card $(S_\alpha) \le 2^n$. This implies that

$$\mathrm{card}(\cup \{S_\alpha : \alpha < \omega_{n^+}\}) \le n^+ \cdot 2^n = 2^n .$$

and therefore we can identify the set (of mappings) $\cup\{S_\alpha : \alpha < \omega_{n+}\}$ with a subset of our initial set S of cardinality 2^n. (If card $(\bigcup_\alpha S_\alpha) = 2^n$, then we identify $\bigcup_\alpha S_\alpha$ with S; if card $(\bigcup_\alpha S_\alpha) < 2^n$, then we identify $\bigcup_\alpha S_\alpha$ with a subset of S.)

Let, for definiteness, $\bigcup_\alpha S_\alpha = S$. We fix an arbitrary $\alpha < \omega_{n^+}$ and now we are ready to describe the organization of partition π_α of the set S. Let $\sigma = (t_1, t_2, \dots, t_\beta, \dots, t_\alpha) = (t_\beta)_{\beta \le \alpha}$ (*) be an arbitrary collection of points of T (not necessarily different) and let us put

$$M_\sigma = \{A \in S : \; A(\beta) = t_\beta \text{ for all } \beta \le \alpha\}.$$

Then, by definition, partition π_α consists of all sets of the form M_σ where σ runs over all subsets of the form (*). A direct verification shows that conditions $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$ and $\langle 3\rangle$ are satisfied. The proof of the Main Lemma is completed.

SOME CONCLUDING REMARKS

1) The following corollary follows immediately from our theorem.

COROLLARY. Let Q be a hyperstonian extremally disconnected compact Hausdorff space. Then (CH) the next two statements are equivalent.

i) Q satisfies the Suslin condition,

ii) There exists a set $\Phi = \{\mu\}$ of regular Borel measures on Q, such that Φ separates the points of C(Q) and for each $x \in C(Q)$ the set $\{\mu \in \Phi : \int_Q x(q)\, d\mu(q) \neq 0$ is at most countable.

Recall that the Suslin condition (or in the other terminology, the condition of countability of chains) means that each family of mutually disjoint nonempty open sets is at most countable. In our terminology it means that C(Q) has the countable sup property or $\mathfrak{a}(C(Q)) \leq \aleph_0$. Q is hyperstonian if and only if the space $C_n^{\sim}(Q)$ of order continuous functionals separates the points of C(Q).

The above corollary (or equivalently theorem) implies, in particular, that it is impossible to find $\Phi \subset \ell_\infty(S)^*$ (where card $(S) = \aleph_1$) such that Φ separates the points of $\ell_\infty(S)$ and

$$\text{card}\,\{\, \mathfrak{f} \in \Phi : \mathfrak{f}(x) \neq 0 \,\} \leq \aleph_0 \quad \text{for each } x \in \ell_\infty(S). \tag{1}$$

Let us show that (1) is equivalent to the following (formally weaker) condition:

$$\text{card}\,\{\, \mathfrak{f} \in \Phi : \mathfrak{f}(\chi(\Delta)) \neq 0 \,\} \leq \aleph_0 \quad \text{for each } \Delta \subset S. \tag{2}$$

Indeed, (2) implies obviously that for each step function $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \chi(\Delta_i)$

$$\text{card}\,\{\, \mathfrak{f} \in \Phi : \mathfrak{f}(\bar{x}) \neq 0 \,\} \leq \aleph_0. \tag{3}$$

Fix an arbitrary $x \in \ell_\infty(S)$. Then there exists a sequence $\{x_\ell\}$ of step functions with $\|x - x_\ell\|_\infty \neq 0$ and this together with (3) gives (1).

This fact disproves the following result due to C. Ryll–Nardzewski which is mentioned without proof in [7, pg. 88].

Let $\overline{S} = \aleph_1$. Then (CH), there exists a family $\{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ of finite–additive set functions with bounded variations defined on the field of all subsets of the set S such that card $\{ v_\alpha(A) \neq 0 \} \leq \aleph_0$ for any $A \subset S$.

It should be noticed that formally the last statement may be reconciled with what we have proved above since in it there is no assumption that family $\{v_\alpha\}$ separates the points. But, according to the context of [7] this assumption is presupposed. (Otherwise there is nothing to prove, since one can simply take $v_\alpha \equiv 0$ for each α.)

Accordingly, the statement in [7] preceding this theorem of Ryll–Nardzewski becomes unjustified. Moreover, under one additional assumption that the mapping under consideration has a trivial kernel, we can disprove this statement, too, by bringing it to a contradiction with our theorem.

2) Let us stress once more that in view of our theorem the purely order theoretic concept of the type of disjointness is a Banach isomorphic property (for the corresponding class of Banach lattices) and it allows one to distinguish between otherwise hardly distinguishable spaces. Let, for example, $\mathfrak{n}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ be three cardinal numbers such that $\aleph_0 \leq \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n}_2 \leq \mathfrak{n}_3$ and let

$$\ell_\infty(\mathfrak{n}_3; \mathfrak{n}_1) = \{ x \in \ell_\infty(\mathfrak{n}_3) : \text{card}(\text{supp } x) \leq \mathfrak{n}_1 \}.$$

Then Banach lattices $X = \ell_\infty(\mathfrak{n}_2)$ and $Y = \ell_\infty(\mathfrak{n}_3; \mathfrak{n}_1)$ satisfy all conditions of our theorem and, consequently, (GCH), they are non–isomorphic since $\mathfrak{c}(X) = \mathfrak{n}_2$ and $\mathfrak{c}(Y) = \mathfrak{n}_1$.

3) It is rather appropriate to compare definitions 2 and 3 with the following two.

Definition 2′. Let X be a vector lattice. We denote by $\mathfrak{a}'(X)$ the first of cardinal numbers $\mathfrak{n}$, for which there exists no $\mathfrak{n}$–system in X.

Definition 3′. Let E be a normed space. Let $\mathfrak{b}'(E)$ the first of cardinal numbers $\mathfrak{n}$ for which E does not contain a subspace isomorphic to $\ell_\infty(\mathfrak{n})$.

Now, let X be a Dedekind complete normed lattice. It is plain that the following inequalities are true.

$$\mathfrak{a}(X) \leq \mathfrak{a}'(X) \leq \mathfrak{a}(X)^+, \quad \mathfrak{b}(X) \leq \mathfrak{b}'(X) \leq \mathfrak{b}(X)^+.$$

Nevertheless, in spite of the similarity between the new and old cardinal characteristics, the equality $\mathfrak{a}'(X) = \mathfrak{b}'(X)$ does not necessarily hold.

For example, if $X = c_0$, then $\mathfrak{a}'(X) = \aleph_1$ and $\mathfrak{b}'(X) = \aleph_0$, but if $X = \ell_\infty$, then $\mathfrak{a}'(X) = \mathfrak{b}'(X) = \aleph_1$.

This shows that the characteristics $\mathfrak{a}(X)$ and $\mathfrak{b}(X)$ are preferable. For the completeness we point out one more way to calculate them. The proofs are trivial and omitted.

LEMMA 1. Let X be a vector lattice. Then $\mathfrak{a}(X)$ is the first cardinal number with the following property: for each $\mathfrak{n} > \mathfrak{a}(X)$ there exists no $\mathfrak{n}$–system in X.

LEMMA 2. Let E be a normed space. Then $\mathfrak{b}(E)$ is the first cardinal numbers with the following property: for each $\mathfrak{n} > \mathfrak{b}(E)$ there is no subspace of E isomorphic to $\ell_\infty(\mathfrak{n})$.

3) Here we present an example showing that for σ–Dedekind complete normed lattices, the theorem is not valid in general. Let

$$X = \{x \in \ell_\infty([0, 1]) : \ \text{card}\{t \in [0, 1] : x(t) \neq x(0)\} \leq \aleph_0\}$$

We reduce to X from $\ell_\infty([0, 1])$ the standard order and norm. It is evident that X is σ–Dedekind normed lattice, such that $X_n^\sim$ separates the points of X. Obviously, $\mathfrak{a}(X) = \text{card}([0, 1])$. Nevertheless, $\mathfrak{c}(X) = \aleph_0$. Indeed, for each $t = [0, 1]$, we denote by f_t the following functional from X^*

$$f_t(x) = x(t) - x(0), \quad t \in (0, 1]$$

and

$$f_0(x) = x(0)$$

It is plain to see that the system of functionals $\Phi = \{f_t : t \in [0, 1]\}$ separates the points of X and for each $x \in X$ card $\{ f_t : f_t(x) \neq 0\} \leq \aleph_0$.

REFERENCES

[1] Y. A. Abramovich and A. I. Veksler, Exploring partially ordered spaces by means of transitive sequences, Optimization, Novosibirsk 12(1973), pp. 8–17.

[2] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Positive operators, Acad. Press, 1985.

[3] D. Amir and J. Lindenstrauss, The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Annals of Math., 48(1968), Vol. 1, pp. 35–46.

[4] A. V. Bukhvalov, A. I. Veksler, and G. Ya. Lozanovsky, Banach lattices – some Banach aspects of theory, Russian Math Surveys, 34(1979), pp. 159–212.

[5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces II, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1979.

[6] G. Ya. Lozanovsky, Some topological properties of Banach lattices and reflexitivity conditions for them, Soviet Math. Dokl., 9(1968), pp. 1415–1418.

[7] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, Notes on Banach function spaces XII, Proc. Nederl. Acad. Wetensch, A 67(1964), n. 4, pp. 519–529.

[8] A. Pelczynski and V. N. Sudakov, Remark on non–complemented subspaces of the space m(S), Colloq. Math. 9(1962), f.1, pp. 85–88.

[9] B. Z. Vulikh, Introduction to the theory of partially ordered spaces, Gromingen, 1967.

[10] A. C. Zaanen, Riesz spaces II, North Holland, Amsterdam, 1983.

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 226 (1976), No. 1

Soviet Math. Dokl.
Vol. 17 (1976), No. 1

ON A COMPLEX METHOD OF INTERPOLATION IN BANACH LATTICES OF MEASURABLE FUNCTIONS

UDC 513.88

G. Ja. LOZANOVSKIĬ

The aim of this note is a reduction of the second complex method of Calderón to the real Calderón construction in the case of Banach ideal spaces with semicontinuous norms.

Notation. If E is a Banach space, then $B(E) = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$. $\Pi = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\overline{\Pi} = \{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. (T, Σ, μ) denotes a complete σ-finite measure space, and $S = S(T, \Sigma, \mu)$ is the space of all measurable functions on it (μ-equivalent functions and sets, as usual, are identified). Everywhere in what follows s is a fixed number such that $0 < s < 1$.

1. The following two complex interpolation methods were constructed in [1] (see also [2], Chapter III, §4). Let E_0 and E_1 be complex Banach spaces which are continuously imbedded in a topological vector space. On the space $E_0 + E_1$ we consider the usual norm, under which it is a Banach space.

First method. We consider the space $\mathfrak{A}(E_0, E_1)$ of all functions $\phi(z)$ ($z \in \overline{\Pi}$) with values in $E_0 + E_1$, holomorphic on Π, continuous and bounded on $\overline{\Pi}$ and such that the function $\phi(j + i\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, assumes values from E_j and is continuous and bounded into E_j, $j = 0, 1$. The space $\mathfrak{A}(E_0, E_1)$ is a Banach space under the norm

$$\|\varphi\|_{\mathscr{A}} = \max_{j=0,1} \{ \sup_{-\infty<\tau<\infty} \|\varphi(j+i\tau)\|_{E_j} \}.$$

We denote by $[E_0, E_1]_s$ the set of all $x \in E_0 + E_1$ which can be represented in the form $x = \phi(s)$, where $\phi \in \mathfrak{A}(E_0, E_1)$. The space $[E_0, E_1]_s$ is a Banach space under the norm $\|x\| = \inf_{x=\phi(s)} \|\phi\|_{\mathfrak{A}}$.

Second method. We consider the space $\overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$ of all functions $\phi(z)$ ($z \in \overline{\Pi}$) with values in $E_0 + E_1$, holomorphic on Π and continuous on $\overline{\Pi}$, satisfying the inequality

$$\|\varphi(z)\|_{E_0+E_1} \leqslant c(1+|z|), \quad z \in \overline{\Pi},$$

and such that $\phi(j + i\tau_2) - \phi(j + i\tau_1) \in E_j$ for $-\infty < \tau_1, \tau_2 < +\infty$, $j = 0, 1$; moreover,

$$\|\varphi\|_{\overline{\mathscr{A}}} = \max_{j=0,1} \left\{ \sup_{-\infty<\tau_1<\tau_2<\infty} \left\| \frac{\varphi(j+i\tau_2) - \varphi(j+i\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \right\|_{E_j} \right\} < \infty.$$

The factorization of $\overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$ by the subspace of constants yields a Banach space, which is also denoted by $\overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$. We denote by $[E_0, E_1]^s$ the set of all $x \in E_0 + E_1$ which can be represented in the form $x = d\phi(s)/dz$, where $\phi \in \overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$. The

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 46E15, 46E35; Secondary 46B99.

space $[E_0, E_1]^s$ is a Banach space under the norm $\|x\| = \inf_{x=\phi'(s)}\|\phi_Q\|$.

The spaces $[E_0, E_1]_s$ and $[E_0, E_1]^s$ are interpolation spaces between E_0 and E_1 of mean type s; these and other of their properties can be found in [1], [2].

2. A Banach ideal space (abbreviated b.i.s.) on (T, Σ, μ) is a Banach space X which is a vector subspace in S and which satisfies the following condition: if $x \in X$, $y \in S$, $|y| \le |x|$, then $y \in X$ and $\|y\| \le \|x\|$. The norm in X is said to be semicontinuous if $\sup\|x_n\| = \|x\|$ whenever $0 \le x_n \uparrow x \in X$. The norm in X is said to be monotonically complete if $\sup x_n \in X$ whenever $0 \le x_n \uparrow$, $x_n \in X$ and $\sup\|x_n\| < \infty$.

Next, let X_0 and X be arbitrary Banach ideal spaces on (T, Σ, μ). We denote by $X(s) = X_0^{1-s}X_1^s$ the b.i.s. consisting of all $x \in S$ such that $|s| \le \lambda x_0^{1-s}x_1^s$ for some $\lambda \ge 0$ and some $0 \le x_j \in X_j$ with $\|x_j\|_{X_j} \le 1$, $j = 0, 1$. For $x \in X(s)$, by the norm $\|x\|_{X(s)}$ we mean the infimum of all possible λ in the preceding inequality. This construction was introduced in [1], and was also used in [3]–[5]. It was proved in [1] that $[X_0, X_1]_s \subset X(s) \subset [X_0, X_1]^s$ and the norm of the inclusion operator is ≤ 1; however, in general these three spaces are distinct, even if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous. In the same place it was proved that $X_0 \cap X_1$ is dense in $[X_0, X_1]_s$ but, in general, is not dense in $X(s)$ or $[X_0, X_1]^s$.

3. The space $X(s)$, in contrast to $[X_0, X_1]_s$ and $[X_0, X_1]^s$, is not, in general, interpolational between X_0 and X_1 even if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous; an appropriate example is cited in [6]. However this real construction is substantially simpler than both complex methods; starting from concrete X_0, X_1 the construction of $X(s)$ is usually accomplished very easily. In [7] a reduction of the first complex method to this real construction was carried out, and the following result was proved.

Theorem (V. A. Šestakov). *The space $[X_0, X_1]_s$ coincides with the closure of $X_0 \cap X_1$ in $X(s)$, and moreover the norm in $[X_0, X_1]_s$ coincides with the norm induced from $X(s)$.*

Our aim is an explicit similar reduction for the second complex method. In [1] it was shown that if the unit ball $B(X(s))$ is closed in $X_0 + X_1$, then the spaces $X(s)$ and $[X_0, X_1]^s$ and their norms coincide. From the results of [3] it follows that if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous and monotonically complete, then the same is true of the norm in $X(s)$, and hence $B(X(s))$ is closed in $X_0 + X_1$. It is clear from what has been said that if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous and monotonically complete, then the spaces $X(s)$ and $[X_0, X_1]^s$ and their norms coincide.

The following result is fundamental.

Theorem 1. *If the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous, then $B([X_0, X_1]^s)$ coincides with the closure of $B(X(s))$ in the space $X_0 + X_1$.*

It is unknown to us whether the requirement of semicontinuity on the norm is essential in this theorem; we note, however, that as a rule this requirement is satisfied in applications.

Theorem 2. *If one of the spaces X_0, X_1 is $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, then the conclusion of Theorem 1 is valid without any restrictions on the second space.*

The proof of Theorems 1 and 2 is based on the following lemma, in which X_0 and X_1 are any Banach ideal spaces on (T, Σ, μ) (semicontinuity of the norm is not required).

Lemma. *Let*: a) T_k *be an increasing sequence of measurable sets from* T *such that* $\bigcup_k T_k = T$; b) $0 \leq y_j \in S$, *moreover* $P_k y_j \in X_j$, *where* P_k *is the operator of multiplication by the characteristic function of* T_k, *and* $\sup_k \|P_k y_j\|_{X_j} < 1$, $j = 0, 1$; c) $x = y_0^{1-s} y_1^s \in X_0 + X_1$ *and* $\|x - P_k y_0^{1-s} y_1^s\|_{X_0+X_1} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. *Then* $x \in B([X_0, X_1]^s)$.

We outline the proof. We may assume that the support of x is all of T. We put $w = r_1 P_1 y_0^{1-s} y_1^s + \sum_{k=2}^{\infty} r_k (P_k - P_{k-1}) y_0^{1-s} y_1^s$, where the numbers $r_k > 1$ are chosen so that $r_k \uparrow +\infty$ and the series is norm convergent in $X_0 + X_1$. Then $w = w_0 + w_1$, where $w_0 \in X_0$, $w_1 \in X_1$, $w_0 w_1 = 0$. We now choose $\epsilon > 0$ so that

$$\sup_k \|P_k y_j + \varepsilon w_j\|_{X_j} < 1, \quad j = 0, 1.$$

After this we find functions $x_j \in S$, $j = 0, 1$, and numbers $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ such that: a) $0 \leq x_j \leq y_j + \epsilon w_j$; b) $x_0^{1-s} x_1^s = x$; c) $\max\{x_0(t), x_1(t)\} \geq \lambda_k \min\{x_0(t), x_1(t)\}$ for almost all $t \in T \setminus T_k$. Next we construct a function ϕ: $\overline{\Pi} \to X_0 + X_1$ by putting, for $z \in \overline{\Pi}$,

$$\varphi(z)(t) = \int_{0.5}^{z} x_0(t)^{1-z} x_1(t)^z dz, \qquad t \in T.$$

It turns out that $\phi \in \overline{\mathfrak{A}}(X_0, X_1)$, $\|\phi\|_{\overline{\mathfrak{A}}} \leq 1$, $\phi'(s) = x$.

We now give a brief sketch of the proof of Theorem 1. Let U be the closure of $B(X_0^{1-s} X_1^s)$ in $X_0 + X_1$, R the linear hull of U, $\|\cdot\|_R$ the Minkowski functional of the set U. Then $(R, \|\cdot\|_R)$ is a b.i.s. and $B([X_0, X_1]^s) \subset U$ (see [7]). We fix an arbitrary $x \in R$ such that $\|x\|_R < 1$. It is sufficient to prove that $x \in B([X_0, X_1]^s)$. We may assume that $x \geq 0$ and that the support of x is all of T. There exists an increasing sequence of measurable sets $T_k \subset T$ such that $\bigcup_k T_k = T$, $P_k x \in B(X(s))$, and $\|x - P_k x\|_{X_0+X_1} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Since the norm in X_j is semicontinuous, X_j is a subspace in the second dual space X_j''. In addition, since $(X_0^{1-s} X_1^s)'' = (X_0'')^{1-s}(X_1'')^s$ (see [3]), using what was said before Theorem 1 we have $U \subset B((X_0'')^{1-s}(X_1'')^s)$. At this point it is not difficult to construct the corresponding y_0 and y_1, after which it remains to apply the lemma.

For a proof of Theorem 2, if $X_j = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, then to apply the lemma with y_j it is necessary to choose an appropriate constant.

Remark. It follows from the results of [7] and our Theorem 1 that under the conditions of Theorem 1 the ball $B([X_0, X_1]^s)$ coincides with the closure of $B([X_0, X_1]_s)$ in $X_0 + X_1$. It is not known to us whether $B([E_0, E_1]^s)$ always coincides with the closure of $B([E_0, E_1]_s)$ in $E_0 + E_1$ for an arbitrary interpolational pair E_0, E_1.

Leningrad Military-Engineering Institute
Received 18/JULY/75

BIBLIOGRAPHY

1. A. P. Calderón, Studia Math. 24 (1964), 113. MR 29 # 5097.

2. S. G. Kreĭn et. al., *Functional analysis*, 2nd rev. ed., "Nauka", Moscow, 1972; English transl. of 1st ed., Foreign Techonology Div. MT-65-573, U. S. Dept. Commerce, Nat. Bur. Standards, Washington, D. C., Noordhoff, Groningen, 1972. MR 38 # 2560.

3. G. Ja. Lozanovskiĭ, Sibirsk. Mat. Ž. 10 (1969), 584 = Siberian Math. J. 10 (1969), 419. MR 39 # 3285.

4. ———, Sibirsk. Mat. Ž. 13 (1972), 1304 = Siberian Math. J. 13 (1972), 910. MR 49 # 1089.

5. S. G. Kreĭn, Ju. I. Petunin and E. M. Semenov, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 17 (1967), 293 = Trans. Moscow Math. Soc. 17 (1967), 323. MR 36 # 6925.

6. G. Ja. Lozanovskiĭ, Funkcional. Anal. i Priložen. 6 (1972), no. 4, 89. (Russian) MR 47 # 808.

7. V. A. Šestakov, Vestnik Leningrad. Univ. 1974, no. 19 (Mat. Meh. Astronom., vyp. 4), 64 = Vestnik Leningrad Univ. Math. 7 (to appear).

Translated by C. WILDE

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 226 (1976), No. 1

Soviet Math. Dokl.
Vol. 17 (1976), No. 1

ON A COMPLEX METHOD OF INTERPOLATION IN BANACH LATTICES OF MEASURABLE FUNCTIONS

UDC 513.88

G. Ja. LOZANOVSKIĬ

The aim of this note is a reduction of the second complex method of Calderón to the real Calderón construction in the case of Banach ideal spaces with semicontinuous norms.

Notation. *If* E *is a Banach space, then* $B(E) = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$. $\Pi = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\overline{\Pi} = \{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. (T, Σ, μ) denotes a complete σ-finite measure space, and $S = S(T, \Sigma, \mu)$ is the space of all measurable functions on it (μ-equivalent functions and sets, as usual, are identified). Everywhere in what follows s is a fixed number such that $0 < s < 1$.

1. The following two complex interpolation methods were constructed in [1] (see also [2], Chapter III, §4). Let E_0 and E_1 be complex Banach spaces which are continuously imbedded in a topological vector space. On the space $E_0 + E_1$ we consider the usual norm, under which it is a Banach space.

First method. We consider the space $\mathfrak{A}(E_0, E_1)$ of all functions $\phi(z)$ $(z \in \overline{\Pi})$ with values in $E_0 + E_1$, holomorphic on Π, continuous and bounded on $\overline{\Pi}$ and such that the function $\phi(j + i\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, assumes values from E_j and is continuous and bounded into E_j, $j = 0, 1$. The space $\mathfrak{A}(E_0, E_1)$ is a Banach space under the norm

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{A}} = \max_{j=0,1} \{ \sup_{-\infty<\tau<\infty} \|\varphi(j+i\tau)\|_{E_j} \}.$$

We denote by $[E_0, E_1]_s$ the set of all $x \in E_0 + E_1$ which can be represented in the form $x = \phi(s)$, where $\phi \in \mathfrak{A}(E_0, E_1)$. The space $[E_0, E_1]_s$ is a Banach space under the norm $\|x\| = \inf_{x=\phi(s)} \|\phi\|_{\mathfrak{A}}$.

Second method. We consider the space $\overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$ of all functions $\phi(z)$ $(z \in \overline{\Pi})$ with values in $E_0 + E_1$, holomorphic on Π and continuous on $\overline{\Pi}$, satisfying the inequality

$$\|\varphi(z)\|_{E_0+E_1} \leqslant c(1+|z|), \quad z \in \overline{\Pi}.$$

and such that $\phi(j + i\tau_2) - \phi(j + i\tau_1) \in E_j$ for $-\infty < \tau_1, \tau_2 < +\infty$, $j = 0, 1$; moreover,

$$\|\varphi\|_{\overline{\mathfrak{A}}} = \max_{j=0,1} \left\{ \sup_{-\infty<\tau_1<\tau_2<\infty} \left\| \frac{\varphi(j+i\tau_2) - \varphi(j+i\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \right\|_{E_j} \right\} < \infty.$$

The factorization of $\overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$ by the subspace of constants yields a Banach space, which is also denoted by $\overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$. We denote by $[E_0, E_1]^s$ the set of all $x \in E_0 + E_1$ which can be represented in the form $x = d\phi(s)/dz$, where $\phi \in \overline{\mathfrak{A}}(E_0, E_1)$. The

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 46E15, 46E35; Secondary 46B99.

space $[E_0, E_1]^s$ is a Banach space under the norm $\|x\| = \inf_{x=\phi'(s)}\|\phi_Q\|$.

The spaces $[E_0, E_1]_s$ and $[E_0, E_1]^s$ are interpolation spaces between E_0 and E_1 of mean type s; these and other of their properties can be found in [1], [2].

2. A Banach ideal space (abbreviated b.i.s.) on (T, Σ, μ) is a Banach space X which is a vector subspace in S and which satisfies the following condition: if $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leq |x|$, then $y \in X$ and $\|y\| \leq \|x\|$. The norm in X is said to be semicontinuous if $\sup\|x_n\| = \|x\|$ whenever $0 \leq x_n \uparrow x \in X$. The norm in X is said to be monotonically complete if $\sup x_n \in X$ whenever $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in X$ and $\sup\|x_n\| < \infty$.

Next, let X_0 and X be arbitrary Banach ideal spaces on (T, Σ, μ). We denote by $X(s) = X_0^{1-s}X_1^s$ the b.i.s. consisting of all $x \in S$ such that $|s| \leq \lambda x_0^{1-s}x_1^s$ for some $\lambda \geq 0$ and some $0 \leq x_j \in X_j$ with $\|x_j\|_{X_j} \leq 1$, $j = 0, 1$. For $x \in X(s)$, by the norm $\|x\|_{X(s)}$ we mean the infimum of all possible λ in the preceding inequality. This construction was introduced in [1], and was also used in [3]–[5]. It was proved in [1] that $[X_0, X_1]_s \subset X(s) \subset [X_0, X_1]^s$ and the norm of the inclusion operator is ≤ 1; however, in general these three spaces are distinct, even if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous. In the same place it was proved that $X_0 \cap X_1$ is dense in $[X_0, X_1]_s$ but, in general, is not dense in $X(s)$ or $[X_0, X_1]^s$.

3. The space $X(s)$, in contrast to $[X_0, X_1]_s$ and $[X_0, X_1]^s$, is not, in general, interpolational between X_0 and X_1 even if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous; an appropriate example is cited in [6]. However this real construction is substantially simpler than both complex methods; starting from concrete X_0, X_1 the construction of $X(s)$ is usually accomplished very easily. In [7] a reduction of the first complex method to this real construction was carried out, and the following result was proved.

Theorem (V. A. Šestakov). *The space $[X_0, X_1]_s$ coincides with the closure of $X_0 \cap X_1$ in $X(s)$, and moreover the norm in $[X_0, X_1]_s$ coincides with the norm induced from $X(s)$.*

Our aim is an explicit similar reduction for the second complex method. In [1] it was shown that if the unit ball $B(X(s))$ is closed in $X_0 + X_1$, then the spaces $X(s)$ and $[X_0, X_1]^s$ and their norms coincide. From the results of [3] it follows that if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous and monotonically complete, then the same is true of the norm in $X(s)$, and hence $B(X(s))$ is closed in $X_0 + X_1$. It is clear from what has been said that if the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous and monotonically complete, then the spaces $X(s)$ and $[X_0, X_1]^s$ and their norms coincide.

The following result is fundamental.

Theorem 1. *If the norms in X_0 and X_1 are semicontinuous, then $B([X_0, X_1]^s)$ coincides with the closure of $B(X(s))$ in the space $X_0 + X_1$.*

It is unknown to us whether the requirement of semicontinuity on the norm is essential in this theorem; we note, however, that as a rule this requirement is satisfied in applications.

Theorem 2. *If one of the spaces X_0, X_1 is $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, then the conclusion of Theorem 1 is valid without any restrictions on the second space.*

The proof of Theorems 1 and 2 is based on the following lemma, in which X_0 and X_1 are any Banach ideal spaces on (T, Σ, μ) (semicontinuity of the norm is not required).

Lemma. *Let:* a) T_k *be an increasing sequence of measurable sets from* T *such that* $\bigcup_k T_k = T$; b) $0 \le y_j \in S$, *moreover* $P_k y_j \in X_j$, *where* P_k *is the operator of multiplication by the characteristic function of* T_k, *and* $\sup_k \|P_k y_j\|_{X_j} < 1$, $j = 0, 1$; c) $x = y_0^{1-s} y_1^s \in X_0 + X_1$ *and* $\|x - P_k y_0^{1-s} y_1^s\|_{X_0+X_1} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. *Then* $x \in B([X_0, X_1]^s)$.

We outline the proof. We may assume that the support of x is all of T. We put $w = r_1 P_1 y_0^{1-s} y_1^s + \sum_{k=2}^{\infty} r_k (P_k - P_{k-1}) y_0^{1-s} y_1^s$, where the numbers $r_k > 1$ are chosen so that $r_k \uparrow +\infty$ and the series is norm convergent in $X_0 + X_1$. Then $w = w_0 + w_1$, where $w_0 \in X_0$, $w_1 \in X_1$, $w_0 w_1 = 0$. We now choose $\epsilon > 0$ so that

$$\sup_k \|P_k y_j + \varepsilon w_j\|_{X_j} < 1, \quad j = 0,\ 1.$$

After this we find functions $x_j \in S$, $j = 0, 1$, and numbers $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ such that: a) $0 \le x_j \le y_j + \epsilon w_j$; b) $x_0^{1-s} x_1^s = x$; c) $\max\{x_0(t), x_1(t)\} \ge \lambda_k \min\{x_0(t), x_1(t)\}$ for almost all $t \in T \setminus T_k$. Next we construct a function $\phi: \overline{\Pi} \to X_0 + X_1$ by putting, for $z \in \overline{\Pi}$,

$$\varphi(z)(t) = \int_{0.5}^{z} x_0(t)^{1-z} x_1(t)^z dz, \qquad t \in T.$$

It turns out that $\phi \in \overline{\mathfrak{A}}(X_0, X_1)$, $\|\phi\|_{\overline{\mathfrak{A}}} \le 1$, $\phi'(s) = x$.

We now give a brief sketch of the proof of Theorem 1. Let U be the closure of $B(X_0^{1-s} X_1^s)$ in $X_0 + X_1$, R the linear hull of U, $\|\cdot\|_R$ the Minkowski functional of the set U. Then $(R, \|\cdot\|_R)$ is a b.i.s. and $B([X_0, X_1]^s) \subset U$ (see [7]). We fix an arbitrary $x \in R$ such that $\|x\|_R < 1$. It is sufficient to prove that $x \in B([X_0, X_1]^s)$. We may assume that $x \ge 0$ and that the support of x is all of T. There exists an increasing sequence of measurable sets $T_k \subset T$ such that $\bigcup_k T_k = T$, $P_k x \in B(X(s))$, and $\|x - P_k x\|_{X_0+X_1} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Since the norm in X_j is semicontinuous, X_j is a subspace in the second dual space X_j''. In addition, since $(X_0^{1-s} X_1^s)'' = (X_0'')^{1-s}(X_1'')^s$ (see [3]), using what was said before Theorem 1 we have $U \subset B((X_0'')^{1-s}(X_1'')^s)$. At this point it is not difficult to construct the corresponding y_0 and y_1, after which it remains to apply the lemma.

For a proof of Theorem 2, if $X_j = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, then to apply the lemma with y_j it is necessary to choose an appropriate constant.

Remark. It follows from the results of [7] and our Theorem 1 that under the conditions of Theorem 1 the ball $B([X_0, X_1]^s)$ coincides with the closure of $B([X_0, X_1]_s)$ in $X_0 + X_1$. It is not known to us whether $B([E_0, E_1]^s)$ always coincides with the closure of $B([E_0, E_1]_s)$ in $E_0 + E_1$ for an arbitrary interpolational pair E_0, E_1.

Leningrad Military-Engineering Institute

Received 18/JULY/75

BIBLIOGRAPHY

1. A. P. Calderón, Studia Math. 24 (1964), 113. MR 29 # 5097.

2. S. G. Kreĭn et. al., *Functional analysis*, 2nd rev. ed., "Nauka", Moscow, 1972; English transl. of 1st ed., Foreign Techonology Div. MT-65-573, U. S. Dept. Commerce, Nat. Bur. Standards, Washington, D. C., Noordhoff, Groningen, 1972. MR 38 # 2560.

3. G. Ja. Lozanovskiĭ, Sibirsk. Mat. Ž. 10 (1969), 584 = Siberian Math. J. 10 (1969), 419. MR 39 # 3285.

4. ———, Sibirsk. Mat. Ž. 13 (1972), 1304 = Siberian Math. J. 13 (1972), 910. MR 49 # 1089.

5. S. G. Kreĭn, Ju. I. Petunin and E. M. Semenov, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 17 (1967), 293 = Trans. Moscow Math. Soc. 17 (1967), 323. MR 36 # 6925.

6. G. Ja. Lozanovskiĭ, Funkcional. Anal. i Priložen. 6 (1972), no. 4, 89. (Russian) MR 47 # 808.

7. V. A. Šestakov, Vestnik Leningrad. Univ. 1974, no. 19 (Mat. Meh. Astronom., vyp. 4), 64 = Vestnik Leningrad Univ. Math. 7 (to appear).

Translated by C. WILDE

Vestnik Leningrad. Univ.
Vol. 24 (1969), no. 13

Vestnik Leningrad Univ., Math.
Vol. 2 (1975)

ON THE MONOTONE EXTENSION OF A BANACH NORM FROM A VECTOR LATTICE TO ITS DEDEKIND COMPLETION

UDC 517.5

G. Ja. LOZANOVSKIĬ AND V. A. SOLOV'EV

Abstract. Two examples concerning the extension of monotone complete and Cauchy complete norms to the Dedekind completion of a normed lattice are considered.

Bibliography: 4 items.

1. Notation and terminology. In the present note we principally adhere to the terminology and notation of the theory of partially ordered spaces as adopted in the monograph [1].

The following is well known. Let X be an Archimedean K-lineal.* Then, applying, for instance, the method of cuts, it is possible to construct the Dedekind completion $\hat{X}$, called also K-completion (see, for example, [1], Chapter IV, §11). A K-lineal is said to be a KN-lineal if it is a normed space as well and if the norm in X satisfies the condition of monotonicity: $x, y \in X$ and $|x| \leq |y|$ imply $\|x\| \leq \|y\|$. A KN-lineal is said to be a KB-lineal if it is (b)-complete, i.e. complete as a normed space.

Let X be an arbitrary KN-lineal. For any $\hat{x} \in \hat{X}$ set

$$\|\hat{x}\|_e = \inf\{\|x\| : x \in X,\ |\hat{x}| \leqslant |x|\},$$

where $\|\cdot\|$ is the norm on X. It is well known (see [1], Chapter VII, §3, Theorem 1) that $\|\cdot\|_e$ *is a monotone norm on* $\hat{X}$, and we have $\|x\|_e = \|x\|$ for every $x \in X$; in other words, $\|\cdot\|_e$ is an extension of the norm $\|\cdot\|$ from X to $\hat{X}$ which preserves monotonicity. We call this extension the natural extension of the norm from X to $\hat{X}$. Clearly, if $p(\cdot)$ is some extension of the norm from X to $\hat{X}$ (the extension being understood as one preserving monotonicity), then for every $\hat{x} \in \hat{X}$ the inequality $p(\hat{x}) \leq \|\hat{x}\|_e$ holds. In this sense, the natural extension of the norm majorizes any other monotone extension of the norm. In all that follows, when speaking of an extension of the norm from X to $\hat{X}$, we will have in mind a monotone extension, without

---

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 46A40.

* *Editor's note.* The English equivalent of *K-lineal* (*KN-lineal, KB-lineal*) is *vector lattice* (*normed lattice, Banach lattice*).

stating that explicitly each time. As was proved in [3], the natural extension of a Banach norm is always a Banach norm. Various conditions assuring uniqueness of the extension of the norm from a KN-lineal X to its K-completion $\hat{X}$ were given in [4]. In the same paper, an example of a KN-lineal X was presented for which there exists an extension of the norm to $\hat{X}$ that is not equivalent to the natural one.

It has turned out to be more difficult to find a similar example of a KB-lineal. In the present note we will give the required kind of examples of KB-lineals satisfying also some supplementary conditions such as semicontinuity of the norm(1) or monotone completeness of the norm. These examples show that even in the case of a KB-lineal the existence of the above properties does not guarantee that all extensions of the norm from X to $\hat{X}$ are equivalent to the natural one.

2. **Example of a KB-lineal X of countable type with unit, in which the norm is semicontinuous, and for which there exists an extension of the norm from X to $\hat{X}$ not equivalent to the natural one.** For $n = 1, 2, \ldots$, let X_n denote the space of all real convergent numerical sequences with the usual linearization and ordering. Introduce a norm in X_n as follows: if $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots\} \in X_n$, then

$$\|x\|_{X_n} = \sup_k |\xi_k| + n \sup_k |\xi_{2k}|.$$

Let X denote the set of all sequences $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ of elements $x_n \in X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ satisfying

$$\|x\|_X = \sup_n \|x_n\|_{X_n} < \infty.$$

The linearization and ordering in X are the natural ones. It is not difficult to verify that the space $(X, \|\cdot\|_X)$ is a KB-lineal of countable type having a unit and a semicontinuous norm.

Besides the norm $\|\cdot\|_e$, consider another norm in $\hat{X}$.(2) Namely, if $w = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots\} \in \hat{X}$, where $\hat{x}_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots\} \in \hat{X}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then set

$$\|w\|_{\hat{X}} = \sup_n \left\{ \sup_k |\xi_k^{(n)}| + n \sup_k |\xi_{2k}^{(n)}| \right\}.$$

(1) The norm on a KN-lineal X is said to be semicontinuous if the relations $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots$ and $\sup_n x_n = x$ imply $\|x_n\| \to \|x\|$.

(2) It is easy to see that $\hat{X}$ is the set of all sequences $x = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots\}$ of elements $\hat{x}_n \in \hat{X}_n$ ($\hat{X}_n$ denotes the space of all bounded real sequences) satisfying $\sup_n \|\hat{x}_n\|_{\hat{X}_n} < \infty$; here $\|\cdot\|_{\hat{X}_n}$ stands for the natural extension of the norm from X_n to $\hat{X}_n$.

It is easy to see that $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ is monotone on $\hat{X}$, and $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ is an extension of the norm $\|\cdot\|_X$. Let us show that $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ and $\|\cdot\|_e$ are not equivalent on $\hat{X}$. Take the sequence

$$w_n = \{\underbrace{0,\ 0,\ \ldots\ 0}_{n-1},\ \hat{x}_n,\ 0,\ \ldots\},\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

where $\hat{x}_n = \{1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$. Clearly, $\|w_n\|_{\hat{X}} = 1 + n \cdot 0 = 1$, but $\|w_n\|_e = 1 + n$. Hence we see that these two norms are not equivalent on $\hat{X}$.

Remark. Since the monotone norms $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ and $\|\cdot\|_e$ are not equivalent, whereas $\|\cdot\|_e$ is a Banach norm, $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ cannot be a Banach norm, a fact that can also be verified directly.

3. Example of a $K_\sigma N$-space * X with monotonically complete (3) norm such that there exists an extension of the norm from X to $\hat{X}$ not equivalent to the natural one. Let E be an uncountable set. For $n = 1, 2, \ldots$ let X_n denote the set of all bounded real functions on E such that for each $x \in X_n$ there exists a number $a(x)$ for which the set $\{t \in E: x(t) \neq a(x)\}$ is at most countable. The order and linearization in X_n are the natural ones. Let the norm on X_n be given by

$$\|x\|_{X_n} = \sup_{t\in E} |x(t)| + n\,|a(x)|.$$

It is not difficult to see that $(X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ is a $K_\sigma N$-space with monotonically complete norm. It is well known (see, for example, [1], Chapter VII, §6, proof of Theorem 2) that a monotonically complete norm is always a Banach norm.

Let X denote the set of all sequences $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ of elements $x_n \in X_n$ satisfying the condition

$$\|x\|_X = \sup_n \|x_n\|_{X_n} < \infty.$$

The order and linearization in X are the natural ones. Clearly $(X, \|\cdot\|_X)$ is a $K_\sigma N$-space with monotonically complete and, consequently, Banach type norm.

Let us show that X is the space required. As before, $\hat{X}$ denotes the K-completion of X, while $\hat{X}_n$ stands for the K-completion of X_n. We consider two norms on $\hat{X}$: the natural norm $\|\cdot\|_e$ and a norm $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ defined as follows. Fix an $F \subset E$ such that F and $E \setminus F$ are uncountable. Let $\mathrm{A}(F)$ denote the class of those subsets of F which are at most countable.

---

* *Editor's note.* The English equivalent is *σ-complete vector lattice.*

(3) The norm on a KN-lineal X is said to be monotonically complete if the relations $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ and $\sup_n \|x_n\| < \infty$ imply the existence of $\sup_n x_n \in X$.

For $\hat{x} \in \hat{X}_n$ set(4)

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}_n} = \sup_{t \in E} |x(t)| + n \inf_{G \in A(F)} \sup_{t \in F \setminus G} |x(t)|.$$

Now for $\hat{x} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots\} \in \hat{X}$ we define

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = \sup_n \|\hat{x}_n\|_{\hat{X}_n}.$$

As in the preceding example, it is easy to verify that $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ is an extension of the norm $\|\cdot\|_X$, and that $\|\cdot\|_e$ and $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ are not equivalent.

Remarks. a) In [2] it was shown that the natural extension of a monotonically complete norm from an arbitrary $K_\sigma N$-space to its K-completion is again a monotonically complete norm. The latter example shows that in this case there may also exist extensions of the norm (not equivalent to the natural one) that do not have the property of monotone completeness.

b) In both of the examples there exists a sufficient set of completely linear functionals on X.

BIBLIOGRAPHY

1. B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; 37 #121.

2. V. A. Solov'ev, *On the extension of a semicontinuous norm and a monotone complete norm from a KN-lineal to its Dedekind completion*, Vestnik Leningrad. Univ. 23 (1968), no. 1, 52–57 = Vestnik Leningrad. Univ. Math. 1 (1974), 51–58. MR 37 #733.

3. B. Z. Vulih and G. Ja. Lozanovskiĭ, *Metric completeness of normed and countably normed lattices*, Vestnik Leningrad. Univ. 21 (1966), no. 19, 12–15. (Russian) MR 34 #4886.

4. V. A. Solov'ev, *Extension of a monotone norm from a normed lattice to its Dedekind completion*, Sibirsk. Mat. Ž. 7 (1966), 1360–1369 = Siberian Math. J. 7 (1966), 1067–1073. MR 34 #4885.

Translated by J. BOGNÁR

(4) Needless to say, $\|\cdot\|_{\hat{X}_n}$ is not the natural extension of the norm $\|\cdot\|_{X_n}$.

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 212 (1973), No. 6

Soviet Math. Dokl.
Vol. 14 (1973), No. 5

ON SETS CLOSED WITH RESPECT TO CONVERGENCE IN MEASURE IN SPACES OF MEASURABLE FUNCTIONS

UDC 513.88

A. V. BUHVALOV AND G. Ja. LOZANOVSKIĬ

In this article we will show that bounded convex sets which are closed with respect to convergence in measure in "nice" spaces of measurable functions possess a series of useful properties which hold true if certain compactness conditions are satisfied. The results are stated for a wide class of spaces of measurable functions, but they seem to be new even for the space $L^1[0, 1]$.

1. Notation and terminology. Our notation and terminology for vector lattices will follow the usage in [1]. We recall certain facts. Let E be a K-lineal (vector lattice). For $M \subset E$ we set $M^d = \{x \in E: |x| \wedge |y| = 0$ for each $y \in M\}$. A set $M \subset E$ is said to be normal if $(x \in E,\ y \in M,\ |x| \leq |y|) \Rightarrow (x \in M)$. A normal linear set in E will be called an ideal. An ideal Y in E is said to be fundamental if $Y^d = \{0\}$. An ideal Y in E will be called a component if $Y = (Y^d)^d$. We let $\tilde{E}$ (respectively $\overline{E}$) denote the space of regular (respectively, completely linear) functionals on E. If E is a K-space (conditionally complete vector lattice) and Y is a component in E, then Pr_Y will de-denote the projection operator from E onto Y (see [1], Chapter IV, §3). By a KN-space we mean a K-space which is a normed space with a monotone norm. The dual space of a normed space E will be denoted by E^*. We recall that for a Banach KN-space E we have ~~have~~ $E^* = \tilde{E}$.

Let (T, Σ, μ) be a measure space, where T is a set and Σ is a σ-algebra of subsets and μ is a nonnegative, countably additive measure on Σ. We set $\Sigma(\mu) = \{A \in \Sigma: \mu(A) < \infty\}$. We let $S = S(T, \Sigma, \mu)$ denote the space of all real measurable functions which are finite almost everywhere, with the usual identification of equivalent functions and with the natural order. Let τ denote the topology of μ-convergence on S, for which a basis of neighborhoods of zero consists of sets of the form

$$U(A; \varepsilon) = \left\{ x \in S : \int_A \frac{|x|}{1+|x|}\, d\mu < \varepsilon \right\},$$

where $A \in \Sigma(\mu)$ and the number $\epsilon > 0$ are arbitrary. For $X \subset S$ we let $\tau(X)$ denote the topology on X induced by τ.

Throughout this article (T, Σ, μ) will denote a measure space satisfying the following properties: a) $(A \subset B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0) \Rightarrow (A \in \Sigma)$; b) if for some $A \subset T$ it is the case that for arbitrary $B \in \Sigma(\mu)$ we have $B \cap A \in \Sigma$, then $A \in \Sigma$; c) for $A \in \Sigma$ we have $\mu(A) = \sup\{\mu(B): B \in \Sigma(\mu),\ B \subset A\}$; d) $S(T, \Sigma, \mu)$ is a K-space. We recall that if μ is σ-finite, then conditions b), c), and d) are automatically satisfied.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 28A20, 46A40, 46B10, 46E30.

Let X be fundamental in $S = S(T, \Sigma, \mu)$. We set

$$X' = \left\{ x' \in S : \int_T |xx'|\, d\mu < \infty \quad \text{for each} \quad x \in X \right\}.$$

We recall that X' can be identified with $\overline{X}$ if we associate $x' \in X'$ with $f_{x'} \in \overline{X}$ which acts according to the formula $f_{x'}(x) = \int xx'\, d\mu$, $x \in X$ [2]. Let π denote the operator of natural imbedding of X into $\overline{\overline{X}}$. A fundamental set X in S is said to be reflexive in the sense of Nakano if X' is fundamental in S' and $X'' = X$ (that is, if $\overline{X}$ is total on X and $\pi(X) = \overline{\overline{X}}$). We let $\mathfrak{N}$ denote the collection of all fundamental sets in S which are reflexive in the sense of Nakano. We recall that for $X \in \mathfrak{N}$ the space $\pi(X)$ is a component in the space $\tilde{\overline{X}}$ of all regular functionals on $\overline{X}$ and therefore the projection operator $\mathrm{Pr}_{\pi(X)}: \tilde{\overline{X}} \to \pi(X)$ is defined.

We note that if $X \in \mathfrak{N}$ and a set $M \subset X$ is bounded in the weak topology $\sigma(X, \overline{X})$, then M is closed in $(X, \tau(X))$ if and only if M is closed in (S, τ).

2. Main results.

Theorem 1. *Let $X \in \mathfrak{N}$; let V be a nonempty convex set in X; and let W be the closure of $\pi(V)$ in $\tilde{\overline{X}}$ in the topology $\sigma(\tilde{\overline{X}}, \overline{X})$.*

a) *If V is closed in $(X, \tau(X))$, then*

$$\mathrm{Pr}_{\pi(X)} W = \pi(V). \tag{$*$}$$

b) *If V is bounded in the topology $\sigma(X, \overline{X})$ and satisfies condition $(*)$, then V is closed in $(X, \tau(X))$.*

Remark. In Theorem 1b) the condition of $\sigma(X, \overline{X})$-boundedness of V cannot be omitted (it suffices to consider the case $X = L^2[0, 1]$, $V = \{x \in X : \int_0^1 x(t)\,dt = 0\}$).

Theorem 2. *Let $X \in \mathfrak{N}$ and let Z be fundamental in $\overline{X}$. Let V_1 and V_2 be nonempty, convex, disjoint sets in X which are closed in $(X, \tau(X))$. If one of these sets is $\sigma(X, \overline{X})$-bounded, there exists a functional $f \in Z$ such that $\sup f(V_1) < \inf f(V_2)$.*

Theorem 3. *Let $X \in \mathfrak{N}$ and let $\{V_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ be a centered system of convex subsets of X which are $\sigma(X, \overline{X})$-bounded and closed in $(X, \tau(X))$. Then $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi \neq \phi$.*

Theorem 4. *Let $X \in \mathfrak{N}$ and let V_1 and V_2 be convex subsets of X which are $\sigma(X, \overline{X})$-bounded and closed in $(X, \tau(X))$.*

Then the set $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ is closed in $(X, \tau(X))$.

Theorem 5. *Let $X \in \mathfrak{N}$ and let V be a nonempty convex subset of X which is $\sigma(X, \overline{X})$-bounded and closed in $(X, \tau(X))$. Let $A \in \Sigma$ and let χ_A be the characteristic function of A.*

Then the set $\{x\chi_A : x \in V\}$ is closed in $(X, \tau(X))$.

Theorem 6. *Let $X \in \mathfrak{N}$, let X be a KN-space, and suppose that in X the following condition is satisfied: if $\{x_\alpha\}$ is a directed set in X such that $0 \le x_\alpha \uparrow$ and $\sup \|x_\alpha\| < \infty$, then $x = \sup x_\alpha \in X$ exists and $\|x\| = \sup \|x_\alpha\|$. Let V_1 and V_2 be nonempty convex sets in X which are closed in $(X, \tau(X))$. If one of these sets is bounded with* *respect to the norm in* X, *then there exist* $x_1 \in V_1$ *and* $x_2 \in V_2$ *such that*

$$\|x_1 - x_2\| = \inf \{\|y_1 - y_2\| : y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}.$$

The following theorem extends to the nonseparable case a known result of Bessaga and Pełczyński on extremal points of convex sets in separable dual spaces.

Theorem 7. *Let* E *be an arbitrary Banach KN-space such that in* E *and* E^* *the norms are continuous.*[1]

Then the closed unit ball in E^* *coincides with the closed (with respect to the norm topology in* E^*) *convex hull of its extremal points.*

3. The space $L^1[0, 1]$. In Theorems 1–6 we can let (T, Σ, μ) be the interval $[0, 1]$ with Lebesgue measure and we can let X be $L^1[0, 1]$. Then $\overline{X} = X^*$, $\overline{\overline{X}} = X^{**}$, and the topology $\sigma(X, \overline{X})$ is the usual weak topology on $L^1[0, 1]$. We will restate Theorems 2, 3, and 6 for this special case.

Theorem 2′. *Let* V_1 *and* V_2 *be nonempty, convex, disjoint sets in* $L^1[0, 1]$ *which are closed in* $L^1[0, 1]$ *with respect to convergence in measure. If one of these sets is norm bounded, there exists a functional* $f \in (L^1[0, 1])^*$ *such that* $\sup f(V_1) < \inf f(V_2)$.

Theorem 3′. *Each centered system of convex, norm bounded sets which are closed with respect to convergence in measure in* $L^1[0, 1]$ *has a nonempty intersection.*

Theorem 6′. *Let* V_1 *and* V_2 *be nonempty convex sets in* $L^1[0, 1]$ *which are closed in* $L^1[0, 1]$ *with respect to convergence in measure. If one of these sets is norm bounded, there exist* $x_1 \in V_1$ *and* $x_2 \in V_2$ *such that*

$$\|x_1 - x_2\| = \inf \{\|y_1 - y_2\| : y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}.$$

In conclusion we note that the proofs of the results in this article are based on the theory of vector lattices.

Leningrad State University

Received 16/MAR/73

BIBLIOGRAPHY

1. B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; 37 #121.

2. B. Z. Vulih and G. Ja. Lozanovskiĭ, *On the representation of completely linear and regular functionals in partially ordered spaces*, Mat. Sb. 84 (126) (1971), 331–352 = Math. USSR Sb. 13 (1971), 323–343. MR 43 #2467.

Translated by F. A. CEZUS

[1] The norm in a KN-space E is said to be continuous if $x_n \downarrow 0$ in E implies that $\|x_n\| \to 0$.

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 199 (1971), No. 3

Soviet Math Dokl.
Vol. 12 (1971), No. 4

ON BANACH LATTICES AND CONCAVE FUNCTIONS

UDC 513.737

G. Ja. LOZANOVSKIĬ

This article considers a construction by means of which, from a given Banach lattice that is a basis of an extended K-space, a large number of new Banach lattices can be formed, using concave functions satisfying certain conditions. This construction was introduced by Calderón (for the case of spaces of measurable functions) in [1], and has been studied, for example, in [2-5]. It is essentially a generalization of the well-known construction of Orlicz spaces [6]. We recall that Banach lattices of measurable functions on a space with a measure, and also Banach lattices of numerical sequences, are particular cases of the general concept of Banach lattices. It is therefore not difficult to reformulate the results of this article for these particular cases.

We shall make use of the terminology and notation of the theory of partially ordered spaces employed in [7]. In particular let us recall that a KN-space is a K-space (i.e. a Riesz space, translator's note) that is also a normed space with a monotonic norm. We shall deal only with Banach KN-spaces, that is, KN-spaces complete in the norm. A norm in a KN-space X is called universally semicontinuous if whenever a directed set satisfies $0 \le x_\alpha \uparrow x \in X$ then $\|x_\alpha\|_X \to \|x\|_X$. The norm in a KN-space X is called universally monotonically complete if whenever a directed set satisfies $0 \le x_\alpha \uparrow$ in X and $\sup \|x_\alpha\|_X < +\infty$ then $\sup x_\alpha \in X$.

In what follows, the symbols W, $\mathbf{1}$, V, X_1, X_2, Z have the following meanings: W is any extended K-space with a fixed unit $\mathbf{1}$; X_1, X_2, Z are arbitrary Banach KN-spaces that are bases in W; V is the space of all $x \in W$ such that

$$\|x\|_V = \inf\{\lambda > 0\colon\ |x| \geqslant \lambda \mathbf{1}\} < +\infty, \tag{1}$$

so that V is a KN-space of bounded elements with strong unit $\mathbf{1}$.

Definition 1. Let $\mathfrak{A}_2$ be the set of all real concave functions $f(u, v)$ defined and continuous on the set of all $u \ge 0$, $v \ge 0$ and such that

$$f(u, 0) = f(0, v) = 0 \quad \text{for all} \quad u, v \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\lim_{p\to+\infty} f(u, p) = \lim_{q\to+\infty} f(q, v) = +\infty \quad \text{for all} \quad u, v > 0. \tag{3}$$

Definition 2. Let $f \in \mathfrak{A}_2$. $f(X_1, X_2)$ is the set of all $x \in W$ such that

$$|x| \le \lambda f(|x_1|, |x_2|) \tag{4}$$

for some number $\lambda > 0$ and some $x_i \in X_i$ with $\|x_i\|_{X_i} \le 1$, $(i = 1, 2)$. $\|x\|_{f(X_1, X_2)}$ stands for the infimum of all possible λ in the inequality (4).

AMS 1970 *subject classifications*. Primary 46A40; Secondary 46E35.

Lemma 1 (see [5]). *The space $f(X_1, X_2)$ with norm $\|\cdot\|_{f(X_1, X_2)}$ constructed in this way is a Banach KN-space that is a basis in W.*

Throughout the following we shall suppose in addition that W contains a basis L that is a KB-space with additive norm and shall denote by J a functional on L defined by

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{5}$$

Remark 1. If W is the K-space of all finite measurable functions (with identification of equivalent functions) on a space (T, Σ, μ) with σ-finite measure μ, then L always exists. We can take $L = L_1(T, \Sigma, \mu)$ and

$$J(x) = \int_T x\, d\mu, \quad x \in L. \tag{6}$$

Definition 3. The *dual space* to Z is the space Z' of all $x \in W$ such that $xz \in L$ for all $z \in Z$. The norm in Z' is given by

$$\|z\|_{Z'} = \sup\{J(|xz|):\ z \in Z,\quad \|z\|_Z \leqslant 1\}. \tag{7}$$

We recall that $(Z', \|\cdot\|_{Z'})$ is a Banach KN-space that is a base in W. Moreover, Z' can naturally be identified with the space Z of all linear functionals on Z.*

In the following $M(u)$ and $N(v)$ will be a pair of complementary N-functions in the sense of Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ [6] with no other restrictions imposed on them. $\phi(u, v)$ and $\psi(u, v)$ will stand for functions given for $u \geq 0$, $v \geq 0$, by the formulae

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{for } u = 0, \\ uN^{-1}(v/u) & \text{for } u \neq 0; \end{cases} \quad \psi(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{for } v = 0, \\ vM^{-1}(u/v) & \text{for } v \neq 0. \end{cases}$$

Here M^{-1} and N^{-1} are functions inverse to M and N considered for nonnegative values of the variables.

We note that $\phi, \psi \in \mathfrak{U}_2$ and that for any $u \geq 0$, $v \geq 0$,

$$\varphi(u, v) = \inf_{a,\, b>0} \frac{au + bv}{\psi(a, b)}, \quad \psi(u, v) = \inf_{a,\, b>0} \frac{au + bv}{\varphi(a, b)}.$$

Theorem 1 (Fundamental). *The identity (as regards set membership)*

$$(\psi(X_1, X_2))' = \varphi(X_1', X_2') \tag{8}$$

holds, and

$$\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \leqslant \|\cdot\|_{(\psi(X_1, X_2))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')}. \tag{9}$$

We put no other restrictions on X_1 and X_2.

Remark 2. The inequality (9) cannot be strenghtened. More precisely, if c_1, $c_2 > 0$ are constants such that

$$c_1\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \leqslant \|\cdot\|_{(\psi(X_1, X_2))'} \leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \tag{10}$$

for all possible W, X_1, X_2, M, N then $c_1 \leq 1$, and $c_2 \geq 2$.

---

* For Banach lattices of measurable functions the completely linear functionals turn out to be the functionals with integral representations, that is, those that have integral representations of the same type as the functionals in the classical L_p spaces for $1 < p < +\infty$.

Remark 3. In the article [5] the problem of finding all the pairs (f, g) with $f, g \in \mathfrak{A}_2$ for which

$$(f(X_1, X_2))' = g(X_1', X_2'), \tag{11}$$

$$\|\cdot\|_{(f(X_1, X_2))'} = \|\cdot\|_{g(X_1', X_2')} \tag{12}$$

holds for all possible W, X_1, X_2, is solved. It turns out that the possible pairs are all of the form $f(u, v) = Au^{1-s}v^s$, $g(u, v) = A^{-1}u^{1-s}v^s$ with $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$.

Theorem 2. 1) *If the norms* $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ *on* X_1 *and* X_2 *are universally monotonically complete, then the norm* $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$ *on* $\psi(X_1, X_2)$ *has the same property.*

2) *If the norms* $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ *on* X_1 *and* X_2 *are universally monotonically complete and also universally semicontinuous, then the norm* $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$ *on* $\psi(X_1, X_2)$ *has the same property.*

Remark 4. As simple examples show, it is not the case that if $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ are only universally semicontinuous then the same is true for the norm $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$. However, this is valid if, for instance, $M(u)$ is a stepfunction.

Theorem 3. *Let the norms* $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ *on* X_1 *and* X_2 *be universally semicontinuous and universally monotonically complete. Let* $x \in \psi(X_1, X_2)$ *and* $\|x\|_{\psi(X_1, X_2)} = \lambda$.

Then there are $x_i \in X_i$ *such that* $\|x_i\|_{X_i} = 1$ $(i = 1, 2)$ *and*

$$|x| \leq \lambda\psi(|x_1|, |x_2|). \tag{13}$$

Definition 4. Let X be a Banach KN-space that is a basis in W. Let X_M be the set of all $x \in W$ such that

$$\|x\|_{X_M} = \inf\{\lambda > 0 : M(|x|/\lambda) \in X, \quad \|M(|x|/\lambda)\|_X \leqslant 1\} < +\infty. \tag{14}$$

Let X^N be the set of all $x \in W$ such that there is a $\lambda > 0$ and a $y \in X_+$ satisfying:

a) $\|y\|_X \leq 1$ and $W_x \subset W_y$ where W_x and W_y are the bands in W generated by x and y respectively;

b) $N(|x|/(\lambda y))y \in L$ and $J(N|x|/(\lambda y))y \leq 1$.

By $\|x\|_{X^N}$ we denote the infimum of all possible λ.

It is easy to show that $X_M = \psi(X, V)$, $X^N = \phi(X, L)$ and that the corresponding norms coincide. Thus the following theorem follows as a particular case of Theorem 1.

Theorem 4. *The following identities for set membership hold*

$$(X_M)' = (X')^N, \quad (X^M)' = (X')_N, \tag{15}$$

and

$$\|\cdot\|_{(X')^N} \leqslant \|\cdot\|_{(X_M)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')^N}, \tag{16}$$

$$\|\cdot\|_{(X')_N} \leqslant \|\cdot\|_{(X^M)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')_N}. \tag{17}$$

We emphasize that no additional restrictions are laid on X.

Remark 5. If we take $X = L$ in Theorem 4, then we can get the well-known relations between Orlicz spaces that are constructed with respect to a pair of mutually complementary N-functions [6].

Finally, we give an auxiliary result on spaces of continuous functions that is used in proving Theorem 1 and possibly has interest in itself.

Lemma 2. *Let B be any bicompact, $C(B)$ the Banach space of all real continuous functions on B. Let $E = C(B) \times C(B)$ be the ordinary Cartesian product, and let its Banach adjoint in a natural manner be $E^* = C(B)^* \times C(B)^*$. We take any $h \in C(B)^*$ such that $0 \leq h$ and put*

$$G(h) = \{(\mu, \nu) \in E^*:\ \mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0, \varphi(\mu, \nu) \leqslant h\}.$$

Then the set $G(h)$ is not empty, is convex and weak* closed, that is, is closed in the topology $\sigma(E^*, E)$.

Leningrad Military-Engineering Academy

Received 8/JAN/71

BIBLIOGRAPHY

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, Studia Math. 24 (1964), 211. MR 29 #4903.

[2] S. G. Kreĭn, Ju. I. Petunin and E. M. Semenov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 170 (1966), 265 = Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 1185. MR 34 #3299.

[3] G. Ja. Lozanovskiĭ, Sibirsk. Mat. Ž. 10 (1969), 584. MR 39 #3285.

[4] ———, Dokl. Akad. Nauk SSSR 188 (1969), 522 = Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 1149. MR 40 #4731.

[5] ———, Sibirsk. Mat. Ž. (to appear)

[6] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ja. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Problems of Contemporary Mathematics, GITTL, Moscow, 1958; English transl., Noordhoff, Groningen; Internat. Monographs on Advanced Math. Phys., Hindustan, Delhi, 1961. MR 21 #5144; 23 #A4016.

[7] B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; 37 #121.

Translated by:
J. L. B. Cooper

Mat. Sbornik
Tom 84 (126) (1971), No. 3

Math. USSR Sbornik
Vol. 13 (1971), No. 3

ON THE REPRESENTATION OF COMPLETELY LINEAR AND REGULAR FUNCTIONALS IN PARTIALLY ORDERED SPACES

B. Z. VULIH AND G. Ja. LOZANOVSKIĬ

UDC 519.56

Abstract. In the first two sections the representation of completely linear functionals in K-spaces and the connection between completely linear functionals and measures on bases in a K-space is studied. In §3 a realization of spaces of regular functionals is established.

Bibliography: 15 titles.

The contents of this article fall into two parts, corresponding to the section headings. The first (§§1 and 2) deals with completely linear functionals and gives the representation of the functionals by using products of elements in partially ordered spaces; some of the results here generalize and complete results already known. The second part (§3) deals with regular functionals. As far as we know the problem of representing arbitrary regular functionals has not been considered in the literature up to now.[1)]

§1. Measures generated by completely linear functionals

It is known that there is a close connection between completely linear functionals in a K-space[2)] and measures on the Boolean algebra of its bands: any completely linear functional is the integral with respect to some measure, and conversely, one can construct a completely linear functional corresponding to a measure. This approach to completely linear functionals can be found in the work of numerous authors, but it is difficult to find an article or book in which the study of completely linear functionals has been carried out sufficiently clearly from this point of view. We shall therefore devote the first section of this article to systematizing the concepts concerning completely linear functionals and measures that are used in the sequel. We note that although all the material set out in this section (and to some extent also in §2) was to a significant extent prepared in the book [7], which appeared about twenty years ago, the

AMS 1970 *subject classifications.* Primary 46A40.

1) The results of §3 are all due to G. Ja. Lozanovskiĭ and were published in [11] without proofs.

2) We use the terminology from the theory of partially ordered spaces employed in the book [2]. (*Translator's note*: the terminology used in the translation is that of the translation of this book; note however that K-spaces (K_σ-spaces) are usually called Dedekind complete (σ-complete) Riesz spaces in the translation).

results given below do not appear there.

Throughout this article we mean by measure a nonnegative countably additive function with values in the extended real line.1)

1. Let X be a K-space, and let Z be a maximal extension of it; let a unit 1 be chosen in Z, let $\mathfrak{E}$ be the base (that is, the set of unit elements) in Z, let $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} \cap X$. As is well known, $\mathfrak{E}$ is a complete Boolean algebra, and $\mathfrak{E}'$ coincides with $\mathfrak{E}$ if $1 \in X$, and if $\mathfrak{E}' \neq \mathfrak{E}$ then $\mathfrak{E}$ is not a Boolean algebra but $\mathfrak{E}'$ is an ideal in $\mathfrak{E}$.2)

We consider a positive completely linear functional f given on X. The restriction of f to $\mathfrak{E}'$ ($f|_{\mathfrak{E}'}$), which we denote by ϕ, is a countably additive function with finite nonnegative values. Since the functional f has a band of essential positiveness ([2], Theorem VIII. 4.1), $\mathfrak{E}'$ splits into the direct sum of two ideals $\mathfrak{E}_1'$ and $\mathfrak{E}_2'$ such that $\phi(e) > 0$ for any $e > 0$ in $\mathfrak{E}_1'$ and $\phi(e) \equiv 0$ on $\mathfrak{E}_2'$.

We extend the function ϕ to the whole of the algebra $\mathfrak{E}$ by defining it for all $e \in \mathfrak{E}$ by

$$\varphi(e) = \sup_{e' \in \mathfrak{E}', e' \leqslant e} \varphi(e'). \tag{1}$$

It is easily seen that ϕ remains countably additive after extension, but that it can now take $+\infty$ as a value.

We shall call this function the measure on $\mathfrak{E}$ generated by f.

The measure ϕ is semicontinuous on all of the algebra $\mathfrak{E}$: if $e_\alpha \uparrow e$ is a directed set, then $\phi(e_\alpha) \to \phi(e)$. The semicontinuity of ϕ on $\mathfrak{E}'$ is a consequence of the complete linearity of f, and it is easy to verify from this that ϕ is semicontinuous on $\mathfrak{E}$. For finite measures semicontinuity is equivalent to continuity: if $e_\alpha \downarrow 0$ then $\phi(e_\alpha) \to 0$. It is clear that the continuation of ϕ from $\mathfrak{E}'$ to $\mathfrak{E}$ according to the formula (1) is the only continuation that preserves its semicontinuity.3)

Not every measure on $\mathfrak{E}$ is generated by a completely linear functional. The function ϕ constructed by us has the following important property: if $\phi(e) = +\infty$ for some $e \in \mathfrak{E}$, then there is an $e' < e$, $e' \in \mathfrak{E}$, for which $0 < \phi(e') < +\infty$. Any measure on $\mathfrak{E}$ with this property will be called locally finite. It is clear that if ϕ is a locally finite measure on $\mathfrak{E}$, then the set $\mathfrak{E}^*_\phi = \{e \colon e \in \mathfrak{E}, \phi(e) < +\infty\}$ is an ideal, complete in $\mathfrak{E}$.

Theorem 1.1. *Let a locally finite semicontinuous measure be given on $\mathfrak{E}$. Then there is a foundation X_ϕ in the space Z on which a positive completely linear functional f that generates the measure ϕ is defined.*

Proof. For any $x \in Z_+$ we put

1) Of the numerous articles on measures on Boolean algebras, the ones closest to this article are, for example, the articles by Kelley [8], [9]. However, the connection between measures and the theory of semiordered spaces is scarcely touched in these articles.

2) We note that $\mathfrak{E}'$ is complete in $\mathfrak{E}$ in the sense that if $e \in \mathfrak{E}$ and $ed\mathfrak{E}'$ then $e = 0$ (d stands for disjunction).

3) A problem close to this, that of extending a generalized additive norm to K-spaces, has been considered by A. G. Pinsker. See [7] (Chapter XI, 3.1).

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\varphi(e_\lambda^x),$$

where e_λ^x is the characteristic of the element x,1) and we then put

$$X_\varphi = \{x:\ x \in Z,\ f(|x|) < +\infty\}.$$

It is easy to see that X_ϕ is a normal subspace of Z; since $f(e) = \phi(e)$ for $e \in \mathfrak{E}$, we have $\mathfrak{E}_\phi^* \subset X_\phi$ and so X_ϕ is a foundation in Z. The functional f can be continued by additivity to all of X_ϕ: $f(x) = f(x_+) - f(x_-)$.

Let us write 1 as $1 = \mathrm{S}e_\xi$, where $e_\xi \in \mathfrak{E}_\phi^*$, and let X_ξ be the band in X_ϕ generated by e_ξ. In [7] (Chapter VIII, 1.32) it is shown that the functional f is linear on X_ξ. It can be shown similarly that f is also completely linear on each of the X_ξ. We shall verify that it is completely linear on X_ϕ.

Let $x_\alpha \downarrow 0$ in X_ϕ. We can suppose without loss of generality that $x_\alpha \leq y \in X_\phi$. We put $y_\xi = y \wedge e_\xi$. It is easy to show that there is an at most countable set of the indices ξ, say (ξ_n), for which $f(y_{\xi_n}) > 0$. Further, from the identities

$$f(x_\alpha) = \sum_n f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}), \quad f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}) \downarrow 0 \quad \text{for each} \quad n,$$

$$\sum_n f(y_{\xi_n}) = f(y) < +\infty, \quad f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}) \leqslant f(y_{\xi_n})$$

it is easy to see that $f(x_\alpha) \to 0$.

If we now construct the measure generated by f then it is clear from the semicontinuity of ϕ that the extension of $\phi|_{\mathfrak{E}_\phi^*}$ from $\mathfrak{E}_\phi^* = \mathfrak{E} \cap X_\phi$ to $\mathfrak{E}$ according to formula (1) gives the function ϕ on $\mathfrak{E}$ with which we started. This proves the theorem.

As before, let X be an arbitrary foundation in Z, and let us suppose that there is a sufficient set of completely linear functionals on X. We shall discuss what one can say about the base $\mathfrak{E}$ of the K-space Z in this case.

Lemma 1. *If there is a sufficient set of completely linear functionals on X, then X has a foundation Y on which there is defined an essentially positive completely linear functional.* 2)

Proof. Let X be split into a complete set of mutually disjoint bands X_ξ $(\xi \in \Xi)$, on each of which there is an essentially positive completely linear functional f_ξ. For Y take the smallest foundation in X that contains all the X_ξ. Y then consists of all elements of the form $y = \sum_{n=1}^k x_n$ with $x_n \in X_{\xi_n}$. If we require that $\xi_n \neq \xi_p$ if $n \neq p$, then the representation of y is unique. Putting $f(y) = \sum_{n=1}^k f_{\xi_n}(x_n)$ we get an essentially positive completely linear functional on Y.

Theorem 1.2. *In order that there be a foundation in a K-space X with a sufficient set of completely linear functionals it is necessary and sufficient that a locally finite*

---

1) See [2], Chapter VIII, §10, or [7], Chapter VIII, §1.

2) A functional f is essentially positive on Y if $f(y) > 0$ for each $y > 0$.

essentially positive measure should exist on the base $\mathfrak{E}$ of the K-space Z.

Proof. a) Necessity. We can suppose without loss of generality that there is an essentially positive completely linear functional on X.[1] The measure generated on $\mathfrak{E}$ by this functional has the properties stated.

b) Sufficiency. Let μ be an essentially positive locally finite measure on $\mathfrak{E}$ and let $\mathfrak{E}^*_\mu$ be the ideal on which it is finite. It follows from the countable additivity of μ that it is continuous on $\mathfrak{E}^*_\mu$ (and consequently is semicontinuous). Let us extend the restriction $\mu|_{\mathfrak{E}^*_\mu}$ to all the algebra $\mathfrak{E}$ by means of formula (1). We obtain a semicontinuous locally finite measure ϕ.[2] Then by Theorem 1.1 there is a foundation Y in Z on which an essentially positive completely linear functional is defined, and the meet $X \cap Y$ is a foundation in X with the same property.

Using a theorem of A. G. Pinsker ([7], Chapter XI, 1.32) it follows at once from Theorem 1.2 and Lemma 1.1 that *the existence on the base of Z of a locally finite essentially positive measure is equivalent to the property that Z contains a foundation forming a KB-space with an additive norm.*

Theorems 1.1 and 1.2 can be carried over to the case in which X is a K_σ-space, imbedded in a K_σ-space with a unit and so possessing a maximal extension.

2. We realize the base $\mathfrak{E}$ of the K-space Z in the form of the algebra of open-closed sets of an extremally disconnected bicompact space Q.[3] Then the measure ϕ defined on $\mathfrak{E}$ can be carried over to the set of open-closed sets in Q. This collection of sets will also be denoted by $\mathfrak{E}$. If we regard $\mathfrak{E}$ as an algebra of subsets of Q, then it is not a σ-algebra since the union of an infinite set of open-closed sets is not necessarily open-closed. We extend the domain of definition of ϕ so that it becomes a σ-algebra of subsets of Q. For this we consider the set $\mathfrak{B}$ of all sets in Q that are of the form

$$B = E \,\Delta\, N = (E \setminus N) \cup (N \setminus E),$$

where $E \in \mathfrak{E}$ and N is a set of first category in Q. It can be verified by elementary arguments that $\mathfrak{B}$ is a σ-algebra and contains all the Borel sets in Q.[4] We call $\mathfrak{B}$ the canonical σ-algebra of Q. Note that E and N are uniquely defined for each $B \in \mathfrak{B}$.

Let a measure ϕ be given on the algebra $\mathfrak{E}$. We put $\phi(B) = \phi(E)$ for any $B \in \mathfrak{B}$, so extending ϕ to the entire σ-algebra $\mathfrak{B}$ while preserving countable additivity. If $B \in \mathfrak{B}$ is of the first category then $\phi(B) = 0$. The extension of ϕ to the σ-algebra $\mathfrak{B}$ will be called canonical.

---

1) It is important here that any foundation in X is also a foundation in Z.

2) In fact we can show that the original measure μ is itself semicontinuous (and thus that $\phi = \mu$). For this we use Theorem VI.1.1. in [2] and the fact that a Boolean algebra is of countable type for a strictly positive finite measure.

3) If Z is an extended K_σ-space, $\mathfrak{E}$ is realized on a quasi-extremally disconnected bicompact space.

4) The σ-algebra $\mathfrak{B}$ was considered by K. Yosida [5]. The Borel sets are contained in $\mathfrak{B}$ because a closed set differs from its open-closed kernel only by a nowhere dense set.

We now consider the space $S(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ (or, for brevity, $S(Q)$) of measurable functions defined and everywhere finite on Q. We identify equivalent functions, as usual. The measure ϕ will be supposed locally finite and essentially positive on the base $\mathfrak{E}$. In this case the space $S(Q)$ coincides with $C_\infty(Q)$[1] in the sense that

1) each function in $C_\infty(Q)$ is in $S(Q)$;

2) distinct functions in $C_\infty(Q)$ are not equivalent;

3) each function in $S(Q)$ is equivalent to some function in $C_\infty(Q)$.

We give one of the possible variants of the proof of this assertion. Any closed set is in $\mathfrak{B}$. It is then clear that any continuous function on Q is measurable, and if it is in $C_\infty(Q)$ then it is almost everywhere finite. If two continuous functions are not equal everywhere on Q, then they differ on some nonempty open set, which will have finite measure because of the essential positiveness of the function ϕ. The two functions are thus not equivalent and the space $C_\infty(Q)$ is imbedded in a natural manner in $S(Q)$.

On the other hand, $S(Q)$ is known to be an extended K_σ-space (with the natural ordering),[2] and its base consists of characteristic functions of measurable sets and so is isomorphic to the algebra $\mathfrak{E}$, that is, to the base of the K-space $C_\infty(Q)$. It follows from the completeness of the base $\mathfrak{E}$ that $S(Q)$ is also a K-space ([2], Theorem V. 4.3). From this it is evident, because of the Corollary to Theorem V. 4.1 in [2], that when $C_\infty(Q)$ is imbedded in $S(Q)$ the image of $C_\infty(Q)$ fills all of $S(Q)$, and this means that each function in $S(Q)$ is equivalent to some function in $C_\infty(Q)$.

The last assertion can be proved directly without using the properties of extended K-spaces.[3]

We note further that under our conditions the bicompact Q has the following property: any subset of first category in it is nowhere dense.[4]

The realization of the extended K-space Z in the form $S(Q)$ allows one to make the arguments connected with the use of integrals more perspicuous. We go back to Theorem 1.1; let the measure ϕ satisfy the conditions laid down there and be essentially positive. The integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\phi(e_\lambda^x)$ coincides with the usual Lebesgue integral of the function $x(q)$ with respect to the measure ϕ; that is, with the functional f, constructed in the course of the proof of Theorem 1.1, which takes the form

$$f(x) = \int_Q x d\varphi, \tag{2}$$

and the space X_ϕ defined in the same place is none other than the space $L(Q, \phi)$ of

---

1) $C_\infty(Q)$ is the extended K-space consisting of functions continuous on Q and having finite values on nowhere dense sets ([2], Chapter V, §2).

2) The bounds of finite and countable sets of functions in $S(Q)$ are calculated pointwise.

3) Compare [1], French, p. 155, or [14], 1960 edition, p. 175.

4) See, for example, [4]. This result can also be deduced from the more general theorem of Z. T. Dikanova ([2], Lemma VI.6.1).

functions summable on Q for the measure ϕ. The complete linearity of the functional f is an obvious consequence of the properties of the integral. 1)

If the measure ϕ, which is supposed given in Theorem 1.1, is not essentially positive, the algebra $\mathfrak{S}$ splits into two principal ideals $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ so that ϕ is essentially positive on $\mathfrak{S}_1$ and $\phi(e) \equiv 0$ on $\mathfrak{S}_2$.2) In the bicompact Q the principal ideal $\mathfrak{S}_1$ corresponds to the algebra of the open-closed sets contained in some open-closed $Q_1 \subset Q$. By the preceding results, the spaces $C_\infty(Q_1)$ and $S(Q_1)$ are isomorphic and the functional f is written in the form of an integral over the set Q_1, but keeps the form (2).

3. Let us consider the space $S(T)$ of almost everywhere finite measurable functions defined on an arbitrary measure space $(T, \mathfrak{M}, \mu)$, where $\mathfrak{M}$ is a σ-algebra of measurable sets. As above, equivalent functions will be identified. The space $S(T)$ with the obvious linearization and ordering is a K_σ-space. Under the conditions of the previous section this space is also a K-space, but in general it is not. We given an example.

Let T be an interval on the real line, $\mathfrak{M}$ the σ-algebra of Borel sets, and for any $E \in \mathfrak{M}$ let the measure μE be the number of points in E if this is finite and let $\mu E = +\infty$ if E is an infinite set. The measurable functions on T are the same as the Baire functions; and since $\mu E = 0$ only if E is empty, $S(T)$ consists of all the finite Baire functions, with no identification of distinct functions. But it is well known that the Baire functions do not form a K-space ([2], p. 80 (Russian p. 95)).

Coming back to the general case, we give some sufficient conditions in order that $S(T)$ should be a K-space. The simplest sufficient condition for this is the finiteness of the measure μ.

For, the base of the space $S(T)$ (if the function $x(q) \equiv 1$ is taken as the unit) consists of the characteristic functions of measurable sets. The usual arguments show that this base is of countable type if μ is finite. Then by Theorem VI.1.1 in [2] it is complete and by Theorem V.4.3 in [2] $S(T)$ is a K-space and is also of countable type.

A more general sufficient condition for $S(T)$ to be a K-space is that the measure μ be σ-finite.3) Indeed, in this case the space T is the sum of a countable set of mutually disjoint measurable sets T_n with finite measure. By what has been proved already, each of the spaces $S(T_n)$ is a K-space of countable type, and so $S(T)$, their union, is also a K-space of countable type.

It is easy to show that if a measure μ on T is locally finite then the condition that it be σ-finite is also necessary in order that $S(T)$ be a K-space of countable type. However, if the measure is not σ-finite, $S(T)$ can nevertheless be a K-space, although

1) We observe in passing that our arguments lead to a very simple method of proving the well-known theorem of Kakutani on the realization of abstract L-spaces [6].

2) A principal ideal is an ideal that contains a maximal element.

3) This result is proved, for instance, in [3] (English p. 335). We also observe that a σ-finite measure can always be replaced by a finite measure without changing the σ-algebra of measurable sets.

not of countable type. For example consider an arbitrary uncountable set T and for $\mathfrak{M}$ take the σ-algebra of all its subsets, and let the measure be defined as in the example of the Baire functions. Then $S(T)$ consists of all the real everywhere finite functions on T, and it is a K-space; its measure is locally finite but is not σ-finite.

4. It is known that the structure of the space $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ plays an essential part in the study of the Radon-Nikodým Theorem. We make some remarks in this connection. Let $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ be an arbitrary measure space and let a second measure ν be defined on the σ-algebra $\mathfrak{M}$. As usual, ν will be called absolutely continuous with respect to μ if $\mu E = 0$ $(E \in \mathfrak{M})$ implies that $\nu E = 0$. It is well known that if the measure μ is not subjected to some restriction then the Radon-Nikodým Theorem is false. We give without proof a theorem established essentially by Segal [13] (see also [9] and [12]), in which one is considering a so-called local Radon-Nikodým Theorem.

Theorem 1.3. *In order that for any measure ν that is absolutely continuous with respect to μ there should exist a unique* (*up to equivalence with respect to the measure μ*) *measurable nonnegative function f such that*

$$\nu E = \int_E f d\mu \tag{3}$$

for any E with $\mu E < +\infty$, it is necessary and sufficient that

1) *μ be locally finite*;

2) *the aggregate $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ form a K-space.*

It is not required in this that the function f should be everywhere finite.

We observe that one cannot leave out the local character of the Radon-Nikodým Theorem in Theorem 1.3; that is, one cannot guarantee that if conditions 1)–2) hold then the equation (3) will hold for any $E \in \mathfrak{M}$.[1] However, if Theorem 1.3 is formulated for finite measures ν, the problem is considerable more complicated. If the conditions 1)–2) imply the validity of the Radon-Nikodým Theorem to the fullest extent, then the problem of Ulam concerning the existence of measurable cardinals has a negative answer. If there is a finite measure ν for which the conditions 1)–2) of the Radon-Nikodým Theorem hold only in the local form, then there is a K-space in which there exists an (o)-linear but not completely linear functional.

§2. The representation of completely linear functionals

1. We give first of all a general theorem on the representation of completely linear functionals in K-spaces.

Let X be a K-space with a sufficient set of completely linear functionals, let Z be its maximal extension, L a foundation in Z forming a KB-space with additive norm $\|\cdot\|$, and let $\Phi(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$ for any $x \in L$. Then Φ is an essentially positive

1) This can be confirmed by a simple example: let the measure μ be not σ-finite, and let $\nu E = 0$ if E is a set which is σ-finite for μ and $\nu E = +\infty$ otherwise.

completely linear functional on L.

We shall call the set $X' = \{x' \colon x' \in Z,\ xx' \in L$ for any $x \in X\}$ the dual set to X.1) It is clear that X' is a normal subspace in Z, and it will appear from what follows that X' is a foundation in Z. The following is easy to establish.

Theorem 2.1. *The general form of a completely linear functional in a K-space X is given by the formula*

$$f(x) = \Phi(xy), \tag{4}$$

where y is an arbitrary element in X' defined uniquely by f. The relation $f \longrightarrow y$ so established between the adjoint space (in the sense of Nakano) $\overline{X}$ and the dual space X' is linear and a lattice isomorphism.

In the particular case of functionals bounded with respect to Φ (in which case y is a bounded element in Z), this theorem was proved by B. Z. Vulih (see [7], Chapter XI, 2.15). The general formulation was given without proof by G. Ja. Lozanovskiĭ in [10], and it is not difficult to deduce it from the theorem for bounded functionals.2) Another proof of Theorem 2.1 was given by N. M. Rice [12]. We shall not give the proof here and go on to consider problems connected with this theorem.

We remark that the place of Φ in Theorem 2.1 can be taken by any essentially positive linear functional defined on some foundation Y in Z. On continuing it from Y to any extension that forms a KB-space with additive norm ([7], Chapter XI, 1.32) we obtain the space L used in defining the dual space. It is now clear that Theorem 2.1 can be given another form, if we use the integral representation of completely linear functionals.

Theorem 2.2. *Let Q be an extremally disconnected bicompact, and let there be given a locally finite essentially positive measure ϕ on its base (that is, the set of open-closed sets) and let it be continued canonically to the canonical σ-algebra $\mathfrak{B}$. Let $\mathrm{L}(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ be the subspace of $\mathrm{S}(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ consisting of all summable functions, let X be a foundation in $\mathrm{S}(Q)$ and let X' consist of all $y \in \mathrm{S}(Q)$ for which $xy \in L$ for any $x \in X$. Then the formula*

$$f(x) = \int_Q xy\,d\varphi,$$

with $y \in X'$ gives the general form of completely linear functionals on X.

The Radon-Nikodým Theorem for measures on an extremally disconnected bicompact Q can be deduced from Theorem 2.1. Let $H(Q)$ denote the set of all units in the K-space $\mathrm{C}_\infty(Q)$; that is, those elements $h \in \mathrm{C}_\infty^+(Q)$ for which $h \wedge x > 0$ for any $x > 0$ in $\mathrm{C}_\infty(Q)$.

Theorem 2.3. *Let two essentially positive locally finite measures ϕ and ψ be*

1) The product used here is known to exist for any two elements in Z. We suppose that a unit 1 has been singled out in Z.

2) A proof of this sort can be found in the dissertation of G. Ja. Lozanovskiĭ defended at Leningrad University in 1965. The transition to the general case was mentioned in essence in [7] (Chapter XI, 2.31).

given on Q. There there is an $h \in H(Q)$ such that for any set $B \in \mathfrak{B}$

$$\psi(B) = \int_B h d\varphi. \tag{5}$$

Conversely, if ϕ is an essentially positive locally finite measure and $h \in H(Q)$ then the function ψ defined by (5) is a locally finite essentially positive measure.

Proof. The second part of the theorem is obvious. We prove the first part. To do this we construct a completely linear functional f, acting on some foundation $X \subset C_\infty(Q)$ according to Theorem 1.1, by means of the formula

$$f(x) = \int_Q x d\psi.$$

The functional f is essentially positive. According to Theorem 2.2 there is an $h \in S^+(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ (we can suppose that $h \in C_\infty^+(Q)$) such that

$$f(x) = \int_Q xh d\varphi.$$

It follows from the essential positiveness of f that $h \in H(Q)$. Thus

$$\int_Q x d\psi = \int_Q xh d\varphi \quad \text{for any} \quad x \in X.$$

If $B \in \mathfrak{B}$ is such that the characteristic function $\chi_B \in X$, we get formula (5) immediately. There is no difficulty in extending the formula to an arbitrary $B \in \mathfrak{B}$.

2. Theorem 2.2 on the isomorphism of X' and $\overline{X}$ can be carried over to K-spaces consisting of measurable functions on an arbitrary measure space $(T, \mathfrak{M}, \mu)$. Let L denote the set of summable functions on T, and S_L the band in $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ generated by L. Let X be a normal subspace in S_L and S_X the band in S_L generated by the set X. We define the space X' dual to X:

$$X' = \{x' : x' \in S_X, \, xx' \in L \quad \text{for any} \quad x \in X\}.$$

If $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is a K-space, we can apply Theorem 2.1, taking for Φ the functional

$$\Phi(x) = \int_T \text{where } (x \in L),$$

and then *the general form of a completely linear functional on X is given by a formula*

$$f(x) = \int_T xy d\mu, \quad \text{where} \quad y \in X'. \tag{6}$$

However, if $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is only a K_σ-space, the theorem is false even for $X = L$ as the following example (see also [15]) shows. We take the space of Baire functions on the interval $[a, b]$ considered in §1.3. For the measure introduced there on $[a, b]$ the space L consists of all functions differing from zero on a not more than countable set and such that $\Sigma_{t \in [a,b]} |x(t)| < +\infty$. It is easy to see that the dual space L' consists of all bounded Baire functions and the conjugate space $\overline{L}$ of all bounded real functions on $[a, b]$.[1)]

1) Note that $L(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is always a KB-space with additive norm.

We show that the theorem concerning the representation of completely linear functionals remains valid when $S(T)$ is a K_σ-space under the additional condition that the conjugate space $\overline{X}$ be of countable type.

We call a K_σ-space X almost extended if every countable set of mutually disjoint elements $x_n \in X$ is bounded.[1)]

It is clear that any band in $S(T)$ is an almost extended K_σ-space. However, such a band need not be extended: for example, in the space of Baire functions, the band consisting of all functions that are 0 on some fixed non-Borel set. We note also that any band of an almost extended K_σ-space is also an almost extended K_σ-space.

As a preliminary we prove a lemma that has independent interest.

Lemma 2. *Let X be an almost extended K_σ-space, Y its K-completion, and Z the maximal extension of Y; and we take it that $X \subset Y \subset Z$. If U is a foundation in Z forming a K-space of countable type then $U \subset X$.*

Proof. To begin with let us suppose that X is an extended K_σ-space, and let us take its unit 1 as unit in Y and Z. Then the base $\mathfrak{S}(Y) = \mathfrak{S}(Z)$ is the Dedekind completion of the base $\mathfrak{S}(X)$. We show that if $e \in \mathfrak{S}(Z) \cap U$ then $e \in \mathfrak{S}(X)$.

In any case, e can be represented in the form of the union $e = \mathrm{S} e_\xi$, where $e_\xi \in \mathfrak{S}(X)$. Here all $e_\xi \in U$, and since U is of countable type there can be an at most countable set of elements different from zero among the e_ξ. But then $e \in X$, since X is an extended space and so $e \in \mathfrak{S}(X)$.

We consider the band X_e generated by the element $e \in \mathfrak{S}(X) \cap U$. The base of this band (that is, the principal ideal of the base $\mathfrak{S}(X)$ generated by e) is a σ-complete Boolean algebra of countable type, and hence it is complete ([2], Theorem VI.1.1), and so X_e is an extended K-space ([2], Theorem V.4.3*). Consequently $X_e = Z_e$, where Z_e is the band in Z generated by the element e. But then similarly $U_e \subset X_e \subset X$.

Let $\{e_\xi\}$ be a complete system of mutually disjoint unit elements contained in U, and U_ξ the band in U generated by e_ξ. Then each $U_\xi \subset X$. Any element $t \in U$ can be represented as a not more than countable combination $t = \mathrm{S} t_n$, where each of the t_n is in one of the U_ξ and hence $t_n \in X$. But then we have also $t \in X$, since X is extended. Thus $U \subset X$.

We now go over to the case in which X is an almost extended K_σ-space without unit. We choose a complete system of pairwise disjoint elements $x_\xi > 0$ in X, and let X_ξ, Y_ξ and Z_ξ be bands in X, Y and Z respectively that are generated by x_ξ, and $U_\xi = Z_\xi \cap U$. Then Y_ξ is the K-completion of X_ξ and Z_ξ is the maximal extension of the space Y_ξ. By what has been proved already $U_\xi \subset X_\xi \subset X$. It can then be shown, as above, that $U \subset X$.

Remark. It is clear from the proof given that each principal band in X generated

1) This differs from the definition of an extended K_σ-space only in that it is not required that X contain a unit.

* *Translator's note.* A reference to Theorem V.5.2 may be intended.

by elements of U is an extended K-space. However, X itself need not be a K-space.

We note also the following obvious assertion, which is used in the sequel. Let X be a K_σ-space, Y its K-completion, Z the maximal extension of the space Y and U a foundation in X that is a K-space. Then U is a foundation in Y and Z, and Z is the maximal extension of U.

We return to the space of measurable functions on $(T, \mathfrak{M}, \mu)$. Again let X be a normal subspace in S_L (see the notation introduced at the beginning of subsection 2).

Theorem 2.4. *If $\overline{X}$ is a K-space of countable type, then formula (6) gives the general representation of a completely linear functional in X.*

Proof. All that we need in the proof is that each completely linear functional on X has a representation of the form (6).

Let Y be the K-completion of S_X, let Z be the maximal extension of Y and let W be a foundation in Z generated by the set X.[1] Finally we put $L_X = L \cap S_X$. It is clear that W is the K-completion of the space X, and by the previous remark L_X is a foundation in Z and L_X is a KB-space with additive norm

$$\|x\| = \int_T |x|\, d\mu.$$

We put

$$\Phi(x) = \int_T x d\mu \quad (x \in L_X).$$

It is known that each completely linear functional in X can be extended in a unique manner to W with preservation of complete linearity. Thus the K-spaces $\overline{X}$ and $\overline{W}$ are isomorphic, and so $\overline{W}$ is a K-space of countable type.

Let us take as unit in Z the supremum of the set of all characteristic functions in S_X (this exists, since it can be reduced to a supremum of disjoint characteristic functions and the K-space Z is extended). We put

$$W' = \{w' : w' \in Z, ww' \in L_X \text{ for any } w \in W\}.$$

By Theorem 2.1 there is a natural linear and lattice isomorphism between W' and $\overline{W}$, and, in particular, W' is of countable type. Then $W' \subset S_X$ by Lemma 2.

We now take an arbitrary functional $f \in \overline{X}_+$. Let $\hat{f}$ be its completely linear extension to W. Then there is $y \in W'$ such that $\hat{f}(w) = \Phi(wy)$. In particular, for any $x \in X$ we have

$$f(x) = \Phi(xy) = \int_T xy d\mu,$$

and this proves the theorem.

Corollary 1. *If X is a K_σ-space with unit 1 then X' and $\overline{X}$ are isomorphic.*

---

1) This is the smallest foundation in which X can be imbedded. To show that there is such a foundation it is enough to form the intersection of all the foundations in Z that contain X. It is easy to see that $z \in W$ if and only if $z \in Z$ and there is an $x \in X$ such that $|z| \leq |x|$.

Proof. We show that $\overline{X}$ is of countable type. It is known that the functional $F(f) = f(1)$ is completely linear on X and is essentially positive, and then $\overline{X}$ is of countable type by Lemma IX.2.1 in [2].

Corollary 2. *If X is a (b)-reflexive (that is, reflexive in the Banach sense) KB-space, then X' and $\overline{X}$ are isomorphic.*

Proof. In this case $X^* = \overline{X}$, and by the Theorem of Ogasawara ([2], Theorem IX.7.4) X^* is a KB-space and hence is of countable type. Thus Theorem 2.4 is applicable.

The corollary just proved explains why the (b)-adjoint space for $\mathrm{L}^p(T, \mathfrak{M}, \mu)$ for $p > 1$ coincides with $\mathrm{L}^q(T, \mathfrak{M}, \mu)$ $(1/p + 1/q = 1)$ without any restriction on the space T. At the same time $\mathrm{L}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ in general is not (b)-reflexive and this manifests itself in the fact that $\overline{L}$ is not necessarily of countable type and L' need not be isomorphic to $\overline{L}$.

Since $\overline{X}$ is a K-space for any X, the supposition could arise that the isomorphism between $\overline{X}$ and X' holds whenever X' is a K-space. The following example shows that this is not the case.

Let an uncountable set T be partitioned into two disjoint uncountable sets A and B and let the σ-algebra $\mathfrak{M}$ consist of all subsets of T that are uncountable or have uncountable complements. Let μ be 1 for any one-point set in A and $+\infty$ for any one-point set in B, and for the other sets in $\mathfrak{M}$ let μ be defined by additivity. Then $\mathrm{S}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is only a K_σ-space.

For X we take the subspace L of summable functions. It is clear that L consists of functions whose support is not more than countable and is contained in A and whose values form a summable family. The band S_L consists of all the functions $x \in \mathrm{S}$ with supports contained in A. Thus if $x \in \mathrm{S}_L$, then $x(t) = 0$ on B and the support of x is not more than countable. It follows that S_L (and so L itself) is a K-space. The dual space L' consists of all bounded functions contained in S_L and is also a K-space. But the conjugate space $\overline{L}$ consists of all bounded functions defined on T and equal to 0 on B.

3. As an application of Theorem 2.2 we show that *in the K-space $\mathrm{S}(0, 1)$*[1] *there is a foundation X which has a sufficient set of regular functionals and no nontrivial completely linear functionals.*

For each point $t_0 \in (0, 1)$ let $\mathfrak{A}(t_0)$ stand for the set of all measurable sets in $(0, 1)$ for which t_0 is a point of density. Further, for any $x \in \mathrm{S}$ we put

$$p_{t_0}(x) = \inf_{A \in \mathfrak{A}(t_0)} \sup_{t \in A} |x(t)|.$$

It is easy to verify that p_{t_0} is a generalized monotonic seminorm in S (that is, it is a monotonic seminorm that can take the value $+\infty$). The system of seminorms $\{p_t\}$ $(t \in (0, 1))$ is total; if $p_t(x) = 0$ for all $t \in (0, 1)$ then $x = 0$. For, suppose that there

1) We take Lebesgue measure for the measure μ on $(0, 1)$.

is an $a > 0$ such that the set $H = \{t: |x(t)| \geq a\}$ has measure $\mu H > 0$. Then if t_0 is a point of density of H, $p_{t_0}(x) \geq a$.

Now let X stand for the set of all functions $x \in S$ for which $p_t(x) < +\infty$ for any $t \in (0, 1)$. Since X is a total system of monotonic seminorms, X has a sufficient set of regular functionals according to the Hahn-Banach Theorem. Let us suppose that there also exists a nontrivial completely linear functional f on X. According to Theorem 2.2 it has the form

$$f(x) = \int_0^1 xy d\mu,$$

with $y \neq 0$. There is an $a > 0$ such that $|y(t)| \geq a$ for some set E with $\mu E > 0$. But then all the functions in X have to be summable over the set E.

Let us choose any point of density t_0 in E and construct two sequences of numbers $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ that satisfy the following conditions:

1) $0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < t_0$;

2) $\lim a_n = \lim b_n = t_0$;

3) $\delta_n = \mu([a_n, b_n] \cap E) > 0$;

4) t_0 is a point of rarification of the set $B = \mathbf{U}_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

It is an elementary matter to verify that such sequences exist.

Further, we choose a positive number M_n such that $\Sigma_{n=1}^{\infty} M_n \delta_n = +\infty$, and define a function $x \in S$ putting

$$x(t) = \begin{cases} M_n, & \text{if} \quad a_n \leqslant t \leqslant b_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 \cdot & \text{for other} \quad t \in (0, 1). \end{cases}$$

It is clear that $p_t(x) < +\infty$ for any $t \neq t_0$. But since t_0 is a point of rarefaction of the set B, $p_{t_0}(x) = 0$. Thus $x \in X$. On the other hand,

$$\int_E x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a_n, b_n] \cap E} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \delta_n = +\infty,$$

which gives a contradiction.

§3. The realization of spaces of regular functionals

In the previous section it was shown that completely linear functionals on a K-space can be represented with the aid of elements of the maximal extension of the K-space. In order to represent arbitrary regular functionals it is suitable to use a "wider" K-space, but in this case it turns out that regular functionals defined on different normal subspaces of one and the same extended K-space can be represented in another extended K-space defined in a manner related to the first.

1. To begin with we establish some auxiliary propositions.

Let X be a K-space, Y a normal subspace of X, and on Y let a positive additive functional f be given. For any $x \in X_+$ we put

$$g(x) = \sup\{f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x,\ y \in Y\}. \tag{7}$$

It is clear that if $g(x) < +\infty$ for any $x \in X_+$ then g has the property of additivity on X_+ and so can be extended while preserving this property to all of X. In this case we call the functional g the minimal extension of f from Y to X. It is well known that if f is completely linear then so is g.

Let $\widetilde{X}$ be the associated space of X (that is, the K-space of regular functionals on X), and let $\widetilde{X}_Y$ be the set of all functionals $f \in \widetilde{X}$ for which the restriction $f|_Y = 0$. It is clear that $\widetilde{X}_Y$ is a band in $\widetilde{X}$.

Lemma 3. *If $f \in \widetilde{X}_+$ and $f \mathrm{d} \widetilde{X}_Y$, then f coincides with the minimal extension to X of its restriction $f|_Y$.*

Proof. Let g be the minimal extension of $f|_Y$ from Y to X. Then $0 \leq g \leq f$ and so $g \mathrm{d} \widetilde{X}_Y$. Consequently $f - g \mathrm{d} \widetilde{X}_Y$ and at the same time $f - g \in \widetilde{X}_Y$, so that $f - g = 0$.

Remark. If X is a KN-space, Y is a normal subspace of it with the norm induced by that of X, and X^* is the space (b)-conjugate to X, then the set X^* can be defined completely similarly, and is a band in X^*. An assertion similar to that of Lemma 3 is valid for $f \in X^*_+$.

Lemma 4. *If, under the conditions of the previous remark, we put $Tf = f|_Y$ for any $f \in (X^*_Y)^{\mathrm{d}}$,*[1] *then T is a linear and lattice isomorphism of the K-space $(X^*_Y)^{\mathrm{d}}$ (which we denote for brevity by U) onto the K-space Y^*.*

Proof. Let $g \in Y^*$. Then there is a functional $h \in X^*$ such that $h|_Y = g$. If $f = \mathrm{Pr}_U H$, then $f \in U$ and $h - f \in X^*_Y$, and so $Tf = g$. Thus T is a mapping onto Y^*. If $Tf = 0$ $(f \in U)$, then $f \in X^*_Y$ and so $f = 0$; that is, the map T is one-to-one. It is easy to see that $Tf \geq 0$ if and only if $f \geq 0$.

For any K-space X, we shall write $\mathfrak{S}(X)$ for the Boolean algebra of its bands.

Lemma 5. *Let Z_1 and Z_2 be extended K-spaces, 1_1 and 1_2 units in them, T_1 a foundation in Z_1, T_2 a normal subspace in Z_2, and let B be an isomorphism of the Boolean algebra $\mathfrak{S}(T_1)$ onto the Boolean algebra $\mathfrak{S}(T_2)$. Then there is a unique pair (R, V), with V a band in Z_2 and R an isomorphism of the K-space Z_1 onto V, satisfying the conditions:*

1) $R(1_1) = \mathrm{Pr}_V 1_2$;

2) $R(H) \cap T_2 = B(H \cap T_1)$ *for any band* $H \in \mathfrak{S}(Z_1)$.

This lemma is almost obvious: for V we take the band in Z_2 generated by the set T_2, and take into account that according to the hypotheses the bases of the K-spaces Z_1 and V are isomorphic.

2. In this subsection Z is an extended K-space with fixed unit 1, X is any normal subspace in it, and M is the subspace of bounded elements in Z. We introduce some notation.

---

1) If E is an arbitrary subset in a K-space, then E^{d} is its disjoint complement and $(X^*_Y)^{\mathrm{d}}$ is the disjoint complement to X^*_Y in the K-space X^*.

Let $f \in \widetilde{X}$ and $u \in X_+$. For any $x \in M$ we put

$$f_{(u)}(x) = f(xu).$$

Clearly $f_{(u)} \in \widetilde{M}$ and the operator $A_{(u)}$ from $\widetilde{X}$ to $\widetilde{M}$ defined by $A_{(u)}f = f_{(u)}$ is linear and positive.

Lemma 6. *Let $E \subset \widetilde{X}$ and let $g = \sup E$ exist in $\widetilde{X}$. Then $A_{(u)}g = \sup_{f \in E} A_{(u)}f$.*

Proof. For any $x \in M_+$ we have

$$(A_{(u)}g)(x) = g(xu) = \sup_{\substack{z_1+\ldots+z_n=xu \\ z_1,\ldots,z_n\geqslant 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{f_1(z_1) + \ldots + f_n(z_n)\}$$

$$= \sup_{\substack{x_1+\ldots+x_n=x, \\ x_1,\ldots,x_n\geqslant 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{f_1(x_1u) + \ldots + f_n(x_nu)\}$$

$$= \sup\{(f_1)_{(u)}(x_1) + \ldots + (f_n)_{(u)}(x_n)\} = (\sup_{f\in E} A_{(u)}f)(x).$$

Corollary. a) $|A_{(u)}f| = A_{(u)}|f|$ (obvious).

b) *If $A_{(u)}f \geq 0$, then there is a $g \geq 0$ $(g \in \widetilde{X})$ for which $A_{(u)}f = A_{(u)}g$.*[1]

It is sufficient to put $g = |f|$.

If Y is an arbitrary K-space, and $v \in Y_+$, then Y_v stands for the subspace of elements bounded relative to v:

$$Y_v = \{y\colon y \in Y,\ |y| \leq \lambda v \text{ for some } \lambda, \text{ depending on } y\}.$$

Lemma 7. *The image of the space $\widetilde{X}$ under the map $A_{(u)}$ is a normal subspace of $\widetilde{M}$.*

Proof. From the fact that the operator $A_{(u)}$ preserves bounds, according to the lemma just stated, it follows at once that $A_{(u)}(\widetilde{X})$ is a linear sublattice in $\widetilde{M}$. Let $0 \leq \phi \leq \psi$, where $\psi \in A_{(u)}(\widetilde{X})$ and $\phi \in \widetilde{M}$. There is an $f \in \widetilde{X}_+$ such that $\psi = A_{(u)}f$. For any $x \in X_u$ we put $h(x) = \phi(xu^{-1})$ (it is clear that $xu^{-1} \in M$). Then $h \in \widetilde{X}_u$, and if $x \in X_u^+$, then

$$h(x) = \varphi(xu^{-1}) \leqslant \psi(xu^{-1}) = f_{(u)}(xu^{-1}) = f(x).$$

Thus $0 \leq h \leq f|_{X_u}$. We write l for the minimal extension of the functional h from X_u to X: $l \leq f$. Then if $x \in M$, then $xu \in X_u$ and

$$l_{(u)}(x) = l(xu) = h(xu) = \varphi(x),$$

that is, $l_{(u)} = \phi$ or $\phi = A_{(u)}l$. Thus $\phi \in A_{(u)}(\widetilde{X})$.

Corollary. *If $u, v \in X_+$ and $u \leq v$, then $A_{(u)}(\widetilde{X}) \subset A_v(\widetilde{X})$.*

It follows at once from the definition of the operators $A_{(u)}$ and $A_{(v)}$ that $A_{(u)} \leq A_{(v)}$, and the conclusion required then follows at once from Lemma 7.

Lemma 8. *If $f \in \widetilde{X}$, then in order that $f = 0$ it is necessary and sufficient that*

1) It is clear that the operator $A_{(u)}$ need not be one-to-one.

$A_{(u)}f = 0$ *for any* $u \in X_+$.

Proof. It is clear that if $f = 0$, then $A_{(u)}f = 0$ for any $u \in X_+$. Conversely, if $A_{(u)}f = 0$ for any $u \in X_+$, then, taking $x = 1$, we get that $f(u) = f_{(u)}(1) = 0$ for any $u \in X_+$; that is, $f = 0$.

Lemma 9. *If* $f, g \in \widetilde{X}$, *then the following assertions are equivalent*:

(α) $f \,\mathrm{d}\, g$;

(β) $A_{(u)}f \,\mathrm{d}\, A_{(u)}g$ *for any* $u \in X_+$;

(γ) $A_{(u)}f \,\mathrm{d}\, A_{(v)}g$ *for any* $u, v \in X_+$.

Proof. $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$. Using Lemma 6 and its Corollary, we have

$$|A_{(u)}f| \wedge |A_{(v)}g| = A_{(u)}|f| \wedge A_{(v)}|g|$$
$$\leqslant A_{(u\vee v)}|f| \wedge A_{(u\vee v)}|g| = A_{(u\vee v)}(|f| \wedge |g|) = 0.$$

$(\gamma) \Rightarrow (\beta)$ is obvious.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. We have $A_{(u)}(|f| \wedge |g|) = |A_{(u)}f| \wedge |A_{(u)}g| = 0$, and then $|f| \wedge |g| = 0$ by Lemma 8.

We introduce the set $B(\widetilde{X}) = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(\widetilde{X})$. Since this is the union of a family of normal subspaces in $\widetilde{M}$ directed by inclusion (see Lemma 7 and its Corollary), $B(\widetilde{X})$ is also a normal subspace in $\widetilde{M}$. Similarly, for any band $H \in \mathfrak{S}(\widetilde{X})$ we put $B(H) = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(H)$.

Lemma 10. *If* H_1 *and* H_2 *are two mutually complementary bands of the K-space* $\widetilde{X}$, *then* $B(H_1)$ *and* $B(H_2)$ *are mutually complementary bands of the K-space* $B(\widetilde{X})$.

Proof. The sets $B(H_1)$ and $B(H_2)$ are disjoint, according to Lemma 9. Let us put an arbitrary $h \in B(\widetilde{X})$ in the form $h = A_{(u)}f$, where $f \in \widetilde{X}$ and $u \in X_+$. We put

$$f_1 = \mathrm{Pr}_{H_1} f, \quad f_2 = \mathrm{Pr}_{H_2} f.$$

Then $h_i = A_{(u)}f_i \in B(H_i)$ $(i = 1, 2)$ and $h = h_1 + h_2$. It follows at once from this that $B(H_1)$ and $B(H_2)$ are bands and mutually complementary.

Corollary. (a) *If* $H_1 \,\mathrm{d}\, H_2$ $(H_1, H_2 \in \mathfrak{S}(\widetilde{X}))$ *then* $B(H_1) \,\mathrm{d}\, B(H_2)$.

(b) *If* $H_1 \neq H_2$, *then* $B(H_1) \neq B(H_2)$.

Lemma 11. *Let* Y *be a normal subspace in* X, $g \in \widetilde{Y}_+$, *and let* f *be its minimal extension to* X. *Then*

1) $f_{(v)} = g_{(v)}$ *for any* $v \in Y_+$.

2) *The sets* $P_1 = \{f_{(u)}: u \in X_+\}$ *and* $P_2 = \{g_{(v)}: v \in Y_+\}$ *generate one and the same band in* $\widetilde{M}$.

Proof. 1) For any $x \in M$ and $v \in Y_+$ we have $g_{(v)}(x) = g(xv) = f(xv) = f_{(v)}(x)$.

2) It follows from 1) that $P_2 \subset P_1$. For fixed $u \in X_+$ we put $G = \{g_{(v)}: 0 \le v \le u, v \in Y\}$ and show that $f_{(u)} = \sup G$. Since $g_{(v)} \le f_{(u)}$ for any $g_{(v)} \in G$, $\sup G$ exists in $\widetilde{M}$. For the moment let us write ϕ for this. Then it is enough to show that $f_{(u)}(x) = \phi(x)$ for any x in the base $\mathfrak{S}(M)$, since the linear

combinations of unit elements are a set dense in M for convergence with respect to a regulator. But

$$\varphi(x) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u, v \in Y} g_{(v)}(x) = \sup g(xv) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant xu, y \in Y} g(y) = f(xu) = f_{(u)}(x),$$

and this proves the lemma.

Lemma 12. *If W is any band in the K-space $B(\widetilde{X})$, then there is a band $H \in \mathfrak{S}(\widetilde{X})$ such that $B(H) = W$.*

Proof. We put $H = \bigcap_{v \in X_+} A_{(v)}^{-1}(W)$ and verify that H is the band required.

Clearly, H is a band in $\widetilde{X}$ and $B(H) \subset W$.[1] Let $g \in W_+$. Then there are a $\phi \in \widetilde{X}_+$ and a $u \in X_+$ such that $\phi_{(u)} = A_{(u)}\phi = g$. The subspace X_u will be written Y for brevity. We construct the minimal extension f of the functional $\psi = \phi|_Y$ to all of X. Then $f_{(u)} = \phi_{(u)} = g$. We verify that $f \in H$. This means that $f_{(v)} \in W$ for any $v \in X_+$. According to the preceding lemma it is enough to verify that $\psi_{(w)} \in W$ for any $w \in Y_+$. But for any $w \in Y_+$ there is a $\lambda \geq 0$ such that $w \leq \lambda u$. Then

$$\psi_{(w)} \leqslant \psi_{(\lambda u)} = \lambda \psi_{(u)} = \lambda \varphi_{(u)} = \lambda g \in W,$$

and $\psi_{(w)} \in W$.

It follows at once from Lemmas 10 and 12 (see also the Corollary to Lemma 10) that the map B is an isomorphism between the Boolean algebras of the bands of the K-spaces $\widetilde{X}$ and $B(\widetilde{X})$.

In the following we write $\mathfrak{M}(U)$ for the maximal extension of an arbitrary K-space U.

Lemma 13. *Let $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ and $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ be K-spaces with fixed units 1_1 and 1_2 (respectively). Then there is a unique pair (R_X, V_X), with V_X a band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and R_X an isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ onto V_X, satisfying the conditions*

1) $R_X(1_1) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_2$;
2) $R_X(H) \cap B(\widetilde{X}) = B(H \cap \widetilde{X})$ *for any* $H \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\widetilde{X}))$.

The lemma follows from Lemma 5. We note that V_X is the band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ generated by the set $B(\widetilde{X})$.

3. We now introduce a concept of disjunction for regular functionals defined on different normal subspaces of the same extended K-space. Let Z be an extended K-space, X and Y any normal subspaces in it, and M the subspace of bounded elements.

Definition. Let $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$. We shall say that f and g are disjoint ($f \mathrm{D} g$), if $f_{(u)} \mathrm{d} g_{(v)}$ in the K-space $\widetilde{M}$ for any $u \in X_+$, $v \in Y_+$.

It is clear from Lemma 9 that in the case $X = Y$ the new sense of disjunction coincides with the old. We observe also that if $g = 0$ then $f \mathrm{D} g$ for any $f \in \widetilde{X}$.

Lemma 14. *For any set $P \subset \widetilde{Y}$ the collection*

$$H = \{f : f \in \widetilde{X},\ f \mathrm{D} g \text{ for any } g \in P\}$$

is a band in $\widetilde{X}$.

---

1) We recall that the operator $A_{(u)}$ preserves bounds.

Proof. Let N stand for the disjoint complement of the set of all functionals $g_{(v)}$, with $g \in P$ and $v \in Y_+$, in the K-space $\widetilde{M}$. Then N is a band in $\widetilde{M}$. But

$$H = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(N),$$

and so H is a band in $\widetilde{X}$.

Lemma 15. *If $f \in \widetilde{X}$ and $g \in \widetilde{M}$, then the relation $f \mathrm{D} g$ is equivalent to the condition that $f_{(u)} \mathrm{d} g$ for any $u \in X_+$.*

Proof. If $f \mathrm{D} g$ then $f_{(u)} \mathrm{d} g_{(u)}$ for any $u \in X_+$, $v \in M_+$. In particular, taking $v = 1$, we obtain $g_{(v)} = g$ and so $f_{(u)} \mathrm{d} g$.

On the other hand, suppose that $f_{(u)} \mathrm{d} g$ for any $u \in X_+$. If $v \in M_+$ then $v \leq C1$ for some C, and then $|g_{(v)}| = |g|_{(v)} \leq C|g|$. Consequently

$$|f_{(u)}| \wedge |g_{(v)}| \leqslant |f_{(u)}| \wedge C|g| = 0.$$

Lemma 16. Let $P \subset \widetilde{X}$ *and let H be a band in $\widetilde{X}$ generated by the set P. Then the set*

$$L = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(P)$$

generates the band $B(H)$ in $B(\widetilde{X})$.

Proof. Let W stand for the band in $B(\widetilde{X})$ generated by the set L. Then $W \subset B(H)$. It is evident from the proof of Lemma 12 that

$$B^{-1}(W) = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(W),$$

and so $P \subset B^{-1}(W)$. It follows at once from this that $H \subset B^{-1}(W)$ or $B(H) \subset W$, and so $W = B(H)$.

4. We now proceed to the fundamental theorem on the realization of spaces of regular functionals. As before, Z is an extended K-space, X and Y any normal subspaces in it, and M the subspace of bounded elements. In the K-spaces $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ and $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ we fix units 1_1 and 1_2 (respectively).

Theorem 3.1. *There is a unique pair (R_X, V_X), where V_X is a band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and R_X is an isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ onto V_X, satisfying the following conditions:*

1) *For any $f \in \widetilde{X}$ and $g \in \widetilde{M}$ the relations $f \mathrm{D} g$ and $R_X f \mathrm{d} g$ are equivalent.*

2) $R_X(1_1) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_2$.

We shall call the operator R_X the canonical realization of the space X.

Proof. We show that the conditions required are satisfied by the pair (R_X, V_X) in Lemma 13. Only verification of Condition 1) is needed.

Let $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{M}$, let H be the band in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ generated by the functional f, and let $H_1 = H \cap \widetilde{X}$. It follows from Lemma 14 that the relationships $f \mathrm{D} g$ and $H_1 \mathrm{D} g$[1])

1) This means that $h \mathrm{D} g$ for any $h \in H_1$.

are equivalent. The latter is equivalent, according to Lemma 15, to the condition that $h_{(u)} \mathrm{d} g$ for any $h \in H_1$ and $u \in X_+$; that is, to the condition that $B(H_1)\mathrm{d} g$. This is in turn equivalent to the relation $R_X(H)\mathrm{d} g$ according to Lemma 13. But since R_X is an isomorphism, $R_X(H)$ is a band in V_X generated by the functional $R_X f$.

We now show that the pair required is unique. Let (R'_X, V'_X) be a second pair satisfying the conditions of the theorem; H and H_1 have the original meanings. Then the relations $R_X f \mathrm{d} g$ and $R'_X f \mathrm{d} g\,(f \in \widetilde{X},\ g \in \widetilde{M})$ are equivalent, and so the sets $R_X(H_1)$ and $R'_X(H_1)$ generate the same band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$; that is, $R_X(H) = R'_X(H)$ for any band H in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$. In particular $V'_X = R'_X(\mathfrak{M}(\widetilde{X})) = R_X(\mathfrak{M}(\widetilde{X})) = V_X$. In addition, $R'_X(H) \cap B(\widetilde{X}) = B(H \cap \widetilde{X})$ since R_X has this property (see Lemma 13), and then the uniqueness of R_X follows from Lemma 13.

Theorem 3.2. *Let $f \in \widetilde{X}$. Then the band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ generated by the element $R_X f$ coincides with the band generated by the set F of all functionals $f_{(u)}$ $(u \in X_+)$.*

Proof. It follows from Theorem 3.1 and Lemma 15 that the relations $f_{(u)}\mathrm{d} g$ for every $u \in X_+$ and $R_X f \mathrm{d} g\,(g \in \widetilde{M})$ are equivalent. It follows at once from this that the disjoint complement in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ to the functional $R_X f$ corresponds to that for the set F, and so the bands mentioned in the theorem also coincide.

Theorem 3.3. *If $f \in \widetilde{X}$ and $g \in \widetilde{Y}$, then the relations $f \mathrm{D} g$ and $R_X f \mathrm{d} R_Y g$ are equivalent.*

Proof. By definition the relation $f \mathrm{D} g$ is equivalent to the condition that $f_{(u)}\mathrm{d} g_{(v)}$ for any $u \in X_+$ and $v \in Y_+$. By Theorem 3.2 the latter relation is equivalent to the disjointness of the functionals $R_X f$ and $R_Y g$.[1)]

Thus if we take different normal subspaces of a K-space Z, we can imbed their associated spaces in a K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, and do this in such a way that functionals disjoint in the generalized sense (D) go over in the imbedding to functionals disjoint in the usual sense.

We prove a further theorem after imposing some further restrictions on X and Y.

Theorem 3.4. *Let X ba a KN-space, Y a normal subspace with the norm induced by that of X, and let a unit 1_1 be chosen in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$. Then we can choose a unit $\mathbf{1}_2$ in $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$ in such a way that the following conditions are valid in the canonical realization of the spaces $\widetilde{X}$ and $\widetilde{Y}$:*

1) *$R_Y(Y^*)$ is a band in $R_X(X^*)$.*

2) *If $f \in X^*$ and $\phi = f|_Y$, then $R_Y \phi$ is the projection of the element $R_X f$ onto $R_Y(Y^*)$.*

Proof. *Using the notation introduced at the beginning of the subsection, we consider the set* $X^*_Y = \{f : f \in X^*,\ f|_Y = 0\}$. We put $U = (X^*)^{\mathrm{d}}$ and consider $\mathfrak{M}(X^*)$ (or $\mathfrak{M}(Y^*)$) as a band in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ (respectively, in $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$) and $\mathfrak{M}(X^*_Y)$ and $\mathfrak{M}(U)$ as bands

1) Since the disjointness of two sets is equivalent to the disjointness of the bands they generate.

in $\mathfrak{M}(X^*)$. The map T introduced in Lemma 4 will be considered as extended by isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(U)$ to the K-space $\mathfrak{M}(Y^*)$. We choose the unit 1 in $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$ in such a way that

$$\Pr_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2 = T(\Pr_{\mathfrak{M}(U)} 1_1). \tag{8}$$

We show that

$$R_X T^{-1} = R_Y|_{\mathfrak{M}(Y^*)}. \tag{9}$$

Let $f \in Y^*$ and $g \in \widetilde{M}$. Then

$$\text{the relations } g \,\mathrm{d}\, R_X T^{-1} f \text{ and } g \,\mathrm{d}\, R_Y f \text{ are equivalent.} \tag{10}$$

For, by Theorem 3.2 the first of these is equivalent to the relation

$$g \,\mathrm{d}\, (T^{-1}f)_{(u)} \quad \text{for any} \quad u \in X_+, \tag{11}$$

and the second to

$$g \,\mathrm{d}\, f_{(v)} \quad \text{for any} \quad v \in Y_+. \tag{12}$$

It is easy to see that if $T^{-1}f \geq 0$ then $T^{-1}f$ is the minimal extension of the functional f from Y to X.[1] Consequently Lemma 11 applies and the sets of functionals $\{(T^{-1}f)_{(u)}\}$ $(u \in X_+)$ and $\{f_{(v)}\}$ $(v \in Y_+)$ generate one and the same band in $\widetilde{M}$. Consequently the relations (11) and (12) are equivalent, and (10) is proved.

It is clear from (10) that $R_X T^{-1}(H) = R_Y(H)$ for any band $H \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}(Y^*))$. In particular,

$$R_X T^{-1}(\mathfrak{M}(Y^*)) = R_Y(\mathfrak{M}(Y^*)). \tag{13}$$

Furthermore, it follows from (8) that

$$R_X T^{-1}(\Pr_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2) = R_X(\Pr_{\mathfrak{M}(U)} 1_1).$$

Consequently this is the unit element in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, and therefore by (13) it coincides with $R_Y(\Pr_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2)$. (9) follows from all of this.[2]

Further, we have $R_Y(Y^*) = R_X T^{-1}(Y^*) = R_X(U)$, and so $R_Y(Y^*)$ is a band in $R_X(X^*)$.

Now let $f \in X^*$ and $\phi = f|_Y$. Put $\psi = f - T^{-1}\phi$. Then $\psi \in X_Y^*$ and

$$R_X f = R_X T^{-1}\varphi + R_X \psi = R_Y \varphi + R_X \psi.$$

But $R_X \psi \,\mathrm{d}\, R_X U = R_Y(Y^*)$, and so $R_Y \phi$ is the projection of the functional $R_X f$ onto $R_Y(Y^*)$.

1) It is clear that the minimal extension of a (b)-linear functional is (b)-linear, and $T^{-1}f$ is defined uniquely.

2) If A and B are two isomorphic maps of the extended K-space E_1 to the extended K-space E_2, and $A(H) = B(H)$ for any band H in E_1 and $A(1_{E_1}) = B(1_{E_1})$, then $A = B$.

Remark. Under the conditions of Theorem 3.4 $R_Y(\widetilde{Y})$ is not necessarily a band in $R_X(\widetilde{X})$ for any choice of unit. It is enough to take $X = L[0, 1]$ and $Y = M[0, 1]$.

Received 20 MAY 1969.

BIBLIOGRAPHY

[1] N. Bourbaki, Livre VI: *Intégration.* Chapitres I–IV, Actualités Sci. Indust., no. 1175, Hermann, Paris, 1952; Russian transl., "Nauka", Moscow, 1967. MR 14, 960; 36 #6572.

[2] B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; 37 #121.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators.* I: *General theory*, Pure and Appl. Math., vol. 7, Interscience, New York, 1958; Russian transl., IL, Moscow, 1962. MR 22 #8302.

[4] J. Dixmier, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*, Summa Brasil. Math. 2 (1951), 151–182. MR 14, 69.

[5] K. Yosida, *On the theory of spectra*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 378–383. MR 2, 225.

[6] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 523–537. MR 2, 318.

[7] L. V. Kantorovič, B. Z. Vulih and A. G. Pinsker, *Functional analysis in partially ordered spaces*, GITTL, Moscow, 1950. (Russian) MR 12, 340.

[8] J. L. Kelley, *Measures on Boolean algebras*, Pacific J. Math. 9 (1959), 1165–1177. MR 21 #7286.

[9] ———, *Decomposition and representation theorems in measure theory*, Math. Ann. 163 (1966), 89–94. MR 32 #7694.

[10] G. Ja. Lozanovskiĭ, *Calderón's Banach structures*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 172 (1967), 1018–1020 = Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 224–227. MR 34 #8155.

[11] ———, *On the representation of spaces of regular functionals and some applications*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 188 (1969), 522–524 = Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 1149–1152. MR 40 #4731.

[12] N. M. Rice, *Multiplication in vector lattices*, Canad. J. Math. 20 (1968), 1136–1149. MR 37 #6732.

[13] I. E. Segal, *Equivalences of measure spaces*, Amer. J. Math. 73 (1951), 275–313. MR 12, 809.

[14] R. Sikorski, *Boolean algebras*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 25, Springer-Verlag, New York, 1960; 2nd ed., 1964; Russian transl., "Mir", Moscow, 1969. MR 23 #A3689; 31 #2178.

[15] J. T. Schwartz, *A note on the space L_p^**, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 270–275. MR 12, 718.

Translated by:
J. L. B. Cooper

Mat. Sbornik
Tom 84 (126) (1971), No. 3

Math. USSR Sbornik
Vol. 13 (1971), No. 3

ON A CLASS OF OPERATORS IN VON NEUMANN ALGEBRAS WITH SEGAL MEASURE ON THE PROJECTORS

M. G. SONIS

Abstract. By means of the concept of Segal measure, defined on projectors (and thus on subspaces associated with a von Neumann algebra) we introduce the concept of relative compactness of sets and, on this basis, the concept of operators completely continuous with respect to the von Neumann algebra and the Segal measure. The article is concerned with the formal structure of the theory of this class of operators: the general theorem of Calkin is obtained on the uniqueness of the ideal with respect to completely continuous operators; a theory is constructed for perturbations of Hermitian operators with respect to completely continuous ones; singular and characteristic numbers are introduced for operators from the von Neumann algebra and their minimax properties are derived; some characterizations are introduced in terms of completely continuous operators.

Bibliography: 10 items.

Suppose $\mathfrak{A}$ is a von Neumann algebra, i.e. a weakly closed selfadjoint algebra of bounded operators in Hilbert space $\mathfrak{H}$ containing the identity operator I. For the special case of von Neumann factors—von Neumann algebras whose center consists only of scalar operators—Murray and von Neumann [1], [2] introduced the concept of relative dimension of projectors from the factors.

Segal [3] introduced into consideration general von Neumann algebras, on the projectors of which are given a nonnegative measure having a great many of the properties of the relative dimension in the factors.

The aim of this article is to study a class of operators from the algebra $\mathfrak{A}$ with Segal measure, which is analogous to the class of all completely continuous operators in Hilbert space. Since the concept of a completely continuous operator is essentially based upon the ideas of dimension, the presence in the algebra $\mathfrak{A}$ of a nonnegative Segal measure permits us to use classical methods, well known in the theory of completely continuous operators. Corresponding to this we introduce the notion of the relative compactness of sets from $\mathfrak{H}$ and on it the basic concept of an operator completely continuous relative to a von Neumann algebra with a Segal measure.

AMS 1970 *subject classifications*. Primary 47C15.

Mat. Sbornik
Tom 84 (126) (1971), No. 3

Math. USSR Sbornik
Vol. 13 (1971), No. 3

ON THE REPRESENTATION OF COMPLETELY LINEAR AND REGULAR FUNCTIONALS IN PARTIALLY ORDERED SPACES

B. Z. VULIH AND G. Ja. LOZANOVSKIĬ

UDC 519.56

Abstract. In the first two sections the representation of completely linear functionals in K-spaces and the connection between completely linear functionals and measures on bases in a K-space is studied. In §3 a realization of spaces of regular functionals is established.

Bibliography: 15 titles.

The contents of this article fall into two parts, corresponding to the section headings. The first (§§1 and 2) deals with completely linear functionals and gives the representation of the functionals by using products of elements in partially ordered spaces; some of the results here generalize and complete results already known. The second part (§3) deals with regular functionals. As far as we know the problem of representing arbitrary regular functionals has not been considered in the literature up to now.[1)]

§1. Measures generated by completely linear functionals

It is known that there is a close connection between completely linear functionals in a K-space[2)] and measures on the Boolean algebra of its bands: any completely linear functional is the integral with respect to some measure, and conversely, one can construct a completely linear functional corresponding to a measure. This approach to completely linear functionals can be found in the work of numerous authors, but it is difficult to find an article or book in which the study of completely linear functionals has been carried out sufficiently clearly from this point of view. We shall therefore devote the first section of this article to systematizing the concepts concerning completely linear functionals and measures that are used in the sequel. We note that although all the material set out in this section (and to some extent also in §2) was to a significant extent prepared in the book [7], which appeared about twenty years ago, the

AMS 1970 *subject classifications.* Primary 46A40.

1) The results of §3 are all due to G. Ja. Lozanovskiĭ and were published in [11] without proofs.

2) We use the terminology from the theory of partially ordered spaces employed in the book [2]. (*Translator's note: the terminology used in the translation is that of the translation of this book; note however that* K-spaces (K_σ-spaces) are usually called Dedekind complete (σ-complete) *Riesz spaces in the translation*).

results given below do not appear there.

Throughout this article we mean by measure a nonnegative countably additive function with values in the extended real line.[1]

1. Let X be a K-space, and let Z be a maximal extension of it; let a unit 1 be chosen in Z, let $\mathfrak{E}$ be the base (that is, the set of unit elements) in Z, let $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} \cap X$. As is well known, $\mathfrak{E}$ is a complete Boolean algebra, and $\mathfrak{E}'$ coincides with $\mathfrak{E}$ if $1 \in X$, and if $\mathfrak{E}' \neq \mathfrak{E}$ then $\mathfrak{E}$ is not a Boolean algebra but $\mathfrak{E}'$ is an ideal in $\mathfrak{E}$.[2]

We consider a positive completely linear functional f given on X. The restriction of f to $\mathfrak{E}'$ ($f|_{\mathfrak{E}'}$), which we denote by ϕ, is a countably additive function with finite nonnegative values. Since the functional f has a band of essential positiveness ([2], Theorem VIII. 4.1), $\mathfrak{E}'$ splits into the direct sum of two ideals $\mathfrak{E}_1'$ and $\mathfrak{E}_2'$ such that $\phi(e) > 0$ for any $e > 0$ in $\mathfrak{E}_1'$ and $\phi(e) \equiv 0$ on $\mathfrak{E}_2'$.

We extend the function ϕ to the whole of the algebra $\mathfrak{E}$ by defining it for all $e \in \mathfrak{E}$ by

$$\varphi(e) = \sup_{e' \in \mathfrak{E}', e' \leqslant e} \varphi(e'). \tag{1}$$

It is easily seen that ϕ remains countably additive after extension, but that it can now take $+\infty$ as a value.

We shall call this function the measure on $\mathfrak{E}$ generated by f.

The measure ϕ is semicontinuous on all of the algebra $\mathfrak{E}$: if $e_\alpha \uparrow e$ is a directed set, then $\phi(e_\alpha) \to \phi(e)$. The semicontinuity of ϕ on $\mathfrak{E}'$ is a consequence of the complete linearity of f, and it is easy to verify from this that ϕ is semicontinuous on $\mathfrak{E}$. For finite measures semicontinuity is equivalent to continuity: if $e_\alpha \downarrow 0$ then $\phi(e_\alpha) \to 0$. It is clear that the continuation of ϕ from $\mathfrak{E}'$ to $\mathfrak{E}$ according to the formula (1) is the only continuation that preserves its semicontinuity.[3]

Not every measure on $\mathfrak{E}$ is generated by a completely linear functional. The function ϕ constructed by us has the following important property: if $\phi(e) = +\infty$ for some $e \in \mathfrak{E}$, then there is an $e' < e$, $e' \in \mathfrak{E}$, for which $0 < \phi(e') < +\infty$. Any measure on $\mathfrak{E}$ with this property will be called locally finite. It is clear that if ϕ is a locally finite measure on $\mathfrak{E}$, then the set $\mathfrak{E}_\phi^* = \{e: e \in \mathfrak{E}, \phi(e) < +\infty\}$ is an ideal, complete in $\mathfrak{E}$.

Theorem 1.1. *Let a locally finite semicontinuous measure be given on $\mathfrak{E}$. Then there is a foundation X_ϕ in the space Z on which a positive completely linear functional f that generates the measure ϕ is defined.*

Proof. For any $x \in Z_+$ we put

1) Of the numerous articles on measures on Boolean algebras, the ones closest to this article are, for example, the articles by Kelley [8], [9]. However, the connection between measures and the theory of semiordered spaces is scarcely touched in these articles.

2) We note that $\mathfrak{E}'$ is complete in $\mathfrak{E}$ in the sense that if $e \in \mathfrak{E}$ and $e d \mathfrak{E}'$ then $e = 0$ (d stands for disjunction).

3) A problem close to this, that of extending a generalized additive norm to K-spaces, has been considered by A. G. Pinsker. See [7] (Chapter XI, 3.1).

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\varphi(e_\lambda^x),$$

where e_λ^x is the characteristic of the element x,1) and we then put

$$X_\varphi = \{x:\ x \in Z, f(|x|) < +\infty\}.$$

It is easy to see that X_ϕ is a normal subspace of Z; since $f(e) = \phi(e)$ for $e \in \mathfrak{E}$, we have $\mathfrak{E}_\phi^* \subset X_\phi$ and so X_ϕ is a foundation in Z. The functional f can be continued by additivity to all of X_ϕ: $f(x) = f(x_+) - f(x_-)$.

Let us write 1 as $1 = Se_\xi$, where $e_\xi \in \mathfrak{E}_\phi^*$, and let X_ξ be the band in X_ϕ generated by e_ξ. In [7] (Chapter VIII, 1.32) it is shown that the functional f is linear on X_ξ. It can be shown similarly that f is also completely linear on each of the X_ξ. We shall verify that it is completely linear on X_ϕ.

Let $x_\alpha \downarrow 0$ in X_ϕ. We can suppose without loss of generality that $x_\alpha \le y \in X_\phi$. We put $y_\xi = y \wedge e_\xi$. It is easy to show that there is an at most countable set of the indices ξ, say (ξ_n), for which $f(y_{\xi_n}) > 0$. Further, from the identities

$$f(x_\alpha) = \sum_n f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}), \quad f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}) \downarrow 0 \quad \text{for each} \quad n,$$

$$\sum_n f(y_{\xi_n}) = f(y) < +\infty, \quad f(x_\alpha \wedge e_{\xi_n}) \leqslant f(y_{\xi_n})$$

it is easy to see that $f(x_\alpha) \longrightarrow 0$.

If we now construct the measure generated by f then it is clear from the semicontinuity of ϕ that the extension of $\phi|_{\mathfrak{E}_\phi^*}$ from $\mathfrak{E}_\phi^* = \mathfrak{E} \cap X_\phi$ to $\mathfrak{E}$ according to formula (1) gives the function ϕ on $\mathfrak{E}$ with which we started. This proves the theorem.

As before, let X be an arbitrary foundation in Z, and let us suppose that there is a sufficient set of completely linear functionals on X. We shall discuss what one can say about the base $\mathfrak{E}$ of the K-space Z in this case.

Lemma 1. *If there is a sufficient set of completely linear functionals on X, then X has a foundation Y on which there is defined an essentially positive completely linear functional.*2)

Proof. Let X be split into a complete set of mutually disjoint bands X_ξ $(\xi \in \Xi)$, on each of which there is an essentially positive completely linear functional f_ξ. For Y take the smallest foundation in X that contains all the X_ξ. Y then consists of all elements of the form $y = \Sigma_{n=1}^k x_n$ with $x_n \in X_{\xi_n}$. If we require that $\xi_n \neq \xi_p$ if $n \neq p$, then the representation of y is unique. Putting $f(y) = \Sigma_{n=1}^k f_{\xi_n}(x_n)$ we get an essentially positive completely linear functional on Y.

Theorem 1.2. *In order that there be a foundation in a K-space X with a sufficient set of completely linear functionals it is necessary and sufficient that a locally finite*

1) See [2], Chapter VIII, §10, or [7], Chapter VIII, §1.

2) A functional f is essentially positive on Y if $f(y) > 0$ for each $y > 0$.

essentially positive measure should exist on the base $\mathfrak{E}$ *of the K-space* Z.

Proof. a) Necessity. We can suppose without loss of generality that there is an essentially positive completely linear functional on X.[1] The measure generated on $\mathfrak{E}$ by this functional has the properties stated.

b) Sufficiency. Let μ be an essentially positive locally finite measure on $\mathfrak{E}$ and let $\mathfrak{E}^*_\mu$ be the ideal on which it is finite. It follows from the countable additivity of μ that it is continuous on $\mathfrak{E}^*_\mu$ (and consequently is semicontinuous). Let us extend the restriction $\mu|_{\mathfrak{E}^*_\mu}$ to all the algebra $\mathfrak{E}$ by means of formula (1). We obtain a semicontinuous locally finite measure ϕ.[2] Then by Theorem 1.1 there is a foundation Y in Z on which an essentially positive completely linear functional is defined, and the meet $X \cap Y$ is a foundation in X with the same property.

Using a theorem of A. G. Pinsker ([7], Chapter XI, 1.32) it follows at once from Theorem 1.2 and Lemma 1.1 that *the existence on the base of* Z *of a locally finite essentially positive measure is equivalent to the property that* Z *contains a foundation forming a KB-space with an additive norm.*

Theorems 1.1 and 1.2 can be carried over to the case in which X is a K_σ-space, imbedded in a K_σ-space with a unit and so possessing a maximal extension.

2. We realize the base $\mathfrak{E}$ of the K-space Z in the form of the algebra of open-closed sets of an extremally disconnected bicompact space Q.[3] Then the measure ϕ defined on $\mathfrak{E}$ can be carried over to the set of open-closed sets in Q. This collection of sets will also be denoted by $\mathfrak{E}$. If we regard $\mathfrak{E}$ as an algebra of subsets of Q, then it is not a σ-algebra since the union of an infinite set of open-closed sets is not necessarily open-closed. We extend the domain of definition of ϕ so that it becomes a σ-algebra of subsets of Q. For this we consider the set $\mathfrak{B}$ of all sets in Q that are of the form

$$B = E \,\Delta\, N = (E\setminus N) \cup (N\setminus E),$$

where $E \in \mathfrak{E}$ and N is a set of first category in Q. It can be verified by elementary arguments that $\mathfrak{B}$ is a σ-algebra and contains all the Borel sets in Q.[4] We call $\mathfrak{B}$ the canonical σ-algebra of Q. Note that E and N are uniquely defined for each $B \in \mathfrak{B}$.

Let a measure ϕ be given on the algebra $\mathfrak{E}$. We put $\phi(B) = \phi(E)$ for any $B \in \mathfrak{B}$, so extending ϕ to the entire σ-algebra $\mathfrak{B}$ while preserving countable additivity. If $B \in \mathfrak{B}$ is of the first category then $\phi(B) = 0$. The extension of ϕ to the σ-algebra $\mathfrak{B}$ will be called canonical.

1) It is important here that any foundation in X is also a foundation in Z.

2) In fact we can show that the original measure μ is itself semicontinuous (and thus that $\phi = \mu$). For this we use Theorem VI.1.1. in [2] and the fact that a Boolean algebra is of countable type for a strictly positive finite measure.

3) If Z is an extended K_σ-space, $\mathfrak{E}$ is realized on a quasi-extremally disconnected bicompact space.

4) The σ-algebra $\mathfrak{B}$ was considered by K. Yosida [5]. The Borel sets are contained in $\mathfrak{B}$ because a closed set differs from its open-closed kernel only by a nowhere dense set.

We now consider the space $S(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ (or, for brevity, $S(Q)$) of measurable functions defined and everywhere finite on Q. We identify equivalent functions, as usual. The measure ϕ will be supposed locally finite and essentially positive on the base $\mathfrak{S}$. In this case the space $S(Q)$ coincides with $C_\infty(Q)$[1] in the sense that

1) each function in $C_\infty(Q)$ is in $S(Q)$;

2) distinct functions in $C_\infty(Q)$ are not equivalent;

3) each function in $S(Q)$ is equivalent to some function in $C_\infty(Q)$.

We give one of the possible variants of the proof of this assertion. Any closed set is in $\mathfrak{B}$. It is then clear that any continuous function on Q is measurable, and if it is in $C_\infty(Q)$ then it is almost everywhere finite. If two continuous functions are not equal everywhere on Q, then they differ on some nonempty open set, which will have finite measure because of the essential positiveness of the function ϕ. The two functions are thus not equivalent and the space $C_\infty(Q)$ is imbedded in a natural manner in $S(Q)$.

On the other hand, $S(Q)$ is known to be an extended K_σ-space (with the natural ordering),[2] and its base consists of characteristic functions of measurable sets and so is isomorphic to the algebra $\mathfrak{S}$, that is, to the base of the K-space $C_\infty(Q)$. It follows from the completeness of the base $\mathfrak{S}$ that $S(Q)$ is also a K-space ([2], Theorem V. 4.3). From this it is evident, because of the Corollary to Theorem V. 4.1 in [2], that when $C_\infty(Q)$ is imbedded in $S(Q)$ the image of $C_\infty(Q)$ fills all of $S(Q)$, and this means that each function in $S(Q)$ is equivalent to some function in $C_\infty(Q)$.

The last assertion can be proved directly without using the properties of extended K-spaces.[3]

We note further that under our conditions the bicompact Q has the following property: any subset of first category in it is nowhere dense.[4]

The realization of the extended K-space Z in the form $S(Q)$ allows one to make the arguments connected with the use of integrals more perspicuous. We go back to Theorem 1.1; let the measure ϕ satisfy the conditions laid down there and be essentially positive. The integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\phi(e_\lambda^x)$ coincides with the usual Lebesgue integral of the function $x(q)$ with respect to the measure ϕ; that is, with the functional f, constructed in the course of the proof of Theorem 1.1, which takes the form

$$f(x) = \int_Q x d\varphi, \tag{2}$$

and the space X_ϕ defined in the same place is none other than the space $L(Q, \phi)$ of

1) $C_\infty(Q)$ is the extended K-space consisting of functions continuous on Q and having finite values on nowhere dense sets ([2], Chapter V, §2).

2) The bounds of finite and countable sets of functions in $S(Q)$ are calculated pointwise.

3) Compare [1], French, p. 155, or [14], 1960 edition, p. 175.

4) See, for example, [4]. This result can also be deduced from the more general theorem of Z. T. Dikanova ([2], Lemma VI.6.1).

functions summable on Q for the measure ϕ. The complete linearity of the functional f is an obvious consequence of the properties of the integral.[1)]

If the measure ϕ, which is supposed given in Theorem 1.1, is not essentially positive, the algebra $\mathfrak{E}$ splits into two principal ideals $\mathfrak{E}_1$ and $\mathfrak{E}_2$ so that ϕ is essentially positive on $\mathfrak{E}_1$ and $\phi(e) \equiv 0$ on $\mathfrak{E}_2$.[2)] In the bicompact Q the principal ideal $\mathfrak{E}_1$ corresponds to the algebra of the open-closed sets contained in some open-closed $Q_1 \subset Q$. By the preceding results, the spaces $\mathrm{C}_\infty(Q_1)$ and $\mathrm{S}(Q_1)$ are isomorphic and the functional f is written in the form of an integral over the set Q_1, but keeps the form (2).

3. Let us consider the space $\mathrm{S}(T)$ of almost everywhere finite measurable functions defined on an arbitrary measure space $(T, \mathfrak{M}, \mu)$, where $\mathfrak{M}$ is a σ-algebra of measurable sets. As above, equivalent functions will be identified. The space $\mathrm{S}(T)$ with the obvious linearization and ordering is a K_σ-space. Under the conditions of the previous section this space is also a K-space, but in general it is not. We given an example.

Let T be an interval on the real line, $\mathfrak{M}$ the σ-algebra of Borel sets, and for any $E \in \mathfrak{M}$ let the measure μE be the number of points in E if this is finite and let $\mu E = +\infty$ if E is an infinite set. The measurable functions on T are the same as the Baire functions; and since $\mu E = 0$ only if E is empty, $\mathrm{S}(T)$ consists of all the finite Baire functions, with no identification of distinct functions. But it is well known that the Baire functions do not form a K-space ([2], p. 80 (Russian p. 95)).

Coming back to the general case, we give some sufficient conditions in order that $\mathrm{S}(T)$ should be a K-space. The simplest sufficient condition for this is the finiteness of the measure μ.

For, the base of the space $\mathrm{S}(T)$ (if the function $x(q) \equiv 1$ is taken as the unit) consists of the characteristic functions of measurable sets. The usual arguments show that this base is of countable type if μ is finite. Then by Theorem VI.1.1 in [2] it is complete and by Theorem V.4.3 in [2] $\mathrm{S}(T)$ is a K-space and is also of countable type.

A more general sufficient condition for $\mathrm{S}(T)$ to be a K-space is that the measure μ be σ-finite.[3)] Indeed, in this case the space T is the sum of a countable set of mutually disjoint measurable sets T_n with finite measure. By what has been proved already, each of the spaces $\mathrm{S}(T_n)$ is a K-space of countable type, and so $\mathrm{S}(T)$, their union, is also a K-space of countable type.

It is easy to show that if a measure μ on T is locally finite then the condition that it be σ-finite is also necessary in order that $\mathrm{S}(T)$ be a K-space of countable type. However, if the measure is not σ-finite, $\mathrm{S}(T)$ can nevertheless be a K-space, although

---

1) We observe in passing that our arguments lead to a very simple method of proving the well-known theorem of Kakutani on the realization of abstract L-spaces [6].

2) A principal ideal is an ideal that contains a maximal element.

3) This result is proved, for instance, in [3] (English p. 335). We also observe that a σ-finite measure can always be replaced by a finite measure without changing the σ-algebra of measurable sets.

not of countable type. For example consider an arbitrary uncountable set T and for $\mathfrak{M}$ take the σ-algebra of all its subsets, and let the measure be defined as in the example of the Baire functions. Then $S(T)$ consists of all the real everywhere finite functions on T, and it is a K-space; its measure is locally finite but *is not σ-finite*.

4. It is known that the structure of the space $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ plays an essential part in the study of the Radon-Nikodým Theorem. We make some remarks in this connection. Let $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ be an arbitrary measure space and let a second measure ν be defined on the σ-algebra $\mathfrak{M}$. As usual, ν will be called absolutely continuous with respect to μ if $\mu E = 0$ $(E \in \mathfrak{M})$ implies that $\nu E = 0$. It is well known that if the measure μ is not subjected to some restriction then the Radon-Nikodým Theorem is false. We give without proof a theorem established essentially by Segal [13] (see also [9] and [12]), in which one is considering a so-called local Radon-Nikodým Theorem.

Theorem 1.3. *In order that for any measure ν that is absolutely continuous with respect to μ there should exist a unique (up to equivalence with respect to the measure μ) measurable nonnegative function f such that*

$$\nu E = \int_E f d\mu \tag{3}$$

for any E with $\mu E < +\infty$, it is necessary and sufficient that

1) *μ be locally finite;*

2) *the aggregate $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ form a K-space.*

It is not required in this that the function f should be everywhere finite.

We observe that one cannot leave out the local character of the Radon-Nikodým Theorem in Theorem 1.3; that is, one cannot guarantee that if conditions 1)–2) hold then the equation (3) will hold for any $E \in \mathfrak{M}$.[1] However, if Theorem 1.3 is formulated for finite measures ν, the problem is considerable more complicated. If the conditions 1)–2) imply the validity of the Radon-Nikodým Theorem to the fullest extent, then the problem of Ulam concerning the existence of measurable cardinals has a negative answer. If there is a finite measure ν for which the conditions 1)–2) of the Radon-Nikodým Theorem hold only in the local form, then there is a K-space in which there exists an (o)-linear but not completely linear functional.

§2. The representation of completely linear functionals

1. We give first of all a general theorem on the representation of completely linear functionals in K-spaces.

Let X be a K-space with a sufficient set of completely linear functionals, let Z be its maximal extension, L a foundation in Z forming a KB-space with additive norm $\|\cdot\|$, and let $\Phi(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$ for any $x \in L$. Then Φ is an essentially positive

1) This can be confirmed by a simple example: let the measure μ be not σ-finite, and let $\nu E = 0$ if E is a set which is σ-finite for μ and $\nu E = +\infty$ otherwise.

completely linear functional on L.

We shall call the set $X' = \{x' : x' \in Z, xx' \in L \text{ for any } x \in X\}$ the dual set to X.1) It is clear that X' is a normal subspace in Z, and it will appear from what follows that X' is a foundation in Z. The following is easy to establish.

Theorem 2.1. *The general form of a completely linear functional in a K-space X is given by the formula*

$$f(x) = \Phi(xy), \tag{4}$$

where y is an arbitrary element in X' defined uniquely by f. The relation $f \to y$ so established between the adjoint space (in the sense of Nakano) $\overline{X}$ and the dual space X' is linear and a lattice isomorphism.

In the particular case of functionals bounded with respect to Φ (in which case y is a bounded element in Z), this theorem was proved by B. Z. Vulih (see [7], Chapter XI, 2.15). The general formulation was given without proof by G. Ja. Lozanovskiĭ in [10], and it is not difficult to deduce it from the theorem for bounded functionals.2) Another proof of Theorem 2.1 was given by N. M. Rice [12]. We shall not give the proof here and go on to consider problems connected with this theorem.

We remark that the place of Φ in Theorem 2.1 can be taken by any essentially positive linear functional defined on some foundation Y in Z. On continuing it from Y to any extension that forms a KB-space with additive norm ([7], Chapter XI, 1.32) we obtain the space L used in defining the dual space. It is now clear that Theorem 2.1 can be given another form, if we use the integral representation of completely linear functionals.

Theorem 2.2. *Let Q be an extremally disconnected bicompact, and let there be given a locally finite essentially positive measure ϕ on its base (that is, the set of open-closed sets) and let it be continued canonically to the canonical σ-algebra $\mathfrak{B}$. Let $\mathrm{L}(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ be the subspace of $\mathrm{S}(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ consisting of all summable functions, let X be a foundation in $\mathrm{S}(Q)$ and let X' consist of all $y \in \mathrm{S}(Q)$ for which $xy \in L$ for any $x \in X$. Then the formula*

$$f(x) = \int_Q xy\,d\varphi,$$

with $y \in X'$ gives the general form of completely linear functionals on X.

The Radon-Nikodým Theorem for measures on an extremally disconnected bicompact Q can be deduced from Theorem 2.1. Let $H(Q)$ denote the set of all units in the K-space $\mathrm{C}_\infty(Q)$; that is, those elements $h \in \mathrm{C}_\infty^+(Q)$ for which $h \wedge x > 0$ for any $x > 0$ in $\mathrm{C}_\infty(Q)$.

Theorem 2.3. *Let two essentially positive locally finite measures ϕ and ψ be*

1) The product used here is known to exist for any two elements in Z. We suppose that a unit 1 has been singled out in Z.

2) A proof of this sort can be found in the dissertation of G. Ja. Lozanovskiĭ defended at Leningrad University in 1965. The transition to the general case was mentioned in essence in [7] (Chapter XI, 2.31).

given on Q. There there is an $h \in H(Q)$ such that for any set $B \in \mathfrak{B}$

$$\psi(B) = \int_B h d\varphi. \tag{5}$$

Conversely, if ϕ is an essentially positive locally finite measure and $h \in H(Q)$ then the function ψ defined by (5) is a locally finite essentially positive measure.

Proof. The second part of the theorem is obvious. We prove the first part. To do this we construct a completely linear functional f, acting on some foundation $X \subset C_\infty(Q)$ according to Theorem 1.1, by means of the formula

$$f(x) = \int_Q x d\psi.$$

The functional f is essentially positive. According to Theorem 2.2 there is an $h \in S^+(Q, \mathfrak{B}, \phi)$ (we can suppose that $h \in C_\infty^+(Q)$) such that

$$f(x) = \int_Q xh d\varphi.$$

It follows from the essential positiveness of f that $h \in H(Q)$. Thus

$$\int_Q x d\psi = \int_Q xh d\varphi \quad \text{for any} \quad x \in X.$$

If $B \in \mathfrak{B}$ is such that the characteristic function $\chi_B \in X$, we get formula (5) immediately. There is no difficulty in extending the formula to an arbitrary $B \in \mathfrak{B}$.

2. Theorem 2.2 on the isomorphism of X' and $\overline{X}$ can be carried over to K-spaces consisting of measurable functions on an arbitrary measure space $(T, \mathfrak{M}, \mu)$. Let L denote the set of summable functions on T, and S_L the band in $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ generated by L. Let X be a normal subspace in S_L and S_X the band in S_L generated by the set X. We define the space X' dual to X:

$$X' = \{x' : x' \in S_X,\ xx' \in L \quad \text{for any} \quad x \in X\}.$$

If $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is a K-space, we can apply Theorem 2.1, taking for Φ the functional

$$\Phi(x) = \int_T \text{ where } (x \in L),$$

and then *the general form of a completely linear functional on X is given by a formula*

$$f(x) = \int_T xy d\mu, \quad \text{where} \quad y \in X'. \tag{6}$$

However, if $S(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is only a K_σ-space, the theorem is false even for $X = L$ as the following example (see also [15]) shows. We take the space of Baire functions on the interval $[a, b]$ considered in §1.3. For the measure introduced there on $[a, b]$ the space L consists of all functions differing from zero on a not more than countable set and such that $\Sigma_{t \in [a,b]} |x(t)| < +\infty$. It is easy to see that the dual space L' consists of all bounded Baire functions and the conjugate space $\overline{L}$ of all bounded real functions on $[a, b]$.[1]

1) Note that $L(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is always a KB-space with additive norm.

We show that the theorem concerning the representation of completely linear functionals remains valid when $\mathfrak{S}(T)$ is a K_σ-space under the additional condition that the conjugate space $\overline{X}$ be of countable type.

We call a K_σ-space X almost extended if every countable set of mutually disjoint elements $x_n \in X$ is bounded.[1]

It is clear that any band in $\mathfrak{S}(T)$ is an almost extended K_σ-space. However, such a band need not be extended: for example, in the space of Baire functions, the band consisting of all functions that are 0 on some fixed non-Borel set. We note also that any band of an almost extended K_σ-space is also an almost extended K_σ-space.

As a preliminary we prove a lemma that has independent interest.

Lemma 2. *Let X be an almost extended K_σ-space, Y its K-completion, and Z the maximal extension of Y; and we take it that $X \subset Y \subset Z$. If U is a foundation in Z forming a K-space of countable type then $U \subset X$.*

Proof. To begin with let us suppose that X is an extended K_σ-space, and let us take its unit 1 as unit in Y and Z. Then the base $\mathfrak{E}(Y) = \mathfrak{E}(Z)$ is the Dedekind completion of the base $\mathfrak{E}(X)$. We show that if $e \in \mathfrak{E}(Z) \cap U$ then $e \in \mathfrak{E}(X)$.

In any case, e can be represented in the form of the union $e = \mathfrak{S} e_\xi$, where $e_\xi \in \mathfrak{E}(X)$. Here all $e_\xi \in U$, and since U is of countable type there can be an at most countable set of elements different from zero among the e_ξ. But then $e \in X$, since X is an extended space and so $e \in \mathfrak{E}(X)$.

We consider the band X_e generated by the element $e \in \mathfrak{E}(X) \cap U$. The base of this band (that is, the principal ideal of the base $\mathfrak{E}(X)$ generated by e) is a σ-complete Boolean algebra of countable type, and hence it is complete ([2], Theorem VI.1.1), and so X_e is an extended K-space ([2], Theorem V.4.3*). Consequently $X_e = Z_e$, where Z_e is the band in Z generated by the element e. But then similarly $U_e \subset X_e \subset X$.

Let $\{e_\xi\}$ be a complete system of mutually disjoint unit elements contained in U, and U_ξ the band in U generated by e_ξ. Then each $U_\xi \subset X$. Any element $t \in U$ can be represented as a not more than countable combination $t = \mathfrak{S} t_n$, where each of the t_n is in one of the U_ξ and hence $t_n \in X$. But then we have also $t \in X$, since X is extended. Thus $U \subset X$.

We now go over to the case in which X is an almost extended K_σ-space without unit. We choose a complete system of pairwise disjoint elements $x_\xi > 0$ in X, and let X_ξ, Y_ξ and Z_ξ be bands in X, Y and Z respectively that are generated by x_ξ, and $U_\xi = Z_\xi \cap U$. Then Y_ξ is the K-completion of X_ξ and Z_ξ is the maximal extension of the space Y_ξ. By what has been proved already $U_\xi \subset X_\xi \subset X$. It can then be shown, as above, that $U \subset X$.

Remark. It is clear from the proof given that each principal band in X generated

1) This differs from the definition of an extended K_σ-space only in that it is not required that X contain a unit.

* *Translator's note.* A reference to Theorem V.5.2 may be intended.

by elements of U is an extended K-space. However, X itself need not be a K-space.

We note also the following obvious assertion, which is used in the sequel. Let X be a K_σ-space, Y its K-completion, Z the maximal extension of the space Y and U a foundation in X that is a K-space. Then U is a foundation in Y and Z, and Z is the maximal extension of U.

We return to the space of measurable functions on $(T, \mathfrak{M}, \mu)$. Again let X be a normal subspace in S_L (see the notation introduced at the beginning of subsection 2).

Theorem 2.4. *If $\widetilde{X}$ is a K-space of countable type, then formula* (6) *gives the general representation of a completely linear functional in X.*

Proof. All that we need in the proof is that each completely linear functional on X has a representation of the form (6).

Let Y be the K-completion of S_X, let Z be the maximal extension of Y and let W be a foundation in Z generated by the set X.1) Finally we put $L_X = L \cap S_X$. It is clear that W is the K-completion of the space X, and by the previous remark L_X is a foundation in Z and L_X is a KB-space with additive norm

$$\|x\| = \int_T |x|\, d\mu.$$

We put

$$\Phi(x) = \int_T x d\mu \quad (x \in L_X).$$

It is known that each completely linear functional in X can be extended in a unique manner to W with preservation of complete linearity. Thus the K-spaces $\widetilde{X}$ and $\widetilde{W}$ are isomorphic, and so $\widetilde{W}$ is a K-space of countable type.

Let us take as unit in Z *the supremum of the set of all characteristic functions in* S_X (this exists, since it can be reduced to a supremum of disjoint characteristic functions and the K-space Z is extended). We put

$$W' = \{w' : w' \in Z, ww' \in L_X \text{ for any } w \in W\}.$$

By Theorem 2.1 there is a natural linear and lattice isomorphism between W' and $\widetilde{W}$, and, in particular, W' is of countable type. Then $W' \subset S_X$ by Lemma 2.

We now take an arbitrary functional $f \in \widetilde{X}_+$. Let $\hat{f}$ be its completely linear extension to W. Then there is $y \in W'$ such that $\hat{f}(w) = \Phi(wy)$. In particular, for any $x \in X$ we have

$$f(x) = \Phi(xy) = \int_T xy d\mu,$$

and this proves the theorem.

Corollary 1. *If X is a K_σ-space with unit* 1 *then X' and $\widetilde{X}$ are isomorphic.*

---

1) This is the smallest foundation in which X can be imbedded. To show that there is such a foundation it is enough to form the intersection of all the foundations in Z that contain X. It is easy to see that $z \in W$ if and only if $z \in Z$ and there is an $x \in X$ such that $|z| \leq |x|$.

Proof. We show that $\overline{X}$ is of countable type. It is known that the functional $F(f) = f(1)$ is completely linear on X and is essentially positive, and then $\overline{X}$ is of countable type by Lemma IX.2.1 in [2].

Corollary 2. *If X is a (b)-reflexive (that is, reflexive in the Banach sense) KB-space, then X' and $\overline{X}$ are isomorphic.*

Proof. In this case $X^* = \overline{X}$, and by the Theorem of Ogasawara ([2], Theorem IX.7.4) X^* is a KB-space and hence is of countable type. Thus Theorem 2.4 is applicable.

The corollary just proved explains why the (b)-adjoint space for $\mathrm{L}^p(T, \mathfrak{M}, \mu)$ for $p > 1$ coincides with $\mathrm{L}^q(T, \mathfrak{M}, \mu)$ $(1/p + 1/q = 1)$ without any restriction on the space T. At the same time $\mathrm{L}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ in general is not (b)-reflexive and this manifests itself in the fact that $\overline{L}$ is not necessarily of countable type and L' need not be isomorphic to $\overline{L}$.

Since $\overline{X}$ is a K-space for any X, the supposition could arise that the isomorphism between $\overline{X}$ and X' holds whenever X' is a K-space. The following example shows that this is not the case.

Let an uncountable set T be partitioned into two disjoint uncountable sets A and B and let the σ-algebra $\mathfrak{M}$ consist of all subsets of T that are uncountable or have uncountable complements. Let μ be 1 for any one-point set in A and $+\infty$ for any one-point set in B, and for the other sets in $\mathfrak{M}$ let μ be defined by additivity. Then $\mathrm{S}(T, \mathfrak{M}, \mu)$ is only a K_σ-space.

For X we take the subspace L of summable functions. It is clear that L consists of functions whose support is not more than countable and is contained in A and whose values form a summable family. The band S_L consists of all the functions $x \in \mathrm{S}$ with supports contained in A. Thus if $x \in \mathrm{S}_L$, then $x(t) = 0$ on B and the support of x is not more than countable. It follows that S_L (and so L itself) is a K-space. The dual space L' consists of all bounded functions contained in S_L and is also a K-space. But the conjugate space $\overline{L}$ consists of all bounded functions defined on T and equal to 0 on B.

3. As an application of Theorem 2.2 we show that *in the K-space $\mathrm{S}(0, 1)$*[1] *there is a foundation X which has a sufficient set of regular functionals and no nontrivial completely linear functionals.*

For each point $t_0 \in (0, 1)$ let $\mathfrak{A}(t_0)$ stand for the set of all measurable sets in $(0, 1)$ for which t_0 is a point of density. Further, for any $x \in \mathrm{S}$ we put

$$p_{t_0}(x) = \inf_{A \in \mathfrak{A}(t_0)} \sup_{t \in A} |x(t)|.$$

It is easy to verify that p_{t_0} is a generalized monotonic seminorm in S (that is, it is a monotonic seminorm that can take the value $+\infty$). The system of seminorms $\{p_t\}$ $(t \in (0, 1))$ is total; if $p_t(x) = 0$ for all $t \in (0, 1)$ then $x = 0$. For, suppose that there

1) We take Lebesgue measure for the measure μ on $(0, 1)$.

is an $a > 0$ such that the set $H = \{t: |x(t)| \geq a\}$ has measure $\mu H > 0$. Then if t_0 is a point of density of H, $p_{t_0}(x) \geq a$.

Now let X stand for the set of all functions $x \in S$ for which $p_t(x) < +\infty$ for any $t \in (0, 1)$. Since X is a total system of monotonic seminorms, X has a sufficient set of regular functionals according to the Hahn-Banach Theorem. Let us suppose that there also exists a nontrivial completely linear functional f on X. According to Theorem 2.2 it has the form

$$f(x) = \int_0^1 xy d\mu,$$

with $y \neq 0$. There is an $a > 0$ such that $|y(t)| \geq a$ for some set E with $\mu E > 0$. But then all the functions in X have to be summable over the set E.

Let us choose any point of density t_0 in E and construct two sequences of numbers $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ that satisfy the following conditions:

1) $0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < t_0$;
2) $\lim a_n = \lim b_n = t_0$;
3) $\delta_n = \mu([a_n, b_n] \cap E) > 0$;
4) t_0 is a point of rarification of the set $B = \mathbf{U}_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

It is an elementary matter to verify that such sequences exist.

Further, we choose a positive number M_n such that $\Sigma_{n=1}^{\infty} M_n \delta_n = +\infty$, and define a function $x \in S$ putting

$$x(t) = \begin{cases} M_n, & \text{if } \quad a_n \leqslant t \leqslant b_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{for other} \quad t \in (0, 1). \end{cases}$$

It is clear that $p_t(x) < +\infty$ for any $t \neq t_0$. But since t_0 is a point of rarefaction of the set B, $p_{t_0}(x) = 0$. Thus $x \in X$. On the other hand,

$$\int_E x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a_n, b_n] \cap E} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \delta_n = +\infty,$$

which gives a contradiction.

§3. The realization of spaces of regular functionals

In the previous section it was shown that completely linear functionals on a K-space can be represented with the aid of elements of the maximal extension of the K-space. In order to represent arbitrary regular functionals it is suitable to use a "wider" K-space, but in this case it turns out that regular functionals defined on different normal subspaces of one and the same extended K-space can be represented in another extended K-space defined in a manner related to the first.

1. To begin with we establish some auxiliary propositions.

Let X be a K-space, Y a normal subspace of X, and on Y let a positive additive functional f be given. For any $x \in X_+$ we put

$$g(x)=\sup\{f(y):0\leqslant y\leqslant x,\ y\in Y\}. \tag{7}$$

It is clear that if $g(x)<+\infty$ for any $x\in X_+$ then g has the property of additivity on X_+ and so can be extended while preserving this property to all of X. In this case we call the functional g the minimal extension of f from Y to X. It is well known that if f is completely linear then so is g.

Let $\widetilde{X}$ be the associated space of X (that is, the K-space of regular functionals on X), and let $\widetilde{X}_Y$ be the set of all functionals $f\in\widetilde{X}$ for which the restriction $f|_Y=0$. It is clear that $\widetilde{X}_Y$ is a band in $\widetilde{X}$.

Lemma 3. *If $f\in\widetilde{X}_+$ and $f\mathrm{d}\widetilde{X}_Y$, then f coincides with the minimal extension to X of its restriction $f|_Y$.*

Proof. Let g be the minimal extension of $f|_Y$ from Y to X. Then $0\leq g\leq f$ and so $g\mathrm{d}\widetilde{X}_Y$. Consequently $f-g\mathrm{d}\widetilde{X}_Y$ and at the same time $f-g\in\widetilde{X}_Y$, so that $f-g=0$.

Remark. If X is a KN-space, Y is a normal subspace of it with the norm induced by that of X, and X^* is the space (b)-conjugate to X, then the set X^* can be defined completely similarly, and is a band in X^*. An assertion similar to that of Lemma 3 is valid for $f\in X^*_+$.

Lemma 4. *If, under the conditions of the previous remark, we put $Tf=f|_Y$ for any $f\in(X^*_Y)^{\mathrm{d}}$,*[1] *then T is a linear and lattice isomorphism of the K-space $(X^*_Y)^{\mathrm{d}}$ (which we denote for brevity by U) onto the K-space Y^*.*

Proof. Let $g\in Y^*$. Then there is a functional $h\in X^*$ such that $h|_Y=g$. If $f=\mathrm{Pr}_U H$, then $f\in U$ and $h-f\in X^*_Y$, and so $Tf=g$. Thus T is a mapping onto Y^*. If $Tf=0$ $(f\in U)$, then $f\in X^*_Y$ and so $f=0$; that is, the map T is one-to-one. It is easy to see that $Tf\geq 0$ if and only if $f\geq 0$.

For any K-space X, we shall write $\mathfrak{S}(X)$ for the Boolean algebra of its bands.

Lemma 5. *Let Z_1 and Z_2 be extended K-spaces, 1_1 and 1_2 units in them, T_1 a foundation in Z_1, T_2 a normal subspace in Z_2, and let B be an isomorphism of the Boolean algebra $\mathfrak{S}(T_1)$ onto the Boolean algebra $\mathfrak{S}(T_2)$. Then there is a unique pair (R, V), with V a band in Z_2 and R an isomorphism of the K-space Z_1 onto V, satisfying the conditions:*

1) $R(1_1)=\mathrm{Pr}_V 1_2$;

2) $R(H)\cap T_2=B(H\cap T_1)$ *for any band* $H\in\mathfrak{S}(Z_1)$.

This lemma is almost obvious: for V we take the band in Z_2 generated by the set T_2, and take into account that according to the hypotheses the bases of the K-spaces Z_1 and V are isomorphic.

2. In this subsection Z is an extended K-space with fixed unit 1, X is any normal subspace in it, and M is the subspace of bounded elements in Z. We introduce some notation.

1) If E is an arbitrary subset in a K-space, then E^{d} is its disjoint complement and $(X^*_Y)^{\mathrm{d}}$ is the disjoint complement to X^*_Y in the K-space X^*.

Let $f \in \widetilde{X}$ and $u \in X_+$. For any $x \in M$ we put

$$f_{(u)}(x) = f(xu).$$

Clearly $f_{(u)} \in \widetilde{M}$ and the operator $A_{(u)}$ from $\widetilde{X}$ to $\widetilde{M}$ defined by $A_{(u)}f = f_{(u)}$ is linear and positive.

Lemma 6. *Let $E \subset \widetilde{X}$ and let $g = \sup E$ exist in $\widetilde{X}$. Then $A_{(u)}g = \sup_{f\in E} A_{(u)}f$.*

Proof. For any $x \in M_+$ we have

$$(A_{(u)}g)(x) = g(xu) = \sup_{\substack{z_1+\dots+z_n=xu\\ z_1,\dots,z_n\geqslant 0,\\ f_1,\dots,f_n\in E}} \{f_1(z_1) + \dots + f_n(z_n)\}$$

$$= \sup_{\substack{x_1+\dots+x_n=x,\\ x_1,\dots,x_n\geqslant 0,\\ f_1,\dots f_n\in E}} \{f_1(x_1u) + \dots + f_n(x_nu)\}$$

$$= \sup\{(f_1)_{(u)}(x_1) + \dots + (f_n)_{(u)}(x_n)\} = (\sup_{f\in E} A_{(u)}f)(x).$$

Corollary. a) $|A_{(u)}f| = A_{(u)}|f|$ (obvious).

b) *If $A_{(u)}f \geq 0$, then there is a $g \geq 0$ ($g \in \widetilde{X}$) for which $A_{(u)}f = A_{(u)}g$.*[1)]

It is sufficient to put $g = |f|$.

If Y is an arbitrary K-space, and $v \in Y_+$, then Y_v stands for the subspace of elements bounded relative to v:

$$Y_v = \{y\colon y \in Y,\ |y| \leq \lambda v \text{ for some } \lambda, \text{ depending on } y\}.$$

Lemma 7. *The image of the space $\widetilde{X}$ under the map $A_{(u)}$ is a normal subspace of $\widetilde{M}$.*

Proof. From the fact that the operator $A_{(u)}$ preserves bounds, according to the lemma just stated, it follows at once that $A_{(u)}(\widetilde{X})$ is a linear sublattice in $\widetilde{M}$. Let $0 \leq \phi \leq \psi$, where $\psi \in A_{(u)}(\widetilde{X})$ and $\phi \in \widetilde{M}$. There is an $f \in \widetilde{X}_+$ such that $\psi = A_{(u)}f$. For any $x \in X_u$ we put $h(x) = \phi(xu^{-1})$ (it is clear that $xu^{-1} \in M$). Then $h \in \widetilde{X}_u$, and if $x \in X_u^+$, then

$$h(x) = \varphi(xu^{-1}) \leqslant \psi(xu^{-1}) = f_{(u)}(xu^{-1}) = f(x).$$

Thus $0 \leq h \leq f|_{X_u}$. We write l for the minimal extension of the functional h from X_u to X: $l \leq f$. Then if $x \in M$, then $xu \in X_u$ and

$$l_{(u)}(x) = l(xu) = h(xu) = \varphi(x),$$

that is, $l_{(u)} = \phi$ or $\phi = A_{(u)}l$. Thus $\phi \in A_{(u)}(\widetilde{X})$.

Corollary. *If $u, v \in X_+$ and $u \leq v$, then $A_{(u)}(\widetilde{X}) \subset A_v(\widetilde{X})$.*

It follows at once from the definition of the operators $A_{(u)}$ and $A_{(v)}$ that $A_{(u)} \leq A_{(v)}$, and the conclusion required then follows at once from Lemma 7.

Lemma 8. *If $f \in \widetilde{X}$, then in order that $f = 0$ it is necessary and sufficient that*

1) It is clear that the operator $A_{(u)}$ need not be one-to-one.

$A_{(u)}f = 0$ *for any* $u \in X_+$.

Proof. It is clear that if $f = 0$, then $A_{(u)}f = 0$ for any $u \in X_+$. Conversely, if $A_{(u)}f = 0$ for any $u \in X_+$, then, taking $x = 1$, we get that $f(u) = f_{(u)}(1) = 0$ for any $u \in X_+$; that is, $f = 0$.

Lemma 9. *If* $f, g \in \widetilde{X}$, *then the following assertions are equivalent:*

(α) $f \,\mathrm{d}\, g$;

(β) $A_{(u)}f \,\mathrm{d}\, A_{(u)}g$ *for any* $u \in X_+$;

(γ) $A_{(u)}f \,\mathrm{d}\, A_{(v)}g$ *for any* $u, v \in X_+$.

Proof. $(\alpha) \Longrightarrow (\gamma)$. Using Lemma 6 and its Corollary, we have

$$|A_{(u)}f| \wedge |A_{(v)}g| = A_{(u)}|f| \wedge A_{(v)}|g|$$

$$\leqslant A_{(u\vee v)}|f| \wedge A_{(u\vee v)}\,|g| = A_{(u\vee v)}(|f| \wedge |g|) = 0.$$

$(\gamma) \Longrightarrow (\beta)$ is obvious.

$(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$. We have $A_{(u)}(|f| \wedge |g|) = |A_{(u)}f| \wedge |A_{(u)}g| = 0$, and then $|f| \wedge |g| = 0$ by Lemma 8.

We introduce the set $B(\widetilde{X}) = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(\widetilde{X})$. Since this is the union of a family of normal subspaces in $\widetilde{M}$ directed by inclusion (see Lemma 7 and its Corollary), $B(\widetilde{X})$ is also a normal subspace in $\widetilde{M}$. Similarly, for any band $H \in \mathfrak{E}(\widetilde{X})$ we put $B(H) = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(H)$.

Lemma 10. *If* H_1 *and* H_2 *are two mutually complementary bands of the K-space* $\widetilde{X}$, *then* $B(H_1)$ *and* $B(H_2)$ *are mutually complementary bands of the K-space* $B(\widetilde{X})$.

Proof. The sets $B(H_1)$ and $B(H_2)$ are disjoint, according to Lemma 9. Let us put an arbitrary $h \in B(\widetilde{X})$ in the form $h = A_{(u)}f$, where $f \in \widetilde{X}$ and $u \in X_+$. We put

$$f_1 = \mathrm{Pr}_{H_1}f, \quad f_2 = \mathrm{Pr}_{H_2}f.$$

Then $h_i = A_{(u)}f_i \in B(H_i)$ $(i = 1, 2)$ and $h = h_1 + h_2$. It follows at once from this that $B(H_1)$ and $B(H_2)$ are bands and mutually complementary.

Corollary. (a) *If* $H_1 \,\mathrm{d}\, H_2$ $(H_1, H_2 \in \mathfrak{E}(\widetilde{X}))$ *then* $B(H_1) \,\mathrm{d}\, B(H_2)$.

(b) *If* $H_1 \neq H_2$, *then* $B(H_1) \neq B(H_2)$.

Lemma 11. *Let* Y *be a normal subspace in* X, $g \in \widetilde{Y}_+$, *and let* f *be its minimal extension to* X. *Then*

1) $f_{(v)} = g_{(v)}$ *for any* $v \in Y_+$.

2) *The sets* $P_1 = \{f_{(u)}: u \in X_+\}$ *and* $P_2 = \{g_{(v)}: v \in Y_+\}$ *generate one and the same band in* $\widetilde{M}$.

Proof. 1) For any $x \in M$ and $v \in Y_+$ we have $g_{(v)}(x) = g(xv) = f(xv) = f_{(v)}(x)$.

2) It follows from 1) that $P_2 \subset P_1$. For fixed $u \in X_+$ we put $G = \{g_{(v)}: 0 \leq v \leq u,\ v \in Y\}$ and show that $f_{(u)} = \sup G$. Since $g_{(v)} \leq f_{(u)}$ for any $g_{(v)} \in G$, $\sup G$ exists in $\widetilde{M}$. For the moment let us write ϕ for this. Then it is enough to show that $f_{(u)}(x) = \phi(x)$ for any x in the base $\mathfrak{E}(M)$, since the linear

combinations of unit elements are a set dense in M for convergence with respect to a regulator. But

$$\varphi(x) = \sup_{0 \leqslant v \leqslant u, v \in Y} g_{(v)}(x) = \sup g(xv) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant xu, y \in Y} g(y) = f(xu) = f_{(u)}(x),$$

and this proves the lemma.

Lemma 12. *If W is any band in the K-space $B(\widetilde{X})$, then there is a band $H \in \mathfrak{S}(\widetilde{X})$ such that $B(H) = W$.*

Proof. We put $H = \bigcap_{v \in X_+} A_{(v)}^{-1}(W)$ and verify that H is the band required.

Clearly, H is a band in $\widetilde{X}$ and $B(H) \subset W$.[1] Let $g \in W_+$. Then there are a $\phi \in \widetilde{X}_+$ and a $u \in X_+$ such that $\phi_{(u)} = A_{(u)}\phi = g$. The subspace X_u will be written Y for brevity. We construct the minimal extension f of the functional $\psi = \phi|_Y$ to all of X. Then $f_{(u)} = \phi_{(u)} = g$. We verify that $f \in H$. This means that $f_{(v)} \in W$ for any $v \in X_+$. According to the preceding lemma it is enough to verify that $\psi_{(w)} \in W$ for any $w \in Y_+$. But for any $w \in Y_+$ there is a $\lambda \geq 0$ such that $w \leq \lambda u$. Then

$$\psi_{(w)} \leqslant \psi_{(\lambda u)} = \lambda \psi_{(u)} = \lambda \varphi_{(u)} = \lambda g \in W,$$

and $\psi_{(w)} \in W$.

It follows at once from Lemmas 10 and 12 (see also the Corollary to Lemma 10) that the map B is an isomorphism between the Boolean algebras of the bands of the K-spaces $\widetilde{X}$ and $B(\widetilde{X})$.

In the following we write $\mathfrak{M}(U)$ for the maximal extension of an arbitrary K-space U.

Lemma 13. *Let $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ and $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ be K-spaces with fixed units 1_1 and 1_2 (respectively). Then there is a unique pair (R_X, V_X), with V_X a band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and R_X an isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ onto V_X, satisfying the conditions*

1) $R_X(1_1) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_2$;

2) $R_X(H) \cap B(\widetilde{X}) = B(H \cap \widetilde{X})$ *for any* $H \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}(\widetilde{X}))$.

The lemma follows from Lemma 5. We note that V_X is the band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ generated by the set $B(\widetilde{X})$.

3. We now introduce a concept of disjunction for regular functionals defined on different normal subspaces of the same extended K-space. Let Z be an extended K-space, X and Y any normal subspaces in it, and M the subspace of bounded elements.

Definition. Let $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$. We shall say that f and g are disjoint ($f \mathrm{D} g$), if $f_{(u)} \mathrm{d} g_{(v)}$ in the K-space $\widetilde{M}$ for any $u \in X_+$, $v \in Y_+$.

It is clear from Lemma 9 that in the case $X = Y$ the new sense of disjunction coincides with the old. We observe also that if $g = 0$ then $f \mathrm{D} g$ for any $f \in \widetilde{X}$.

Lemma 14. *For any set $P \subset \widetilde{Y}$ the collection*

$$H = \{f \colon f \in \widetilde{X},\ f \mathrm{D} g \text{ for any } g \in P\}$$

is a band in $\widetilde{X}$.

---

1) We recall that the operator $A_{(u)}$ preserves bounds.

Proof. Let N stand for the disjoint complement of the set of all functionals $g_{(v)}$, with $g \in P$ and $v \in Y_+$, in the K-space $\widetilde{M}$. Then N is a band in $\widetilde{M}$. But

$$H = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(N),$$

and so H is a band in $\widetilde{X}$.

Lemma 15. *If $f \in \widetilde{X}$ and $g \in \widetilde{M}$, then the relation $f \mathrm{D} g$ is equivalent to the condition that $f_{(u)} \mathrm{d} g$ for any $u \in X_+$.*

Proof. If $f \mathrm{D} g$ then $f_{(u)} \mathrm{d} g_{(u)}$ for any $u \in X_+$, $v \in M_+$. In particular, taking $v = 1$, we obtain $g_{(v)} = g$ and so $f_{(u)} \mathrm{d} g$.

On the other hand, suppose that $f_{(u)} \mathrm{d} g$ for any $u \in X_+$. If $v \in M_+$ then $v \leq C1$ for some C, and then $|g_{(v)}| = |g|_{(v)} \leq C|g|$. Consequently

$$|f_{(u)}| \wedge |g_{(v)}| \leqslant |f_{(u)}| \wedge C|g| = 0.$$

Lemma 16. *Let $P \subset \widetilde{X}$ and let H be a band in $\widetilde{X}$ generated by the set P. Then the set*

$$L = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(P)$$

generates the band $B(H)$ in $B(\widetilde{X})$.

Proof. Let W stand for the band in $B(\widetilde{X})$ generated by the set L. Then $W \subset B(H)$. It is evident from the proof of Lemma 12 that

$$B^{-1}(W) = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(W),$$

and so $P \subset B^{-1}(W)$. It follows at once from this that $H \subset B^{-1}(W)$ or $B(H) \subset W$, and so $W = B(H)$.

4. We now proceed to the fundamental theorem on the realization of spaces of regular functionals. As before, Z is an extended K-space, X and Y any normal subspaces in it, and M the subspace of bounded elements. In the K-spaces $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ and $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ we fix units 1_1 and 1_2 (respectively).

Theorem 3.1. *There is a unique pair (R_X, V_X), where V_X is a band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and R_X is an isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ onto V_X, satisfying the following conditions:*

1) *For any $f \in \widetilde{X}$ and $g \in \widetilde{M}$ the relations $f \mathrm{D} g$ and $R_X f \mathrm{d} g$ are equivalent.*
2) $R_X(1_1) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_2$.

We shall call the operator R_X the canonical realization of the space X.

Proof. We show that the conditions required are satisfied by the pair (R_X, V_X) in Lemma 13. Only verification of Condition 1) is needed.

Let $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{M}$, let H be the band in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ generated by the functional f, and let $H_1 = H \cap \widetilde{X}$. It follows from Lemma 14 that the relationships $f \mathrm{D} g$ and $H_1 \mathrm{D} g$[1])

1) This means that $h \mathrm{D} g$ for any $h \in H_1$.

are equivalent. The latter is equivalent, according to Lemma 15, to the condition that $h_{(u)} \mathrm{d} g$ for any $h \in H_1$ and $u \in X_+$; that is, to the condition that $B(H_1) \mathrm{d} g$. This is in turn equivalent to the relation $R_X(H) \mathrm{d} g$ according to Lemma 13. But since R_X is an isomorphism, $R_X(H)$ is a band in V_X generated by the functional $R_X f$.

We now show that the pair required is unique. Let (R'_X, V'_X) be a second pair satisfying the conditions of the theorem; $\widetilde{H}$ and $\widetilde{H}_1$ have the original meanings. Then the relations $R_X f \mathrm{d} g$ and $R'_X f \mathrm{d} g (f \in \widetilde{X}, g \in \widetilde{M})$ are equivalent, and so the sets $R_X(H_1)$ and $R'_X(H_1)$ generate the same band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$; that is, $R_X(H) = R'_X(H)$ for any band H in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$. In particular $V'_X = R'_X(\mathfrak{M}(\widetilde{X})) = R_X(\mathfrak{M}(\widetilde{X})) = V_X$. In addition, $R'_X(H) \cap B(\widetilde{X}) = B(H \cap \widetilde{X})$ since R_X has this property (see Lemma 13), and then the uniqueness of R_X follows from Lemma 13.

Theorem 3.2. *Let $f \in \widetilde{X}$. Then the band in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ generated by the element $R_X f$ coincides with the band generated by the set F of all functionals $f_{(u)}$ $(u \in X_+)$.*

Proof. It follows from Theorem 3.1 and Lemma 15 that the relations $f_{(u)} \mathrm{d} g$ for every $u \in X_+$ and $R_X f \mathrm{d} g (g \in \widetilde{M})$ are equivalent. It follows at once from this that the disjoint complement in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ to the functional $R_X f$ corresponds to that for the set F, and so the bands mentioned in the theorem also coincide.

Theorem 3.3. *If $f \in \widetilde{X}$ and $g \in \widetilde{Y}$, then the relations $f \mathrm{D} g$ and $R_X f \mathrm{d} R_Y g$ are equivalent.*

Proof. By definition the relation $f \mathrm{D} g$ is equivalent to the condition that $f_{(u)} \mathrm{d} g_{(v)}$ for any $u \in X_+$ and $v \in Y_+$. By Theorem 3.2 the latter relation is equivalent to the disjointness of the functionals $R_X f$ and $R_Y g$.[1)]

Thus if we take different normal subspaces of a K-space Z, we can imbed their associated spaces in a K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, and do this in such a way that functionals disjoint in the generalized sense (D) go over in the imbedding to functionals disjoint in the usual sense.

We prove a further theorem after imposing some further restrictions on X and Y.

Theorem 3.4. *Let X ba a KN-space, Y a normal subspace with the norm induced by that of X, and let a unit 1_1 be chosen in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$. Then we can choose a unit 1_2 in $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$ in such a way that the following conditions are valid in the canonical realization of the spaces $\widetilde{X}$ and $\widetilde{Y}$:*

1) $R_Y(Y^*)$ is a band in $R_X(X^*)$.

2) If $f \in X^*$ and $\phi = f|_Y$, then $R_Y \phi$ is the projection of the element $R_X f$ onto $R_Y(Y^*)$.

Proof. Using the notation introduced at the beginning of the subsection, we consider the set $X^*_Y = \{f : f \in X^*, f|_Y = 0\}$. We put $U = (X^*)^{\mathrm{d}}$ and consider $\mathfrak{M}(X^*)$ (or $\mathfrak{M}(Y^*)$) as a band in $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ (respectively, in $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$) and $\mathfrak{M}(X^*_Y)$ and $\mathfrak{M}(U)$ as bands

1) Since the disjointness of two sets is equivalent to the disjointness of the bands they generate.

in $\mathfrak{M}(X^*)$. The map T introduced in Lemma 4 will be considered as extended by isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(U)$ to the K-space $\mathfrak{M}(Y^*)$. We choose the unit 1 in $\mathfrak{M}(\widetilde{Y})$ in such a way that

$$\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2 = T(\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(U)} 1_1). \tag{8}$$

We show that

$$R_X T^{-1} = R_Y |_{\mathfrak{M}(Y^*)}. \tag{9}$$

Let $f \in Y^*$ and $g \in \widetilde{M}$. Then

$$\text{the relations } g \,\mathrm{d}\, R_X T^{-1} f \text{ and } g \,\mathrm{d}\, R_Y f \text{ are equivalent.} \tag{10}$$

For, by Theorem 3.2 the first of these is equivalent to the relation

$$g \,\mathrm{d}\, (T^{-1}f)_{(u)} \quad \text{for any} \quad u \in X_+, \tag{11}$$

and the second to

$$g \,\mathrm{d}\, f_{(v)} \quad \text{for any} \quad v \in Y_+. \tag{12}$$

It is easy to see that if $T^{-1}f \geq 0$ then $T^{-1}f$ is the minimal extension of the functional f from Y to X.[1] Consequently Lemma 11 applies and the sets of functionals $\{(T^{-1}f)_{(u)}\}$ $(u \in X_+)$ and $\{f_{(v)}\}$ $(v \in Y_+)$ generate one and the same band in $\widetilde{M}$. Consequently the relations (11) and (12) are equivalent, and (10) is proved.

It is clear from (10) that $R_X T^{-1}(H) = R_Y(H)$ for any band $H \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}(Y^*))$. In particular,

$$R_X T^{-1} (\mathfrak{M}(Y^*)) = R_Y (\mathfrak{M}(Y^*)). \tag{13}$$

Furthermore, it follows from (8) that

$$R_X T^{-1} (\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2) = R_X (\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(U)} 1_1).$$

Consequently this is the unit element in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, and therefore by (13) it coincides with $R_Y(\mathrm{Pr}_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1_2)$. (9) follows from all of this.[2]

Further, we have $R_Y(Y^*) = R_X T^{-1}(Y^*) = R_X(U)$, and so $R_Y(Y^*)$ is a band in $R_X(X^*)$.

Now let $f \in X^*$ and $\phi = f|_Y$. Put $\psi = f - T^{-1}\phi$. Then $\psi \in X_Y^*$ and

$$R_X f = R_X T^{-1} \varphi + R_X \psi = R_Y \varphi + R_X \psi.$$

But $R_X \psi \,\mathrm{d}\, R_X U = R_Y(Y^*)$, and so $R_Y \phi$ is the projection of the functional $R_X f$ onto $R_Y(Y^*)$.

---

1) It is clear that the minimal extension of a (b)-linear functional is (b)-linear, and $T^{-1}f$ is defined uniquely.

2) If A and B are two isomorphic maps of the extended K-space E_1 to the extended K-space E_2, and $A(H) = B(H)$ for any band H in E_1 and $A(1_{E_1}) = B(1_{E_1})$, then $A = B$.

Remark: Under the conditions of Theorem 3.4 $R_Y(\widetilde{Y})$ is not necessarily a band in $R_X(\widetilde{X})$ for any choice of unit. It is enough to take $X = L[0, 1]$ and $Y = M[0, 1]$.

Received 20 MAY 1969.

BIBLIOGRAPHY

[1] N. Bourbaki, Livre VI: *Intégration*. Chapitres I–IV, Actualités Sci. Indust., no. 1175, Hermann, Paris, 1952; Russian transl., "Nauka", Moscow, 1967. MR 14, 960; 36 #6572.

[2] B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; 37 #121.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*. I: *General theory*, Pure and Appl. Math., vol. 7, Interscience, New York, 1958; Russian transl., IL, Moscow, 1962. MR 22 #8302.

[4] J. Dixmier, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*, Summa Brasil. Math. 2 (1951), 151–182. MR 14, 69.

[5] K. Yosida, *On the theory of spectra*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 378–383. MR 2, 225.

[6] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 523–537. MR 2, 318.

[7] L. V. Kantorovič, B. Z. Vulih and A. G. Pinsker, *Functional analysis in partially ordered spaces*, GITTL, Moscow, 1950. (Russian) MR 12, 340.

[8] J. L. Kelley, *Measures on Boolean algebras*, Pacific J. Math. 9 (1959), 1165–1177. MR 21 #7286.

[9] ———, *Decomposition and representation theorems in measure theory*, Math. Ann. 163 (1966), 89–94. MR 32 #7694.

[10] G. Ja. Lozanovskiĭ, *Calderón's Banach structures*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 172 (1967), 1018–1020 = Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 224–227. MR 34 #8155.

[11] ———, *On the representation of spaces of regular functionals and some applications*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 188 (1969), 522–524 = Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 1149–1152. MR 40 #4731.

[12] N. M. Rice, *Multiplication in vector lattices*, Canad. J. Math. 20 (1968), 1136–1149. MR 37 #6732.

[13] I. E. Segal, *Equivalences of measure spaces*, Amer. J. Math. 73 (1951), 275–313. MR 12, 809.

[14] R. Sikorski, *Boolean algebras*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 25, Springer-Verlag, New York, 1960; 2nd ed., 1964; Russian transl., "Mir", Moscow, 1969. MR 23 #A3689; 31 #2178.

[15] J. T. Schwartz, *A note on the space* L_p^*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 270–275. MR 12, 718.

Translated by:
J. L. B. Cooper

Mat. Sbornik
Tom 84 (126) (1971), No. 3

Math. USSR Sbornik
Vol. 13 (1971), No. 3

ON A CLASS OF OPERATORS IN VON NEUMANN ALGEBRAS WITH SEGAL MEASURE ON THE PROJECTORS

M. G. SONIS

Abstract. By means of the concept of Segal measure, defined on projectors (and thus on subspaces associated with a von Neumann algebra) we introduce the concept of relative compactness of sets and, on this basis, the concept of operators completely continuous with respect to the von Neumann algebra and the Segal measure. The article is concerned with the formal structure of the theory of this class of operators: the general theorem of Calkin is obtained on the uniqueness of the ideal with respect to completely continuous operators; a theory is constructed for perturbations of Hermitian operators with respect to completely continuous ones; singular and characteristic numbers are introduced for operators from the von Neumann algebra and their minimax properties are derived; some characterizations are introduced in terms of completely continuous operators.

Bibliography: 10 items.

Suppose $\mathfrak{A}$ is a von Neumann algebra, i.e. a weakly closed selfadjoint algebra of bounded operators in Hilbert space $\mathfrak{H}$ containing the identity operator I. For the special case of von Neumann factors—von Neumann algebras whose center consists only of scalar operators—Murray and von Neumann [1], [2] introduced the concept of relative dimension of projectors from the factors.

Segal [3] introduced into consideration general von Neumann algebras, on the projectors of which are given a nonnegative measure having a great many of the properties of the relative dimension in the factors.

The aim of this article is to study a class of operators from the algebra $\mathfrak{A}$ with Segal measure, which is analogous to the class of all completely continuous operators in Hilbert space. Since the concept of a completely continuous operator is essentially based upon the ideas of dimension, the presence in the algebra $\mathfrak{A}$ of a nonnegative Segal measure permits us to use classical methods, well known in the theory of completely continuous operators. Corresponding to this we introduce the notion of the relative compactness of sets from $\mathfrak{H}$ and on it the basic concept of an operator completely continuous relative to a von Neumann algebra with a Segal measure.

AMS 1970 *subject classifications*. Primary 47C15.

Dokl., Akad. Nauk SSSR
Tom 172 (1967), No. 5

Soviet Math Dokl.
Vol. 8 (1967), No. 1

CALDERÓN'S BANACH STRUCTURES

G. Ja. LOZANOVSKIĬ

This article considers spaces which are adjoint and dual to certain Banach structures introduced by Calderón [2]. However, we apply the construction of Calderón not to structures of measurable functions but to wider classes of partially ordered spaces. We shall use the terminology and notations of the theory of partially ordered spaces used in the monograph [1].

Let S be an arbitrary extended K-space with unit 1; X_1 and X_2 fundaments in S which are (b)-complete KN-spaces; s a real number such that $0 < s < 1$. Let X be the set of all $w \in S$ such that

$$|w| \leqslant \lambda |u|^{1-s} |v|^s \tag{1}$$

for some number $\lambda > 0$ and some $u \in X_1$, $v \in X_2$ with $\|u\|_{X_1} \leq 1$ and $\|v\|_{X_2} \leq 1$. Let $\|w\|_X$ be the infimum of all possible λ in the equation (1). Then (cf. [2]) $(X, \| \|_X)$ is a fundament in S is a (b)-complete KN-space. Following [2] we shall denote this space by $X_1^{1-s} X_2^s$. We remark that the space $X_1^{1-s} X_2^s$ is completely determined by S, X_1 and X_2 and does not depend on the choice of unit in S.

Now let $(L, \| \|_L)$ be a fundament in S which is a KB-space with additive norm, and let J be a linear functional on L defined by the formula

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{2}$$

If Z is any fundament in S, we put

$$Z' = \{v\colon\ v \in S,\ vz \in L \ \text{ for any } z \in Z\}. \tag{3}$$

It is clear that Z' can be identified naturally with the space $\overline{Z}$ adjoint to Z in the sense of Nakano, if to each $v \in Z'$ we associate the functional $f_v \in \overline{Z}$ defined by the formula

$$f_v(z) = J(vz), \quad z \in Z. \tag{4}$$

Theorem 1.* *The space* $(X_1^{1-s} X_2^s)'$ *is a fundament in* S *and*

$$(X_1^{1-s} X_2^s)' = (X_1')^{1-s} (X_2')^s. \tag{5}$$

This theorem is a generalization of the Theorem 4 of the author's article [4].

We shall give the outline of the proof of Theorem 1. It is easy to verify that the right-hand side of the equation (5) is contained in the left-hand side. To demonstrate the opposite inclusion we show in order the following:

1) If the directed set $0 \leq x_\alpha$ $(\alpha \in A)$ tends weakly to zero in X_1 and the directed set $0 \leq y_\alpha$ $(\alpha \in A)$ tends weakly to zero in X_2, then the directed set $z_\alpha = x_\alpha^{1-s} y_\alpha^s$ tends weakly to zero in the space $X = X_1^{1-s} X_2^s$. This can be proved by reductio ad absurdum using the theorem that the strong

*In the article [2] this result is proved only on the hypothesis that one of the spaces X_1, X_2 is reflexive.

and weak closures of complex sets in normed spaces coincide.

2) Now let $w \in (X_1^{1-s} X_2^s)'_+$. Then we can find positive linear functionals f_1 on X_1 and f_2 on X_2 such that for any $x \in (X_1)_+$ and $y \in (X_2)_+$ we have

$$J(wx^{1-s}y^s) \leqslant [f_1(x)]^{1-s}[f_2(y)]^s. \tag{6}$$

3) Let ϕ_1 and ϕ_2 be completely linear components of the functionals f_1 and f_2 respectively. Then for the x and y above

$$J(wx^{1-s}y^s) \leqslant [\varphi_1(x)]^{1-s}[\varphi_2(y)]^s. \tag{7}$$

4) Let $u \in X_1'$ and $v \in X_2'$ be the elements which correspond to ϕ_1 and ϕ_2 respectively in the formula (4). Then

$$J(wx^{1-s}y^s) \leqslant [J(ux)]^{1-s}[J(vy)]^s \tag{8}$$

once again for any $x \in (X_1)_+$ and $y \in (X_2)_+$.

5) We deduce from (8) that

$$w \leqslant u^{1-s}v^s, \tag{9}$$

and from this it follows that $w \in (X_1')^{1-s}(X_2')^s$.

We note that, if in one of the spaces X_1 and X_2 the condition (A) holds (i.e. from $x_n \downarrow 0$ it follows that $\|x_n\| \to 0$; cf. [1], p. 207), then (A) holds in $X = X_1^{1-s}X_2^s$. Consequently we can identify $(X_1')^{1-s}(X_2')^s$ and the space (b)-adjoint to $X_1^{1-s}X_2^s$, if this is the case. At the same time condition (B) (i.e. $0 \leq x_n \uparrow +\infty$ implies that $\|x_n\| \to \infty$; cf. [1] p. 207) can hold in one of the spaces X_1, X_2 but not be valid in $X_1^{1-s}X_2^s$.

We remark that if X_1 and X_2 are not (b)-complete KN-spaces, but merely fundaments in S, then the formula (5) does not hold in general. For example $S = S[0, 1]$, $X_1 = L^{1+0}[0, 1]$, $X = X_1'$, $s = ½$. Then

$$(X_1^{1/2}X_2^{1/2})' \supset L^2[0, 1], \quad L^2[0,1] \neq (X_1')^{1/2}(X_2')^{1/2} \subset L^2[0, 1],$$

i.e. $(X_1^{1/2}X_2^{1/2})' \neq (X_1')^{1/2}(X_2')^{1/2}$.

Theorem 2. *If one of the spaces X_1 and X_2 is a KB-space, and condition* (A) *is fulfilled in one of the spaces X_1^*, X_2^* (b)-adjoint to them, then $X_1^{1-s}X_2^s$ is a (b)-reflexive KB-space.*

The proof of this theorem is based on formula (5).

We note that Theorem 2 is a generalization of a known criterion for (b)-reflexivity due to Ogasawara as far as the sufficiency condition is concerned (cf. [1], p. 294); this is obtained by taking $X_1 = X_2$ and arbitrary s in $0 < s < 1$. Theorem 2 is also a generalization of Theorem 1 of the author's article [3] on the reflexivity of the space X_p for $p > 1$; this is obtained by taking X_1 to be an arbitrary KB-space and defining X_2 by

$$X_2 = \{x\colon\ x \in S,\ |x| \leqslant \lambda 1 \text{ for any } \lambda > 0\}$$

and for $x \in X_2$

$$\|x\|_{X_2} = \inf\{\lambda\colon\ \lambda > 0,\ |x| \leqslant \lambda 1\},$$

i.e. taking X_2 to be the KN-space of elements bounded with respect to the unit 1. We must also take $s = 1 - 1/p$.

We also note that cases also occur in which X_1 satisfies condition (A), X_2 satisfies condition (B), and one of the spaces X_1^*, X_2^* satisfies condition (A) but $X_1^{1-s}X_2^s$ is not only not (b)-reflexive but is not even a KB-space. This will happen, for example, if S is the space of all real numerical sequences, $X_1 = c_0$, $X_2 = m$ and then for any s in $0 < s < 1$, $X_1^{1-s} X_2^s = c_0$.

In what follows S, 1, L, J will have their former meanings, but X will mean an arbitrary (b)-complete KN-space which is a fundament in S. We emphasize that we require no additional agreement of order and topology in X. As before, $0 < s < 1$.

Theorem 3. *The space $X^{1-s}(X')^s$ is a (b)-reflexive KB-space, and for $s = \frac{1}{2}$ it is isomorphic to a Hilbert space and*

$$X^{1/2}(X')^{1/2} = \{x\colon\ x \in S,\ x^2 \in L\}. \tag{10}$$

We shall not give the proof of Theorem 3.

We now introduce a norm into X', putting

$$\| y \|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leqslant 1}} J(xy), \quad y \in X', \tag{11}$$

i.e. the norm is that induced by the norm of the space X^*.

Theorem 4. *There is a constant $C > 0$, such that for any $x \in L$ we can find a representation*

$$x = x_1 x_2,$$

where $x_1 \in X$, $x_2 \in X'$ and

$$\|x_1\|_X \|x_2\|_{X'} \leqslant C \|x\|_L. \tag{12}$$

The proof of Theorem 4 depends on formula (10).

Remark 1. We note that E. M. Semenov has proved (see [5]) that every function $x(t)$ summable on $[0, 1]$ can be represented in the form $x(t) = x_1(t) x_2(t)$ where $x_1(t) \in \Lambda(\alpha)$, $x_2(t) \in M(\alpha)$ and

$$\| x_1 \|_{\Lambda(\alpha)} \| x_2 \|_{M(\alpha)} \leqslant \frac{\pi (1 - \alpha)}{\sin \pi \alpha} \cdot \| x \|_L.$$

Here $\Lambda(\alpha)$ and $M(\alpha)$ are Lorentz spaces. Since $M(\alpha)$ is adjoint to $\Lambda(\alpha)$, our Theorem 4 explains this result.

Remark 2. Let $C(X)$ denote the infimum of all possible C on the inequality (12). We can show that $C(X)$ is defined by the space $(X, \|\ \|_X)$ alone, and does not depend on the choice of the unit 1 in S and $(L, \|\ \|_L)$. It is clear that $C(X) \geq 1$ for all X. If X is the usual Lebesgue space $L^p[0, 1]$ then $C(X) = 1$.

Remark 3. Theorem 4 does not generalize to countably normed spaces, even if we require that X should be a KB^*-space. For instance let $S = S[0, 1]$ and L be the usual space, J the Lebesgue integral. For X we take the space of all functions summable for some power $p \geq 1$ over $[0, 1]$. Then X is a KB-space and $X' = L^{1+0}$. It is clear that not every function $x \in L$ can be put in the form $x = x_1 x_2$ where $x_1 \in X$, $x_2 \in X'$, since every function of this form is necessarily summable for some power $p > 1$.

Remark 4. The following is a consequence of Theorem 4. Let X be a (b)-complete KN-space and a fundament in $S\ [0, 1]$. In general neither of $X \supset M\,[0, 1]$ nor $X \subset L\,[0, 1]$ need hold. There is a measurable nonnegative almost everywhere finite function $z(t)$ on $[0, 1]$ such that

$$L\,[0, 1] \supset X \cdot z \supset M\,[0, 1],$$

where $Xz = \{xz\colon\ x \in X\}$.

The author expresses his deep gratitude to his scientific supervisor Professor B. Z. Vulih for his interest.

Received 6/APR/66

BIBLIOGRAPHY

[1] B. Z. Vulih, *Introduction to theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961. (Russian) MR 24 #A3494.

[2] A. P. Calderón, Studia Math. 24 (1964), 113. MR 29 #5097.

[3] G. Ja. Lozanovskiĭ, Dokl. Akad. Nauk SSSR 158 (1964), 516 = Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 1253. MR 29 #6281.

[4] ———, Dokl. Akad. Nauk SSSR 163 (1965), 573 = Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 968. MR 33 #539.

[5] E. M. Semenov, *Scales of Banach spaces connecting the spaces* L_1 *and* L_∞, Author's summary, Candidate's dissertation, Voronezh, 1964. (Russian)

Translated by:
J. L. B. Cooper

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 183 (1968), No. 3

Soviet Math. Dokl.
Vol. 9 (1968), No. 6

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF BANACH LATTICES AND REFLEXIVITY CONDITIONS FOR THEM*

UDC 519.55

G. Ja. LOZANOVSKIĬ

We shall use the terminology and notation of the theory of partially ordered spaces, as given in the monograph [1]. A *K-lineal* is a linear lattice. A *K-space* (*K_σ-space*) is a K-lineal which is conditionally complete (conditionally σ-complete) as a lattice. A *KN-lineal* (*$K_\sigma N$-space, KN-space*) is a K-lineal (K_σ-space, K-space) X which is at the same time a normed space in which the norm is monotone, i.e. $|x| \le |y|$ implies that $\|x\| \le \|y\|$. A *KB-lineal* is a KN-lineal that is norm-complete. A *KB-space* is a $K_\sigma N$-space X in which the following two conditions are satisfied.

(A). If $x_n \downarrow 0$ in X then $\|x_n\| \to 0$.

(B). If $0 \le x_n \uparrow$ and $\sup \|x_n\| < \infty$ then there exists $\sup x_n \in X$.

The conjugate space of a Banach space E will be denoted by E^*. A closed linear subset of E is called a *subspace* of E. The Banach spaces E and F are said to be *isomorphic* if there exists a one-to-one continuous linear mapping of E onto F. Let us emphasize that the terms *subspace, isomorphism* and *conjugate space* will be used in this article only in the sense of the theory of normed spaces. The usual Banach spaces of numerical sequences will be denoted by c_0, l^1 and m. The symbol $m(T)$ denotes the Banach space of all the bounded functions on a set T, with the uniform norm.

The following theorem, due to Nakano and Makarov [2] is well known: *if $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ are two monotone Banach norms on some vector lattice X, then they are equivalent.*

This theorem shows that the partial ordering in a Banach lattice uniquely determines its Banach topology. The converse question naturally arises: *to what extent does the topology in a Banach lattice determine the properties of its partial ordering*? Let us first recall two known results in this direction.

Theorem 1. *For any Banach lattice X the following conditions are equivalent*: (1) *X is a conditionally complete Banach lattice*; (2) *X is weakly sequentially complete*; (3) *X contains no subspace that is isomorphic to the space c_0*.

The equivalence of (1) and (2) was proved by Ogasawara [3], while the equivalence of (2) and (3) may be found in the author's article [4].

Theorem 2. *For a norm-complete conditionally σ-complete normed lattice the following statements are equivalent*: (1) *the condition* (A) *holds in X*; (2) *the condition* (*u*) *introduced by A. Pełczyński* [6]

* Translator's note. For the reasons given in the translator's note to the translation of S. N. Slugin's article (Dokl. Akad. Nauk SSSR 181 (1968), 26–28 = Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 798–801), we shall render the eight terms defined in the first paragraph below as follows. The Russian terms K-lineal, K-space, K_σ-space, KN-lineal, $K_\sigma N$-space, KN-space, KB-lineal and KB-space will be replaced by the terms vector lattice, conditionally complete lattice, conditionally σ-complete lattice, normed lattice, conditionally σ-complete normed lattice, conditionally complete normed lattice, Banach lattice and conditionally complete Banach lattice, respectively. For brevity, the qualifiers "real" and "vector" have been omitted from all but the first of these. For details, cf. [1].

holds in X, *i.e. for any weakly Cauchy sequence* $\{x_n\}$ *in* X *there exists a sequence* $\{y_n\}$ *such that, for any* $f \in X^*$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(y_n).$$

(3) X *contains no subspaces that are isomorphic to the space* m; (4) X *contains no subspaces that are isomorphic to the well-known space of R. C. James (cf., for example,* [7], *Russian p.* 123 [*English p.* 72]).

This theorem was proved by the author [5].

Let us now recall the following definition (cf. [1], Russian p. 173).

Definition 1. A vector lattice X is said to be a *vector lattice of countable type* if every bounded subset of mutually disjunctive elements* that are distinct from 0 is at most countable.

Now let E be an arbitrary normed space. We consider the following two properties, each of which will also be said to be a property of being of *countable* type.

Definition 2. We shall say that E is a *space of countable type* if E contains no subspace that is isomorphic to the space $m(T)$, where $\overline{\overline{T}} = \aleph_1$.

Definition 3. We shall say that E is a *space of countable type* if there exists a total set of functionals $\mathfrak{M} \subset E^*$ such that for any $x \in E$ the set $\{f \in \mathfrak{M}: f(x) \neq 0\}$ is at most countable.

We observe that the Definition 1 is applicable to an arbitrary vector lattice, while the Definitions 2 and 3 are applicable to an arbitrary normed space. If X is a normed lattice then we may speak of its being of countable type in any of the three senses given above.

Theorem 3. *Let* X *be a norm-complete conditionally complete normed lattice with a sufficient set of completely linear functionals.*** *Then (provided the continuum hypothesis is assumed to hold) all three definitions of the term countable type are equivalent for* X.

Thus, using the continuum hypothesis, we can show that in norm-complete conditionally complete normed lattices with a sufficient set of completely linear functionals the concept of countable type in the usual sense of the theory of partially ordered spaces is equivalent to some of its topological properties.

The outline of the proof of Theorem 3 is as follows. Without using the continuum hypothesis, we derive from the property of being of countable type in the sense of Definition 2 the property in the sense of Definition 1. Then, from the property of being of countable type in the sense of Definition 1 we derive the property in the sense of Definition 3. Finally, from the property of being of countable type in the sense of Definition 3 and by means of the continuum hypothesis, we derive the property of being of countable type in the sense of Definition 2. In the course of the proof we use, in particular, some results of M. M. Day [8,9] and the following lemma, in which the continuum hypothesis is not assumed to hold.

Lemma. *The space* $m(T)$ *is not a space of countable type in the sense of Definition* 3 *if* T *has the power of the continuum.*

Remark. It is not difficult to find an example of a norm-complete conditionally σ-complete normed lattice with a sufficient set of completely linear functionals, which is of countable type in the sense of Definition 3 but is not such in the sense of Definition 1.

---

* Translator's note. Also called disjoint elements; cf. [1], Russian p. 69.

** Translator's note. Cf. [1], Russian p. 287.

It is known (Eberlein's theorem, cf. [7], for example) that in an arbitrary Banach space E the weak sequential compactness of a bounded weakly closed set is equivalent to its weak compactness. At the same time, the unit ball in the space E^* is always weak * compact but, in general, it is not sequentially compact in this topology. In this connection we present the following theorem which (on the assumption that the continuum hypothesis holds) gives a criterion for the weak * sequential compactness of the unit ball in a space that is the conjugate of an arbitrary norm-complete conditionally σ-complete normed lattice.

Theorem 4. *Let X be a norm-complete conditionally σ-complete normed lattice. Then (under the assumption that the continuum hypothesis holds) the following statements are equivalent:* (1) *the unit ball in the space X^* is weak * sequentially compact, i.e. any sequence $\{f_n\} \subset X^*$ that is bounded in norm contains a subsequence that is convergent in the weak * topology $\sigma(X^*, X)$;* (2) *the condition* (A) *holds in X and the space X^* is a space of countable type in the sense of any of the three definitions given above.*

Remark. The implication (2) $\Rightarrow$ (1) holds without the continuum hypothesis if the term "of countable type" is understood in the sense of the Definition 1.

Using the lemma formulated above we can establish a number of criteria for the reflexivity of Banach lattices. In what follows the term *reflexivity* is to be understood only in the sense of the theory of normed spaces. Also, all the remaining results are proved without the use of the continuum hypothesis.

Theorem 5. *For an arbitrary Banach lattice X the following statements are equivalent:* (1) *X is reflexive as a Banach space;* (2) *X^{***} and X^{****} are spaces of countable type;* (3) *X is a conditionally complete Banach lattice and X^{***} is of countable type.*

In the statement of this theorem the term "of countable type" is to be understood in the sense of any of the three definitions given above.

Remark. In the criterion (2) we are dealing with the third and fourth conjugate spaces of X. The question arises: for which natural numbers m and n is it true that the mth and nth conjugate spaces of X being of countable type is equivalent to X being reflexive? It can be shown that a necessary and sufficient condition is that these numbers must be of opposite parities and satisfy the inequalities $m \geq 3$, $n \geq 3$. Similarly, in the criterion (3) the third conjugate X^{***} can be replaced by the mth conjugate space of X if and only if m is odd and $m \geq 3$.

It is useful to contrast Theorem 5 with Ogasawara's well-known criterion for reflexivity: the Banach lattice X is reflexive if and only if X and X^* are conditionally complete Banach lattices.

Using certain results of Day [8,9], Lindenstrauss [10] and Andô [11], we can give criteria for reflexivity in terms of the rotundity and smoothness of unit balls (for the definition of these concepts, cf. [7], Russian p. 187 [English p. 111]).

Theorem 6. *For an arbitrary Banach lattice X reflexivity is equivalent to each of the following properties:* (1) *X^{***} and X^{****} are isomorphic Banach spaces with rotund unit balls;* (2) *X^* and X^{**} are isomorphic spaces with smooth unit balls;* (3) *X^* is isomorphic to a space with a smooth unit ball and X^{***} is isomorphic to a space with a rotund unit ball.*

Remark. The well-known Banach space of R. C. James (cf. [7], Russian p. 123 [English p. 72]) satisfies all these criteria but is not reflexive. The reason is that this space of James is not isomorphic to any Banach lattice.

To complete the picture, let us recall one more criterion for the reflexivity of the Banach lattice X, established earlier by the author [4]: X contains no subspaces that are isomorphic to c_0 or to l^1.

The author wishes to express his great indebtedness to Professor B. Z. Vulih for his constant interest in this work.

Received 1/APR/68

BIBLIOGRAPHY

[1] B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl. Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; MR 37 #121.

[2] B. M. Makarov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 107 (1956), 17. MR 17, 987.

[3] T. Ogasawara, a) J. Sci. Hirosima Univ. Ser. A 12 (1942), 37;
b) ibid. 13 (1944), 41. MR 10, 545.

[4] G. Ja. Lozanovskiĭ, Funkcional. Anal. i Priložen. 1 (1967), no. 3, 92. MR 36 #3110.

[5] ———, Sibirsk. Mat. Ž. 10 (1969), no. 1.

[6] A. Pełczyński, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 6 (1958), 251. MR 22 #5875.

[7] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1958; 2nd, corrected printing, Academic Press, New York and Springer-Verlag, Berlin, 1962; Russian transl., IL, Moscow, 1961. MR 20 #1187; MR 22 #12360; MR 26 #2847.

[8] ———, Transl. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 516. MR 16, 716.

[9] ———, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 415. MR 19, 868.

[10] J. Lindenstrauss, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 967. MR 34 #4875.

[11] T. Andô, Proc. Japan Acad. 33 (1957), 429. MR 20 #5417.

Translated by:
J. Burlak

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 188 (1969), No. 3

Soviet Math. Dokl.
Vol. 10 (1969), No. 5

ON THE REPRESENTATION OF SPACES OF REGULAR FUNCTIONALS AND SOME APPLICATIONS

UDC 513.88

G. Ja. LOZANOVSKIĬ

In the theory of vector lattices, frequent use is made of the representation of spaces as spaces of some special type, for example, spaces of continuous functions. An arbitrary K-space, in particular, admits such a representation (cf., e.g., [2], Chapter V). Completely linear functionals on K-spaces admit an integral representation of the same type, as the linear continuous functionals in the classical L_p spaces $(1 < p < \infty)$; this fact allows extensive application of the theory of measure and integration to the study of these functionals. The question of the representation of arbitrary regular functionals (and spaces of such functionals) is more difficult. The aim of the present paper is the construction of a method of representing spaces of regular functionals, and application of this method to the Banach lattices introduced by Calderón [3]. Some results are also obtained on completely linear functionals in a KN-space, supported on the unit ball.

We shall use the terminology of the theory of K-spaces (i.e., conditionally complete linear lattices) used in [2]. Two elements x and y of a K-space X are called *disjunctive* (notation xdy), if $|x| \wedge |y| = 0$. The unit 1 of a K-space X is understood in the weak sense (of Freudenthal), i.e. $x \wedge 1 > 0$ for any $x > 0$. By a *normal subspace* of a K-space X is meant any linear subset X_1 satisfying the condition: if $x \in X_1$, $y \in X$, $|y| \subseteq |x|$, then $y \in X_1$. If, in addition, there are no nonzero elements in X, disjunctive to all the elements of X_1, we say that X_1 is a *basis* in X.

A K-space W is called *extended* if any set of pairwise disjunctive elements is bounded. A compactum Q is called *extremal* if the closure of any open subset of Q is open-closed. For an arbitrary extremal compactum Q the set $C_\infty(Q)$ of all real continuous functions on Q, which may assume the values $+\infty$ and $-\infty$ on nowhere dense sets, is an extended K-space under the natural partial ordering and algebraic operations (cf. [2], Chapter V). Every extended K-space W in which a unit 1 is fixed is uniquely representable as a space $C_\infty(Q)$ on an appropriate extremal compactum Q if it is required that 1 correspond to the function on Q identically equal to the unit. Every K-space X is a basis in some extended K-space W, which is called the *maximal extension* of the space X and which we shall denote by $\mathfrak{M}(X)$.

With any K-space X there are associated two spaces of functionals on X: the space $\tilde{X}$ of all regular functionals ([2], Russian p. 267) and the space $\bar{X}$ of all completely linear functionals ([2], Russian p. 239), called *conjugate* to X by Nakano.

A *KN-space* is a K-space X which is also a normed space for which the norm is monotone; i.e., $|x| \leq |y|$ implies that $\|x\|_X \leq \|y\|_X$.

A *KB-space* is a KN-space X in which the two additional conditions

(A) if $x_n \downarrow 0$, then $\|x_n\|_X \to 0$,

(B) if $0 \leq x_n \uparrow$ and $\lim \|x_n\|_X < \infty$, then $\sup x_n$ exists in X, are satisfied.

We shall denote the Banach conjugate of an arbitrary KN-space X by X^*. We recall that $X^* \subseteq \tilde{X}$

and, if X is Banach, then $X^* = \widetilde{X}$.

§1. Let Q be an extremal compactum, $W = C_\infty(Q)$ the corresponding extended K-space. For brevity we denote $C(Q)$, i.e., the ordinary space of real finite continuous functions on Q, by M.

Definition 1. Let X be a normal subspace in $C_\infty(Q)$, $f \in \widetilde{X}$, $u \in X_+$. For any $x \in M$ we put

$$f_{(u)}(x) = f(xu), \tag{1}$$

where xu is the product in the sense of multiplication in $C_\infty(Q)$ (cf. [2], Russian p. 163).

It is clear that $f_{(u)} \in \widetilde{M}$.

Definition 2. Let X and Y be normal subspaces in $C_\infty(Q)$, $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$. We shall say that f and g are *disjoint* (notation fDg) if, for any $u \in X_+$, $v \in Y_+$, $f_{(u)} d g_{(v)}$ holds, i.e., $f_{(u)}$ and $g_{(v)}$ are disjoint as elements of the K-space $\widetilde{M}$.

We note that one cannot talk of disjointness of the elements f and g in the usual sense, since they are not elements of the same K-space.

Theorem 1. *Let X be a normal subspace in $C_\infty(Q)$. We fix a unit 1_X in the space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ and a unit 1_M in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$. Then there exists a unique pair (R_X, V_X), where V_X is a component in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and R_X is an isomorphism of the K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ onto the K-space V_X, satisfying the conditions:*

(1) *For any $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{M}$,*

$$(fDg) \Leftrightarrow (R_X f dg);$$

(2) $R_X(1_X) = \mathrm{Pr}_{V_X} 1_M$.

We note that here $R_X f$ and g are elements of the same K-space $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and we can thus speak of their disjointness in the ordinary sense.

Definition 3. The operator R_X, introduced in Theorem 1, will be called the *canonical representation of the space* $\widetilde{X}$.

It is clear that the operator R_X depends on the choice of units 1_X, 1_M in the space $\mathfrak{M}(\widetilde{X})$ and $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, respectively.

Theorem 2. *Let X and Y be normal subspaces in $C_\infty(Q)$; R_X and R_Y the corresponding canonical representations. Then for any $f \in \widetilde{X}$, $g \in \widetilde{Y}$ and any choice of units 1_M, 1_X, and 1_Y,*

$$(fDg) \Leftrightarrow (R_X f d R_Y g).$$

§2. For the remainder of this section we shall assume that a unit is selected in $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ and a representation $\mathfrak{M}(\widetilde{M}) = C_\infty(Q')$ is constructed on an appropriate extremal compactum Q'. Let X_0 and X_1 be Banach KN-spaces which are normal subspaces in $C_\infty(Q)$. Following A. P. Calderón [3], we put, for $0 < s < 1$,

$$X_0^{1-s} X_1^s = \{z \in C_\infty(Q)\colon |z| \leqslant \lambda x_0^{1-s} x_1^s, \text{ where } 0 \leqslant x_i \in X_i, \\ \|x_i\|_{X_i} \leqslant 1 \ (i = 0, 1), \text{ number } \lambda > 0\}, \tag{2}$$

and, for $z \in X_0^{1-s} X_1^s$, we mean by $\|z\|_{X_0^{1-s} X_1^s}$ the infimum of all possible λ in (2). Then $(X_0^{1-s} X_1^s, \|\cdot\|_{X_0^{1-s} X_1^s})$ is a Banach KN-space.

We now choose arbitrary units in the spaces $\mathfrak{M}(X_0^*)$, $\mathfrak{M}(X_1^*)$, $\mathfrak{M}((X_0^{1-s} X_1^s)^*)$ and identify the spaces X_0^*, X_1^*, $(X_0^{1-s} X_1^s)^*$ with their images in $C_\infty(Q')$ under the canonical representations. We can then examine the Calderón space $(X_0^*)^{1-s} (X_1^*)^s$, constructed from X_0^* and X_1^* in the same manner (formula (2)) in which the space $X_0^{1-s} X_1^s$ is constructed from X_0 and X_1.

Theorem 3. *Let units be chosen arbitrarily in the spaces $\mathfrak{M}(X_0^*)$ and $\mathfrak{M}(X_1^*)$. Then a unit can be chosen in the space $\mathfrak{M}((X_0^{1-s} X_1^s)^*)$ in such a manner that, under the identification of the corresponding* *spaces with their images under the canonical representations, the equation*

$$(X_0^{1-s}X_1^s)^* = (X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s \tag{3}$$

holds, for elements as well as for the norm.

The proof of this theorem is based on results obtained earlier by the author [4, 5].

It follows from Theorem 3 that the Banach conjugates of the family $X_0^{1-s}X_1^s$ $(0 < s < 1)$ again form such a family. We point out, in addition, that no additional restrictions can be imposed on the KN-spaces X_0 and X_1.

We now consider an important special case of the Calderón construction. Let X be a Banach KN-space which is a normal subspace in $C_\infty(Q)$; let $p > 1$ be an arbitrary number. We put

$$X_p = \{x \in C_\infty(Q):\ |x|^p \in X\} \tag{4}$$

and, for $x \in X_p$,

$$\|x\|_{X_p} = \| |x|^p \|_X^{1/p}. \tag{5}$$

Clearly $X_p = X^{1-s}Y^s$, where $Y = C(Q)$ and $1 - s = 1/p$.

Theorem 4. a) $(X_p)^{**} = (X^*)_p$, *where* X^* *is the Nakano conjugate to the Banach conjugate* X^*.

b) *A Banach conjugate of* X_p *of odd order is a KB-space.*

c) *If* X *is not a KB-space, then no Banach conjugate of* X_p *of even order is a KB-space.*

Theorem 5. *Let* $\bar{X}$ *be complete over* X *and let the following condition be satisfied: if the set* $0 \le x_\alpha \uparrow$ $(\alpha \in A)$ *and* $\sup \|x_\alpha\|_X < \infty$, *then* $\sup x_\alpha$ *exists in* X *and* $\sup \|x_\alpha\|_X = \|\sup x_\alpha\|_X$. *Then* X_p *is algebraically and lattice isomorphic and isometric to* $\overline{(X_p)^*}$.

Using Theorem 5, some other results of the author [5], and a theorem of Bishop-Phelps concerning support functionals [1], the following theorem on completely linear functionals in a KN-space, supported on the unit ball, can be proved.

Theorem 6. *Let* X *be a Banach KN-space satisfying all the conditions of Theorem* 5. *Then*

a) *for any* $x \in X$ *and any number* $\epsilon > 0$, *there can be found* $y \in X$ *and* $f \in \bar{X}$ *so that* $\|x - y\|_X < \epsilon$, $\|f\|_{X^*} = 1$ *and* $f(y) = \|y\|_X$.

b) *For any* $f \in \bar{X}$ *and any number* $\epsilon > 0$, *there can be found* $g \in \bar{X}$ *and* $x \in X$ *such that* $\|f - g\|_{X^*} < \epsilon$, $\|x\|_X = 1$ *and* $g(x) = \|g\|_{X^*}$.

c) *If* $\mathfrak{M}(X)$ *is of denumerable type, then there can be found a weak unit* 1 *in* X *and a functional* $f \in \bar{X}$ *such that* $\|1\|_X = \|f\|_{X^*} = f(1) = 1$.

In conclusion the author expresses his appreciation to Professor B. Z. Vulih for his interest in the present work.

Received 1/FEB/69

BIBLIOGRAPHY

[1] E. Bishop and R. R. Phelps, *The support functionals of a convex set*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963, pp. 27–35. MR 27 #4051.

[2] B. Z. Vulih, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Noordhoff, Groningen, 1967. MR 24 #A3494; MR 37 #121.

[3] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113–190. MR 29 #5097.

[4] G. Ja. Lozanovskiĭ, *Banach lattices of Calderón*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 172 (1967), 1018–1020 = Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 224–227. MR 34 #8155.

[5] ———, *On some Banach lattices*, Sibirsk. Mat. Ž. 10 (1969), 584–599.

Translated by:
J. J. Sember

Offprint from

PROCEEDINGS

OF THE

ROYAL IRISH ACADEMY

SECTION A—MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

ROYAL IRISH ACADEMY

19 Dawson Street
Dublin 2, Ireland

THREE NEW CARDINAL INVARIANTS FOR NORMED LATTICES*

By
Y. A. Abramovich

Department of Mathematical Sciences, Indiana University–Purdue University at Indianapolis

and

G. Ya. Lozanovsky†

(Communicated by T. T. West, M.R.I.A.)

[Received 13 July 1989. Read 30 November 1989. Published 31 December 1990.]

ABSTRACT

For an arbitrary normed lattice X we introduce three cardinal characteristics $a(X)$, $b(X)$ and $c(X)$. The first (Definition 2) is of order-related nature and the other two (Definitions 3 and 4) are of strictly linear topological nature. The main result shows that under some mild restrictions on X and under the assumption of the generalised continuum hypothesis all these characteristics coincide. It is a very broad generalisation (to arbitrary cardinality) of the corresponding characterisation of the spaces with the countable sup property (i.e. when $a(X) = b(X) = c(X) = \aleph_0$) announced by Lozanovsky in 1968.

Introduction

Although I am presenting this paper for publication many years after the death of the second author, I nevertheless consider it a great honour to name as co-author my late teacher and friend Gregory Lozanovsky. In 1968, Lozanovsky announced [6] his remarkable result that, for any Dedekind complete Banach lattice with a sufficient set of order-continuous functionals, the order-related notion of the countable sup property (countability of type) is equivalent to a linear topological property, namely the absence of subspaces isomorphic to $l_\infty(S)$ with card $(S) = \aleph_0$. The initial proof (never published) was found under the assumption of the continuum hypothesis (CH). Later Lozanovsky [4] discovered a new proof of this result, which was independent of CH.

The purpose of this paper is to present a generalisation of this theorem to an arbitrary cardinality. To obtain it, we generalise some ideas of Lozanovsky's initial proof, which explains why this should be considered a joint work. This proof is done under the assumption of the generalised continuum hypothesis (GCH) and

---

*This research was supported in part by a grant from Chrysler Corporation to IUPUI.
†Ob. 1976.

it will be extremely interesting to determine whether or not this assumption is essential. We use the standard terminology and notation of [2] and [9], for the most part without explanation.

To conclude this introduction, we mention the now classical result due to Ogasawara that the weak sequential completeness of a Banach lattice is equivalent to a purely order-related property (to be a KB-space). Since the discovery of this result only a few other invariants of a similar nature have been found (see [4], [2], [5] and [10] for expositions of these results). Our theorem extends the list of these important invariants. Several applications of this theorem are presented at the end of the paper.

Definitions and the main result

Throughout we shall use small Gothic letters $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{n}$ to denote cardinal numbers and small Greek letters $\alpha, \beta, \ldots$ to denote ordinal numbers. If $\mathfrak{n}$ is a cardinal number then $\mathfrak{n}^+$ denotes the next one, and $\omega_{\mathfrak{n}}$ denotes the first ordinal number of cardinality $\mathfrak{n}$. If T is a set then its cardinality is denoted by card(T); if α is an ordinal number, then its cardinality is denoted by $\bar{\alpha}$.

If T is an arbitrary set and $\mathfrak{n} = \text{card}(T)$ then symbols $l_\infty(T)$ and $l_\infty(\mathfrak{n})$ will denote the Banach space of all bounded, real-valued functions on T with the uniform norm. The notation $l_\infty(\mathfrak{n})$ will be preferred in cases where there is no need to use the underlying space.

Definition 1. Let X be a vector lattice and $\mathfrak{n}$ a cardinal number. We say that X has a (disjoint) $\mathfrak{n}$-system provided there exists in X an order-bounded subset $\{x_i : i \in I\}$ of pairwise disjoint positive non-zero elements with card$(I) = \mathfrak{n}$.

Definition 2. Let X be a vector lattice. We let

$$\mathfrak{a}(X) = \sup\{\mathfrak{n}\text{: there exists an } \mathfrak{n}\text{-system in } X\}.$$

The cardinal number $\mathfrak{a}(X)$ will be called the type of disjointness (or disjointness type) of X. This cardinal characteristic $\mathfrak{a}(X)$ for vector lattices was first introduced in [1]. It is obvious that the infinite dimensional vector lattices with the countable sup property [2] (or, equivalently, of countable type [9]) are precisely those vector lattices whose disjointness type equals $\aleph_0$.

It is worth noting that for a Dedekind complete vector lattice X, an $\mathfrak{a}(X)$-system may or may not exist in X. In the latter case, $\mathfrak{a}(X)$ is necessarily a limit number.

In the next two definitions, E is an arbitrary normed space.

Definition 3. Let $\mathfrak{b}(E) = \sup \mathfrak{n}$, where the supremum is taken over all the cardinal numbers for which E has a subspace isomorphic to $l_\infty(\mathfrak{n})$.

Obviously, $\mathfrak{b}(l_\infty(\mathfrak{n})) = \mathfrak{n}$ for each $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{b}(E) \geqslant \aleph_0$ for each infinite dimensional E.

In a manner analogous to $\mathfrak{a}(X)$, E may or may not contain a subspace isomorphic to $l_\infty(\mathfrak{b}(E))$. In the latter case, $\mathfrak{b}(E)$ is a limit number.

Definition 4. Let $\mathfrak{c}(E)$ be the first cardinal number $\mathfrak{n}$, for which in E^*, the Banach conjugate of E, there exists a system $\Phi = \{f\}$ of functionals such that

(i) Φ separates the points of E, i.e. for each $0 \neq x \in E$ there exists an $f \in \Phi$ with $f(x) \neq 0$, and
(ii) for each $x \in E$, $\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(x) \neq 0\} \leqslant n$.

Obviously, both characteristics $b(E)$ and $c(E)$ are linear topological invariants, and $b(E_1) \leqslant b(E)$ and $c(E_1) \leqslant c(E)$ for each subspace E_1 of E.

If now X is a normed lattice, then all three characteristics make sense for X, the first, $a(X)$, being of strictly order-related nature. It turns out that under some mild restrictions on the space X all these characteristics coincide.

Theorem. *Let X be a Dedekind complete normed lattice whose order dual $X_n^{\sim}$ separates the points of X. Then (assuming* GCH*), $a(X) = b(X) = c(X)$.*

The proof will consist of the verifications of the following inequalities:

$$a(X) \leqslant b(X),\ c(X) \leqslant a(X) \text{ and } b(X) \leqslant c(X).$$

It is worth remarking that the first inequality is valid for any Dedekind complete X without additional assumptions; the second inequality is valid without GCH; and only the proof of the third inequality depends on all the assumptions above. We do not know whether they are essential; we note only that the assumption $\{X_n^{\sim}\}^0 = \{0\}$ is very mild. For example, all Banach function spaces satisfy it. We also stress that X is not assumed to be Banach; this is rather unusual for problems like those under consideration.

PROOF. We will assume that X is infinite dimensional. (Otherwise, the theorem is trivial.)

1. The inequality $a(X) \leqslant b(X)$ is almost obvious. Indeed, let $\{x_i : i \in I\}$ be an arbitrary disjoint n-system (i.e. $\operatorname{card}(I) = n, x_i \wedge x_j = 0\ (i \neq j)$ and $0 < x_i \leqslant e \in X$). Since $b(X) \geqslant \aleph_0$, we can assume that $n \geqslant \aleph_0$, otherwise there is nothing to prove. Let us put $I_k = \{i \in I: \|x_i\| \geqslant 1/k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Since $\bigcup_{k=1} I_k = I$, there exists k_0 such that $\operatorname{card}(I_{k_0}) = n$. Then obviously X contains a subspace isomorphic to $l_\infty(n)$. This and the fact that the n-system was arbitrary imply that $a(X) \leqslant b(X)$.

2. Next we prove the inequality $c(X) \leqslant a(X)$. Since the space $X_n^{\sim}$ separates the points of X, by the Luxemburg–Zaanen theorem [7, th. 37.1] the space $X_n^* = X^* \cap X_n^{\sim}$ also separates the points of X. Using Zorn's lemma, we can find in X_n^* a full system $\{f_i: i \in I\}$ of pairwise disjoint positive normed functionals. (We recall that a subset D of a vector lattice Z is said to be full if $z = 0$ is the only element in Z that is disjoint to all elements in D.) Let X_i denote the carrier of f_i; that is, X_i is the disjoint complement to the null ideal $N_i = \{x \in X: f_i(|x|) = 0\}$. We can additionally assume that each X_i has a weak unit x_i (otherwise we will partition X_i into pairwise disjoint smaller bands $\{X_{ij}\}_j$ with weak units and replace f_i by $f_{ij} = f_i \circ P_{X_{ij}}$ where $P_{X_{ij}}$ denotes the band projection from X onto X_{ij}).

Further, we introduce on each X_i a new norm $\|\cdot\|_i$ by setting

$$\|x\|_i = f_i(|x|).$$

It is easy to see that, in view of a known theorem due to H. Nakano on compactness of order intervals in the topology $\sigma(X, X_n^{\sim})$, the order interval $[0, x_i] = \{x \in X: 0 \leqslant x \leqslant x_i\}$ is a weakly compact subset of $(X_i, \|\cdot\|_i)$, and that a linear subspace generated by $[0, x_i]$ is dense in $(X_i, \|\cdot\|_i)$. Hence, $(X_i, \|\cdot\|_i)$ is a WCG space in the sense of J. Lindenstrauss, and consequently, by the Amir–Lindenstrauss theorem [3], there exists a continuous one-to-one linear operator A_i from $(X_i, \|\cdot\|_i)$ into the space $c_0(T_i)$, where $T_i = \{t^{(i)}\}$ is an appropriate set. Obviously, A_i is also continuous from $(X_i, \|\cdot\|)$ into $c_0(T_i)$.

For each $i \in I$ and each point $t^{(i)} \in T_i$, we define on X a linear functional $f_{i,t^{(i)}}$ by putting

$$f_{i,t^{(i)}}(x) = (A_i(P_{X_i}x))(t^{(i)}) \quad (x \in X)$$

where P_{X_i} denotes the band projection from X onto X_i. Obviously $f_{i,t^{(i)}} \in X^*$. Let us define a set

$$\Phi = \{f_{i,t^{(i)}}: i \in I, t^{(i)} \in T_i\}.$$

It is clear that Φ separates the points of X. To finish the proof of the second inequality, it is enough to show that for each $x \in X$

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(x) \neq 0\} \leqslant a(X).$$

Indeed, for each $x \in X$ we have $\operatorname{card}\{i \in I: P_{X_i}(x) \neq 0\} \leqslant a(X)$ and each element of $c_0(T_i)$ takes on non-zero values on an at most countable subset of T_i. Therefore,

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(x) \neq 0\} \leqslant a(X) \cdot \aleph_0 = a(X).$$

This proves that $c(X) \leqslant a(X)$.

3. Now we will prove the last inequality $b(X) \leqslant c(X)$. The core of the proof is in the following lemma whose proof will be postponed until after we have finished with the above inequality.

Main lemma. *For each cardinal number* n, *the following inequality is true*: $c(l_\infty(2^n)) > n$.

Only at the stage of applying the main lemma will GCH be used.

Let us assume (contrary to what we want to prove) that $c(X) < b(X)$. By the definition of $b(X)$ the following two cases are possible. Either (i) X contains a subspace (isomorphic to) $l_\infty(b(X))$, or (ii) X does not contain such a space.

Let us consider case (i). Since $c(X) < b(X)$, in view of GCH we have $2^{c(X)} \leqslant b(X)$, and therefore X contains a subspace $X_1 = l_\infty(2^{c(X)})$. But this implies (by the main lemma) that

$$c(X) \geqslant c(X_1) = c(l_\infty(2^{c(X)})) > c(X),$$

a contradiction. Let us turn to case (ii). We have already remarked (after Definition 3) that in this case $b(X)$ is a limit cardinal number, and hence the inequality $c(X) < b(X)$ implies that $2^{c(X)} = c(X)^+ < b(X)$. But then X contains $X_1 = l_\infty(2^{c(X)})$ and we again arrive at a contradiction. Except for the main lemma, the proof of the theorem is complete.

PROOF OF THE MAIN LEMMA. We emphasise that this lemma is independent of GCH. Assume that n is an infinite cardinal number; otherwise the statement is trivially correct. Let us fix a set S of cardinality 2^n. Further, let us assume that for each $\alpha \in W_{n^+} = \{\alpha: \alpha < \omega_{n^+}\}$ there exists a partition π_α of the set S, or of a subset of S (which is independent of α), into pairwise disjoint non-empty subsets satisfying the following three conditions.

⟨1⟩ Each partition π_α is uncountable.
⟨2⟩ For each $F \in \pi_\alpha$ and for each $\beta > \alpha$ ($\beta \in W_{n^+}$), the set F is an uncountable union of elements from π_β.
⟨3⟩ If, for each $\beta < \alpha$ ($<\omega_{n^+}$), we have chosen $F_\beta \in \pi_\beta$ such that $F_{\beta_2} \subset F_{\beta_1}$ for $\beta_2 > \beta_1$, then $\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$ is an uncountable union of elements from π_α.

Before justifying the existence of such partitions, we will apply them to prove the lemma.

Let $\Phi = \{f\}$ be an arbitrary system in $l_\infty(S)^*$ separating the points in $l_\infty(S)$. Our aim is to find an $x \in l_\infty(S)$ such that

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(x) \neq 0\} > n.$$

First, we will show that for each $\alpha \in W_{n^+}$ there exist f_α, E_α, F_α that satisfy the following conditions:

1) $f_\alpha \in \Phi$,
2) $E_\alpha, F_\alpha \subset S$, $E_\alpha \cap F_\alpha = \emptyset$,
3) $E_\beta \oplus F_\beta \subset F_\alpha$ for $\beta > \alpha$,
4) $f_\alpha(\chi(E_\alpha)) \neq 0$, $|f_\alpha|(\chi(F_\alpha)) = 0$,

where $\chi(E)$ denotes, as usual, the characteristic function of the set E.

Let us remark that 3) and 4) imply that $f_{\alpha_1} \neq f_{\alpha_2}$ for $\alpha_1 \neq \alpha_2$, and that 2) and 3) imply that the elements of $\{E_\alpha\}$ are pairwise disjoint.

The construction of $\{f_\alpha\}$, $\{E_\alpha\}$ and $\{F_\alpha\}$ is by induction on α. An arbitrary set from π_1 will be taken as E_1. Since Φ separates the points of $l_\infty(S)$, there exists an $f_1 \in \Phi$ such that $f_1(\chi(E_1)) \neq 0$. By ⟨1⟩, the partition π_1 is uncountable. But each functional $f \in l_\infty(S)^*$ can be non-zero on an at most countable set of pairwise disjoint characteristics functions. Therefore we can find $F_1 \in \pi_1$, such that $F_1 \cap E_1 = 0$ and $|f_1|(\chi(F_1)) = 0$. This completes the first step of the induction.

Let f_β, E_β and F_β be chosen for all $\beta < \alpha$. We are to construct the corresponding elements for α. First, let α be a limit number. In view of 3), $\{F_\beta: \beta < \alpha\}$ is a decreasing family, and thus by property ⟨3⟩ of the partitions there exists $E_\alpha \in \pi_\alpha$ such that $E_\alpha \subset F_\beta$ for each $\beta < \alpha$. Fix any $f_\alpha \in \Phi$ for which $f_\alpha(\chi(E_\alpha)) \neq 0$. Now (again by ⟨3⟩) $\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$ is an uncountable union of pairwise disjoint elements of

π_α. Hence there exists $F_\alpha \in \pi_\alpha$ for which $F_\alpha \cap E_\alpha = \emptyset$ and $|f_\alpha|(\chi(F_\alpha)) = 0$. For a limit number α the construction of f_α, E_α and F_α is fulfilled. For a non-limit α, the construction is exactly the same. The fulfilment of conditions 1)–4) follows directly from the construction.

We remark that, since the sets E_α are pairwise disjoint, the series $\sum_{\alpha<\omega_{n^+}} d_\alpha \chi(E_\alpha)$ converges pointwise for arbitrary scalars $\{d_\alpha\}$, and its sum defines an element from $l_\infty(S)$ provided these scalars are bounded.

Now we are ready to produce a necessary $x \in l_\infty(S)$.

Namely we will put

$$x = \sum_{\alpha<\omega_{n^+}} \epsilon_\alpha \chi(E_\alpha),$$

where $\epsilon_\alpha = 1$ or -1 and the choice of signs is subjected to the following induction rule.

$$\text{For } \alpha = 1, \quad \epsilon_1 = \operatorname{sgn} f_1(\chi(E_1)).$$

Let ϵ_β be defined for all $\beta < \alpha \, (<\omega_{n^+})$. Then we put

$$\epsilon_\alpha = \operatorname{sgn}\left[f_\alpha(\chi(E_\alpha))/f_\alpha\left(\sum_{\beta<\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right)\right]$$

provided $f_\alpha(\sum_{\beta<\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)) \neq 0$ and $\epsilon_\alpha = 1$ otherwise. We will show that for each $\alpha < \omega_{n^+}$

$$|f_\alpha(x)| \geq |f_\alpha \chi(E_\alpha))|$$

and thus, by 4), $|f_\alpha(x)| \neq 0$.

Indeed,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= f_\alpha\left(\sum_{\beta<\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta) + \epsilon_\alpha \chi(E_\alpha) + \sum_{\beta>\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right) \\ &= f_\alpha\left(\sum_{\beta<\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right) + \epsilon_\alpha f_\alpha(\chi(E_\alpha)) + f_\alpha\left(\sum_{\beta>\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right). \end{aligned}$$

By our choice of ϵ_α the first two terms are of the same sign, and the last term is zero since

$$\left|f_\alpha\left(\sum_{\beta>\alpha} \epsilon_\beta \chi(E_\beta)\right)\right| \leq |f_\alpha|(\chi(F_\alpha)) = 0.$$

This obviously implies $|f_\alpha(x)| \geq |f_\alpha(\chi(E_\alpha))|$, and thus we have proved that $\operatorname{card}\{f \in \Phi : f(x) \neq 0\} \geq n^+ > n$, i.e. $c(l_\infty(2^n)) > n$.

Finally, we will justify the assumption made above regarding the existence of the partitions π_α ($\alpha \in W_{n^+}$) satisfying conditions $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$ and $\langle 3\rangle$.

Let T be an arbitrary set of cardinality $\aleph_1$. For each $\alpha \in W_{n^+}$ we denote by S_α the set $\{A\}$ of all mappings from W_{n^+} into T that satisfy the condition

$$A(\beta) = A(\alpha) \qquad \text{for all } \beta \geq \alpha.$$

Let us estimate from above the cardinality of S_α. We have

$$\operatorname{card}(S_\alpha) = \aleph_1^{\bar{\alpha}} \leq (2^{\aleph_0})^{\bar{\alpha}} = 2^{\aleph_0 \bar{\alpha}}.$$

Since $\alpha < \omega_{n^+}$, we have $\bar{\alpha} \leq n$ and consequently $\operatorname{card}(S_\alpha) \leq 2^n$. This implies that

$$\operatorname{card}(\cup \{S_\alpha \colon \alpha < \omega_{n^+}\}) \leq n^+ \cdot 2^n = 2^n,$$

and therefore we can identify the set (of mappings) $\cup \{S_\alpha \colon \alpha < \omega_{n^+}\}$ with a subset of our initial set S of cardinality 2^n. (If $\operatorname{card}(\bigcup_\alpha S_\alpha) = 2^n$, then we identify $\bigcup_\alpha S_\alpha$ with S; if $\operatorname{card}(\bigcup_\alpha S_\alpha) < 2^n$, then we identify $\bigcup_\alpha S_\alpha$ with a subset of S.)

We will confine ourselves to the case $\bigcup_\alpha S_\alpha = S$. We fix $\alpha < \omega_{n^+}$ and now we are ready to describe the organisation of the partition π_α of the set S. Let $\sigma = (t_1, t_2, \ldots, t_\beta, \ldots, t_\alpha) = (t_\beta)_{\beta < \alpha}$ (*) be an arbitrary collection of points of T (not necessarily distinct) and let us put

$$M_\sigma = \{A \in S \colon A(\beta) = t_\beta \text{ for all } \beta \leq \alpha\}.$$

Then, by definition, the partition π_α consists of all sets of the form M_σ, where σ runs over all subsets of the form (*). Direct verification shows that conditions ⟨1⟩, ⟨2⟩ and ⟨3⟩ are satisfied. The proof of the main lemma is complete.

Some concluding remarks

1. The following corollary follows immediately from our theorem.

Corollary. *Let Q be a hyperstonean, extremally disconnected, compact Hausdorff space. Then (CH) the next two statements are equivalent.*

i) *Q satisfies the Suslin condition.*
ii) *There exists a set $\Phi = \{\mu\}$ of regular Borel measures on Q, such that Φ separates the points of $C(Q)$ and for each $x \in C(Q)$ the set $\{\mu \in \Phi \colon \int_Q x(q)\, d\mu(q) \neq 0\}$ is at most countable.*

Recall that the Suslin condition (or, in other terminology, the condition of countability of chains) means that each family of mutually disjoint non-empty open sets is at most countable. In our terminology, it means that $C(Q)$ has the countable sup property or $a(C(Q)) \leq \aleph_0$. A space Q is hyperstonean if and only if the space $C_n^\sim(Q)$ of order-continuous functionals separates the points of $C(Q)$.

In particular, the above corollary implies that it is impossible to find $\Phi \subset l_\infty(S)^*$ (where $\operatorname{card}(S) = \aleph_1$) such that Φ separates the points of $l_\infty(S)$ and

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(x) \neq 0\} \leqslant \aleph_0 \qquad \text{for each } x \in l_\infty(S). \tag{1}$$

Let us show that (1) is equivalent to the following (formally weaker) condition:

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(\chi(\Delta)) \neq 0\} \leqslant \aleph_0 \qquad \text{for each } \Delta \subset S. \tag{2}$$

Indeed, (2) implies obviously that for an arbitrary step function $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi(\Delta_i)$

$$\operatorname{card}\{f \in \Phi: f(\bar{x}) \neq 0\} \leqslant \aleph_0. \tag{3}$$

Fix an arbitrary $x \in l_\infty(S)$. Then there exists a sequence $\{x_l\}$ of step functions with $\|x - x_l\|_\infty \to 0$ and this together with (3) gives (1).

This fact disproves the following result due to Ryll-Nardzewski [8, p. 88].

Let $\bar{S} = \aleph_1$. Then (CH) there exists a family $\{\nu_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ of finite-additive set functions with bounded variations defined on the field of all subsets of the set S such that $\operatorname{card}\{\alpha: \nu_\alpha(A) \neq 0\} \leqslant \aleph_0$ *for any* $A \subset S$.

It should be noted that the last statement may formally be reconciled with what we have proved above since in it there is no assumption that the family $\{\nu_\alpha\}$ separates the points. But in the context of [8] this assumption is presupposed. (Otherwise there is nothing to prove since one can simply take $\nu_\alpha \equiv 0$ for each α.)

Accordingly, the statement in [8] preceding the theorem of Ryll-Nardzewski becomes unjustified. Moreover, under the additional assumption that the mapping under consideration has a trivial kernel, we can again disprove this statement by bringing it to a contradiction with our theorem.

2. Let us stress once more that, in view of our theorem, the exclusively order-theoretic concept of the type of disjointness is a Banach isomorphic property (for the corresponding class of Banach lattices), and it allows one to distinguish between otherwise hardly distinguishable spaces. For example, let n_i $(i = 1, 2, 3)$ be three cardinal numbers such that $\aleph_0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant n_3$ and let

$$l_\infty(n_3; n_1) = \{x \in l_\infty(n_3): \operatorname{card}(\operatorname{supp} x) \leqslant n_1\}.$$

Then the Banach lattices $X = l_\infty(n_2)$ and $Y = l_\infty(n_3; n_1)$ satisfy all the conditions of our theorem and, consequently (GCH), they are non-isomorphic since $a(X) = n_2$ and $a(Y) = n_1$.

3. It is worthwhile to compare Definitions 2 and 3 with the following two.

Definition 2′. Let X be a vector lattice. We denote by $a'(X)$ the first of the cardinal numbers n for which there exists no n-system in X.

Definition 3′. Let E be a normed space. Let $b'(E)$ be the first of the cardinal numbers n for which E does not contain a subspace isomorphic to $l_\infty(n)$.

Now let X be a Dedekind complete normed lattice. It is plain that the following inequalities are true:

$$a(X) \leqslant a'(X) \leqslant a(X)^+, \quad b(X) \leqslant b'(X) \leqslant b(X)^+.$$

Nevertheless, in spite of the similarity between the new and old characteristics, the equality $a'(X) = b'(X)$ does not necessarily hold.

For example, if $X = c_0$, then $a'(X) = \aleph_1$ and $b'(X) = \aleph_0$, but if $X = l_\infty$, then $a'(X) = b'(X) = \aleph_1$.

This shows that the characteristics $a(X)$ and $b(X)$ are preferable. For completeness, we point out one more way to calculate them. The proofs are trivial and are omitted.

Lemma 1. *Let X be a vector lattice. Then $a(X)$ is the first cardinal number with the following property: for each $n > a(X)$ there exists no n-system in X.*

Lemma 2. *Let E be a normed space. Then $b(E)$ is the first cardinal number with the following property: for each $n > b(E)$ there is no subspace of E isomorphic to $l_\infty(n)$.*

4. Here we present an example showing that for σ-Dedekind complete normed lattices, the theorem is not valid in general. Let

$$X = \{x \in l_\infty([0, 1]) \colon \operatorname{card}\{t \in [0, 1] \colon x(t) \neq x(0)\} \leqslant \aleph_0\}.$$

We reduce to X the standard order and norm of $l_\infty([0, 1])$. It is evident that X is σ-Dedekind complete normed lattice such that $X_n^\sim$ separates the points of X. Obviously, $a(X) = \operatorname{card}([0, 1])$. Nevertheless, $c(X) = \aleph_0$. Indeed, for each $t \in [0, 1]$, we denote by f_t the following functional from X^*:

$$f_t(x) = x(t) - x(0), \quad t \in (0, 1]$$

and

$$f_0(x) = x(0).$$

It is plain to see that the system of functionals $\Phi = \{f_t \colon t \in [0, 1]\}$ separates the points of X and that for each $x \in X$, $\operatorname{card}\{t \colon f_t(x) \neq 0\} \leqslant \aleph_0$.

REFERENCES

[1] ABRAMOVICH, Y. A. and VEKSLER, A. I. 1973 Exploring partially ordered spaces by means of transfinite sequences. *Optimization*, Novosibirsk **12**, 8–17.

[2] ALIPRANTIS, C. D. and BURKINSHAW, O. 1985 *Positive operators*. New York–London–Toronto. Academic Press.

[3] AMIR, D. and LINDENSTRAUSS, J. 1968 The structure of weakly compact sets in Banach spaces. *Annal. Math.* **48**, 35–46.

[4] BUKHVALOV, A. V., VEKSLER, A. I. and LOZANOVSKY, G. YA. 1979 Banach lattices—some Banach aspects of theory. *Russian Math. Surveys* **34**, 159–212.

[5] LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L. 1979 *Classical Banach spaces II*. Berlin–New York. Springer.

[6] Lozanovsky, G. Ya. 1968 Some topological properties of Banach lattices and reflexivity conditions for them. *Soviet Math. Dokl.* **9**, 1415–18.

[7] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. 1964 Notes on Banach function spaces XII. *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.* **A67**, 519–29.

[8] Pelczynski, A. and Sudakov, V. N. 1962 Remark on non-complemented subspaces of the space $m(S)$. *Colloq. Math.* **9**, 85–8.

[9] Vulikh, B. Z. 1967 *Introduction to the theory of partially ordered spaces*. Groningen. Walters–Noordhoff.

[10] Zaanen, A. C. 1983 *Riesz spaces II*. Amsterdam. North Holland.

Selecta Mathematica Sovietica is a unique research journal which seeks to widen access to the work of scientists in the Soviet Union. All fields of mathematics including mathematical physics, are represented, in English translation. A group of prominent Soviet mathematicians selects contributions, previously unavailable in English, from journals and collections, as well as from unpublished papers. Advisory editors in the United States, overseeing the review of papers submitted by the Soviet team, make final recommendations for publication. Papers are either translated under the direct supervision of the authors within the Soviet Union, or are translated in the United States, in which case the translations are reviewed by the Soviet authors and the editors for mathematical accuracy. By providing Western scientists access to advancements made by their Soviet colleagues, **Selecta Mathematica Sovietica** represents a significant contribution to the exchange of information among mathematicians worldwide.

Selecta Mathematica Sovietica is published four times a year by Birkhäuser Boston, Inc., 380 Green Street, Cambridge, MA 02139, (617) 876-2333.

Subscription rates (annual): \$115/sFr. 286/DM 328.-(postage included).

Single issue: \$31.00/sFr. 50.-/DM 54.-(plus postage). For orders outside U. S. and Canada write: Birkhäuser Verlag, P. O. Box 34, CH-4010 Basel, Switzerland.

Selecta Mathematica Sovietica
Vol. 5, No. 1, 1986

Contents

ade no use of the continuity of
liscrete time if the random walk

M. B. Petrovskaya, *On masses of*
e, Selecta Math. Soviet. 5:1 (1986),
tvuyushchie Markovskie Protsessy i
AN SSSR, Pushchino, 1979, pp.

SEL MATH SOV
VOL. 5, NO. 1, 1986

The Complex Interpolation Method in Banach Lattices of Measurable Functions*

G. Ya. Lozanovsky

The main goal of this paper is to give a detailed proof of results announced in the author's note [4], with the same title, on the reduction, in the case of Banach lattices, of Calderón's complex interpolation method to Calderón's real construction.

1. Notation

If E is a normed space, then $B(E) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ is its unit ball. Let $\Pi = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ and $\overline{\Pi} = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ be strips in the complex plane. Let (T, Σ, μ) be a complete σ-finite measure space and let $S = S(T, \Sigma, \mu)$ be the space of all complex measurable functions on (T, Σ, μ), with equivalent functions and sets identified.

A subspace X of S is called an ideal if $x \in X$, $y \in S$, and $|y| \leq |x|$ imply $y \in X$. A Banach ideal space (BFS) on (T, Σ, μ) is a Banach space X that is an ideal in S and for which $x, y \in X$ and $|y| \leq |x|$ imply $\|y\| \leq \|x\|$.

We write $x_n \uparrow$ or $(x_n \uparrow x)$, where $0 \leq x_n$, $x \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, with the usual meaning in the theory of vector lattices. A sequence $0 \leq x_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$ is called laterally increasing (notation, $x_n \upharpoonleft$), if $x_n \uparrow$ and $(x_{n+1} - x_n) \wedge x_n = 0$ for each n. We write $x_n \upharpoonleft x$, where $x \in S$, if $x_n \upharpoonleft$ and $x_n \uparrow x$.

The norm in a BFS X is called semicontinuous ($\equiv$ σ-Fatou) if $0 \leq x_n \uparrow x \in X$ implies that $\sup \|x_n\| = \|x\|$. The norm is called monotonically complete if $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and $\sup \|x_n\| < +\infty$ imply $\sup x_n \in X$.

The dual space of a BFS X is the space X' of all $x' \in S$ such that

$$\|x'\|_{X'} = \sup\left\{ \int_T |x \cdot x'| \, d\mu : x \in B(X) \right\} < +\infty.$$

*Originally published in Problemy Matematicheskogo Analiza, No. 7, Leningrad University Press, Leningrad, 1979, pp. 83–99. Translated by Alan H. Shuchat.